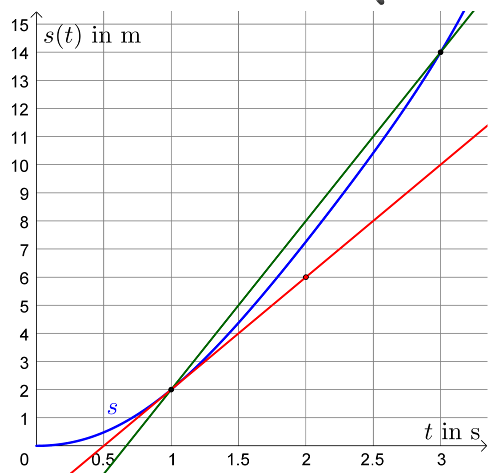
Weg-Zeit-Funktion

Der Graph einer **Weg-Zeit-Funktion s** ist rechts dargestellt.
$t \ldots$ Zeit in s
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg im Zeitintervall $[0; t]$ in m

Dann gilt:

i) $s'(t) = v(t)$ ist die **Geschwindigkeit** zum Zeitpunkt t in m/s.

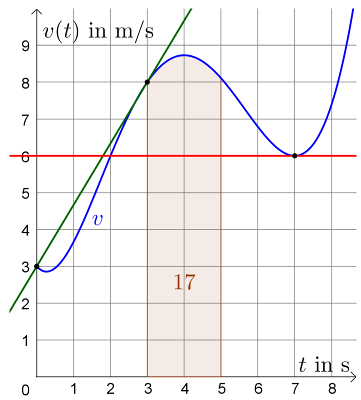
ii) $s''(t) = v'(t) = a(t)$ ist die **Beschleunigung** zum Zeitpunkt t in m/s^2.



Funktionsgraph von s	**Mathematische Formulierung**	**Physikalische Interpretation**
Der Punkt $(3 \mid 14)$ liegt auf dem Funktionsgraphen von s.	$s(3) = 14\,\text{m}$	In den ersten 3 Sekunden werden insgesamt 14 m zurückgelegt.
Mittlere Änderungsrate von s im Zeitintervall $[1; 3]$ = Steigung der Sekante im Zeitintervall $[1; 3]$	$\frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{12\,\text{m}}{2\,\text{s}} = 6\,\text{m/s}$	Die *mittlere* Geschwindigkeit im Zeitintervall $[1; 3]$ ist 6 m/s. Oder: Im Zeitintervall $[1; 3]$ werden pro Sekunde *durchschnittlich* 6 m zurückgelegt.
Lokale Änderungsrate bzw. momentane Änderungsrate von s zum Zeitpunkt $t = 1$ = Steigung der Tangente an der Stelle $t = 1$	$s'(1) = v(1) = \frac{4\,\text{m}}{1\,\text{s}} = 4\,\text{m/s}$	Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 1$ ist 4 m/s.
Der Funktionsgraph von s ist im Zeitintervall $[0; 3]$ positiv gekrümmt.	$s''(t) = v'(t) = a(t) > 0$	Die Geschwindigkeit ist im Zeitintervall $[0; 3]$ streng monoton wachsend. Oder: Die Beschleunigung ist im Zeitintervall $[0; 3]$ zu jedem Zeitpunkt positiv.

Geschwindigkeit-Zeit-Funktion

Der Graph einer **Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v** ist rechts dargestellt.
t … Zeit in s
$v(t)$ … Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s



Dann gilt:

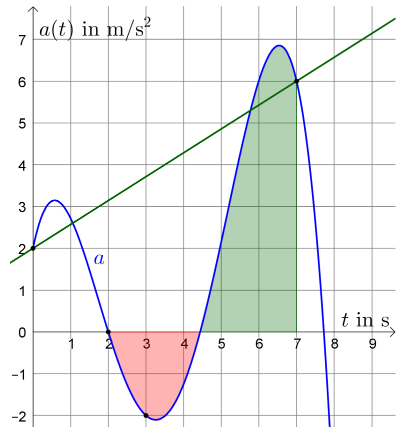
i) $\boldsymbol{v'(t) = a(t)}$ ist die **Beschleunigung** zum Zeitpunkt t in $\mathrm{m/s^2}$.

ii) $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\boldsymbol{v(t)}}_{=s'(t)}\,\mathbf{d}t = s(t)\,\Big|_{t_1}^{t_2} = s(t_2) - s(t_1)$ ist der im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ **zurückgelegte Weg** in m.

