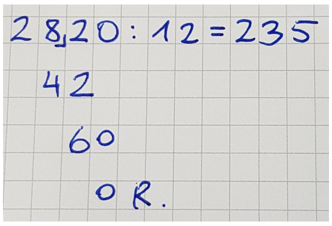
Algorithmus zur schriftlichen Division

Als Kinder haben wir die schriftliche Division so oder so ähnlich gelernt:



1) „Wie oft geht 12 in 28? 2 Mal. 4 Rest. 2 herab.“

2) „Wie oft geht 12 in 42? 3 Mal. 6 Rest. 0 herab.“

3) „Wie oft geht 12 in 60? 5 Mal. 0 Rest.“

Division ohne Rest

Was steckt eigentlich hinter diesem Divisions-Algorithmus?

$$
\begin{array}{l}
\quad\;\; € \qquad \text{Personen} \qquad € \text{ pro Person}\\
\;\; 2\,8\,2\,0 \,:\, 1\,2 \;=\; 2\,0\,0+3\,0+5 \;=\; 2\,3\,5\\
-\,2\,4\,0\,0\\
\hline
\quad\; 4\,2\,0\\
\;\;-\,3\,6\,0\\
\hline
\qquad 6\,0\\
\quad\;\; -\,6\,0\\
\hline
\qquad\; 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Ich möchte 2820 € fair auf 12 Personen aufteilen.

Im ersten Schritt kann ich jeder Person nicht nur 2 € geben, sondern 200 €. $12 \cdot 200\text{ €} = 24 \cdot 100\text{ €} = 2400\text{ €}$

Dann bleiben noch 420 € übrig. Also kann ich jeder Person weitere 30 € geben. $12 \cdot 30\text{ €} = 36 \cdot 10\text{ €} = 360\text{ €}$

Zum Schluss erhält jede Person noch $60 : 12 = 5$ €.

Insgesamt erhält jede Person also $200 + 30 + 5 = 235$ €.

Polynomdivision ohne Rest

Die **Polynomdivision** funktioniert nach dem gleichen Prinzip:

$$
\begin{array}{l}
\ominus\left\{\begin{array}{l}(8 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3) : (4 \cdot x + 1) = 2 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3\\ 8 \cdot x^3 + \;\; 2 \cdot x^2\end{array}\right.\\
\hline
\qquad \ominus\left\{\begin{array}{l}-\,20 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3\\ -\,20 \cdot x^2 - 5 \cdot x\end{array}\right.\\
\hline
\qquad\qquad \ominus\left\{\begin{array}{l}12 \cdot x + 3\\ 12 \cdot x + 3\end{array}\right.\\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

$$\frac{8 \cdot x^3}{4 \cdot x} \qquad \frac{-20 \cdot x^2}{4 \cdot x} \qquad \frac{12 \cdot x}{4 \cdot x}$$

Ermittle den Quotienten in jedem Schritt nur mit den „führenden Termen“:

$$\frac{8 \cdot x^3}{4 \cdot x} = 2 \cdot x^2$$

Im ersten Schritt wird also

$$(4 \cdot x + 1) \cdot 2 \cdot x^2 = 8 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2$$

verteilt. Übrig zum Aufteilen bleibt

$$
\begin{aligned}
&(8 \cdot x^3 - 18 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3) -\\
&-(8 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2) =\\
&= -\,20 \cdot x^2 + 7 \cdot x + 3
\end{aligned}
$$

Polynomdivision ohne Rest

Führe die Polynomdivision durch.