Funktionsgraph von v	**Mathematische Formulierung**	**Physikalische Interpretation**
Der Punkt $(3 \mid 8)$ liegt auf dem Funktionsgraphen von v.	$v(3) = 8\,\mathrm{m/s}$	Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 3$ ist $8\,\mathrm{m/s}$.
Mittlere Änderungsrate von v im Zeitintervall $[0; 3]$ = Steigung der Sekante im Zeitintervall $[0; 3]$	$\dfrac{v(3) - v(0)}{3 - 0} = \dfrac{5\,\mathrm{m/s}}{3\,\mathrm{s}} = 1{,}666\ldots\,\mathrm{m/s^2}$	Die *mittlere* Beschleunigung im Zeitintervall $[0; 3]$ ist $1{,}666\ldots\,\mathrm{m/s^2}$. Oder: Im Zeitintervall $[0; 3]$ wird die Geschwindigkeit pro Sekunde *durchschnittlich* um $1{,}666\ldots\,\mathrm{m/s}$ größer.
Lokale Änderungsrate bzw. momentane Änderungsrate von v zum Zeitpunkt $t = 7$ = Steigung der Tangente an der Stelle $t = 7$	$v'(7) = a(7) = \dfrac{0\,\mathrm{m/s}}{1\,\mathrm{s}} = 0\,\mathrm{m/s^2}$	Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 7$ ist $0\,\mathrm{m/s^2}$.
Der Funktionsgraph von v schließt mit der waagrechten Achse im Zeitintervall $[3; 5]$ eine Fläche mit Inhalt 17 ein.	$\displaystyle\int_3^5 v(t)\,\mathrm{d}t = s(t)\,\Big|_3^5 = s(5) - s(3) = 17\,\mathrm{m}$	Im Zeitintervall $[3; 5]$ werden insgesamt $17\,\mathrm{m}$ zurückgelegt.
—	$\dfrac{1}{t_2 - t_1} \cdot \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{v(t)}_{=s'(t)}\,\mathrm{d}t = \dfrac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$	mittlere Geschwindigkeit im Zeitintervall $[t_1; t_2]$

Beschleunigung-Zeit-Funktion

Der Graph einer **Beschleunigung-Zeit-Funktion a** ist rechts dargestellt.
t … Zeit in s
$a(t)$ … Beschleunigung zum Zeitpunkt t in $\mathrm{m/s^2}$



Dann gilt:

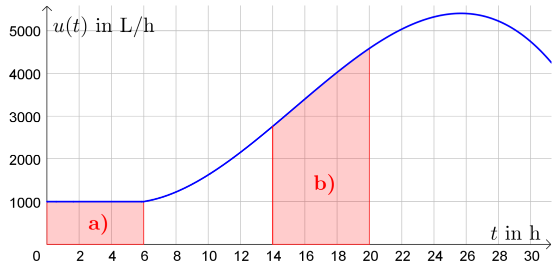
i) $\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{a(t)}_{=v'(t)}\,\mathrm{d}t = v(t)\,\Big|_{t_1}^{t_2} = v(t_2) - v(t_1)$ ist die **Geschwindigkeitsänderung**

im Zeitintervall $[t_1; t_2]$ in m/s.

Funktionsgraph von a	**Mathematische Formulierung**	**Physikalische Interpretation**
Der Punkt $(3 \mid -2)$ liegt auf dem Funktionsgraphen von a.	$a(3) = -2\,\mathrm{m/s^2}$	Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 3$ ist $-2\,\mathrm{m/s^2}$. Oder: Die Bremsverzögerung zum Zeitpunkt $t = 3$ ist $2\,\mathrm{m/s^2}$.
Mittlere Änderungsrate von a im Zeitintervall $[0; 7]$ = Steigung der Sekante im Zeitintervall $[0; 7]$	$\frac{a(7) - a(0)}{7 - 0} = \frac{4\,\mathrm{m/s^2}}{7\,\mathrm{s}} = 0{,}571\ldots\,\mathrm{m/s^3}$	Im Zeitintervall $[0; 7]$ wird die Beschleunigung pro Sekunde *durchschnittlich* um $0{,}571\ldots\,\mathrm{m/s^2}$ größer.
Der Funktionsgraph von a schließt mit der waagrechten Achse im Zeitintervall $[2; 7]$ eine orientierte Fläche mit Inhalt 8 ein.	$\int_2^7 a(t)\,\mathrm{d}t = v(t)\,\Big\|_2^7 = v(7) - v(2) = 8\,\mathrm{m/s}$	Im Zeitintervall $[2; 7]$ wird die Geschwindigkeit insgesamt um $8\,\mathrm{m/s}$ größer.
Der Funktionsgraph schneidet die waagrechte Achse an der Stelle $t = 2$.	$a(2) = 0\,\mathrm{m/s^2}$	Die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 2$ ist $0\,\mathrm{m/s^2}$.

Volumenstrom

Durch ein Wasserrohr fließt Wasser zu. Unter dem *Volumenstrom* versteht man jenes Wasservolumen, das pro Zeiteinheit zufließt. Der Volumenstrom (in Liter pro Stunde) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) wird durch die Funktion u beschrieben (siehe Abbildung).



a) Ermittle jene Wassermenge, die im Zeitintervall $[0; 6]$ zugeflossen ist.

b) Kennzeichne links jene Wassermenge, die im Zeitintervall $[14; 20]$ zugeflossen ist.

c) Erstelle eine Formel zur Berechnung jener Wassermenge, die am ersten Tag zugeflossen ist.

a) $6\,\text{h} \cdot 1000\,\text{L/h} = 6000\,\text{L}$ **c)** $\displaystyle\int_0^{24} u(t)\,\mathrm{d}t$

Bestimmtes Integral interpretieren

Tipps zur Interpretation von $A = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ in Anwendungsaufgaben:

1) Die Einheit von A ist die Einheit von $f(x)$ mal der Einheit von x.

2) Überlege dir zuerst eine Interpretation, wenn f eine *konstante* Funktion ist.

Arbeit

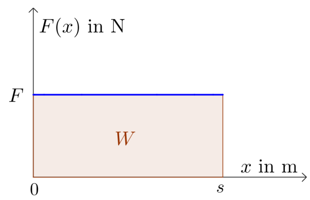
Wirkt auf einen Körper entlang einer Strecke mit Länge s eine *konstante* Kraft F in Wegrichtung, dann ist

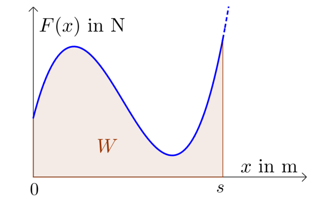
$$W = F \cdot s$$

die dabei verrichtete Arbeit (*W*ork).

Wenn die Kraft F von der Position x des Körpers abhängt, dann gilt für die in $[0; s]$ verrichtete **Arbeit $\boldsymbol{W}$**:

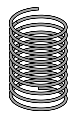
$$\boldsymbol{W = \int_0^s F(x)\,\mathrm{d}x}$$





Federspannarbeit

Beim Dehnen einer Feder hängt die Federkraft F von der Auslenkung x aus der Ruhelage ab. Es gilt $F(x) = D \cdot x$, wobei D eine federabhängige Konstante ist.



Eine Feder mit der Federkonstante $D = 0{,}6\,\text{N/cm}$ soll aus der Ruhelage um $5\,\text{cm}$ gedehnt werden.

1) Zeichne den Graphen der Funktion F rechts ein.

2) Berechne die verrichtete Federspannarbeit W. Stelle sie rechts dar.

$$W = \int_0^5 (D \cdot x)\,\mathrm{d}x = 7{,}5\ \text{N} \cdot \text{cm} = 0{,}075\,\text{J}$$

Joule ist die SI-Einheit der Arbeit: $1\,\text{J} = 1\,\text{N} \cdot \text{m}$