$$
\begin{array}{l}
\ominus\left\{\begin{array}{l}(6 \cdot x^4 - 19 \cdot x^3 + 26 \cdot x^2 - 19 \cdot x - 10) : (2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5) = 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x - 2\\ \;6 \cdot x^4 - \;\; 9 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2\end{array}\right.\\
\hline
\qquad \ominus\left\{\begin{array}{l}-\,10 \cdot x^3 + 11 \cdot x^2 - 19 \cdot x - 10\\ -\,10 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 - 25 \cdot x\end{array}\right.\\
\hline
\qquad\qquad \ominus\left\{\begin{array}{l}- \;\; 4 \cdot x^2 + \;\; 6 \cdot x - 10\\ - \;\; 4 \cdot x^2 + \;\; 6 \cdot x - 10\end{array}\right.\\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Division mit Rest

$$
\begin{array}{l}
\quad \color{blue}{€} \quad \color{red}{\text{Personen}} \quad \color{olive}{€ \text{ pro Person}} \\
\color{blue}{5\,5\,5} : \color{red}{1\,2} = \color{olive}{4\,0 + 6 + \tfrac{3}{12}} = \color{olive}{4\,6 + \tfrac{3}{12}} \\
-4\,8\,0 \\
\hline
\quad 7\,5 \\
\; -7\,2 \\
\hline
\qquad 3 \text{ Rest}
\end{array}
$$

Ich möchte 555 € fair auf 12 Personen aufteilen.

Im ersten Schritt kann ich jeder Person 40 € geben.

$12 \cdot 40\text{ €} = 48 \cdot 10\text{ €} = 480\text{ €}$

Von den verbleibenden 75 € kann ich jeder Person weitere 6 € geben. $12 \cdot 6\text{ €} = 72 \cdot 1\text{ €} = 72\text{ €}$

Zum Schluss teile ich die restlichen 3 € fair auf.
Jede Person erhält also noch $3\text{ €} : 12 = \frac{3\text{ €}}{12} = 0{,}25\text{ €}$.

Insgesamt erhält jede Person also $40 + 6 + \frac{3}{12} = 46{,}25\text{ €}$.

Polynomdivision mit Rest

Die **Polynomdivision** mit Rest funktioniert nach dem gleichen Prinzip:

$$
\begin{array}{l}
\ominus \left\{ \begin{array}{l} \color{blue}{(6 \cdot x^4 + 10 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 42 \cdot x - 10)} : \color{red}{(2 \cdot x^2 - 4)} = \color{olive}{3 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 1 + \dfrac{62 \cdot x - 6}{2 \cdot x^2 - 4}} \\ 6 \cdot x^4 \qquad\qquad - 12 \cdot x^2 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} 10 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 + 42 \cdot x - 10 \\ 10 \cdot x^3 \qquad\qquad - 20 \cdot x \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x^2 + 62 \cdot x - 10 \\ 2 \cdot x^2 \qquad\qquad - 4 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad\qquad 62 \cdot x - 6 \text{ Rest}
\end{array}
$$

$$\frac{\color{blue}{6 \cdot x^4}}{\color{red}{2 \cdot x^2}} \qquad \frac{10 \cdot x^3}{\color{red}{2 \cdot x^2}} \qquad \frac{2 \cdot x^2}{\color{red}{2 \cdot x^2}}$$

In jedem Schritt eliminieren wir den führenden Term vom Zählerpolynom.

$6 \cdot x^4$ im 1. Schritt, $10 \cdot x^3$ im 2. Schritt, $2 \cdot x^2$ im 3. Schritt.

Deshalb wird der Grad vom Zählerpolynom in jedem Schritt (mindestens) um 1 kleiner.
Sobald der Grad vom Zählerpolynom kleiner als der Grad vom Nennerpolynom ist,
brechen wir die Polynomdivision mit Rest ab. Der Rest wird fair aufgeteilt.

Polynomdivision mit Rest

Führe die Polynomdivision durch.

$$
\begin{array}{l}
\ominus \left\{ \begin{array}{l} (-4 \cdot x^4 + 18 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 22) : (x - 4) = -4 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 5 + \dfrac{42}{x - 4} \\ -4 \cdot x^4 + 16 \cdot x^3 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot x^3 - 11 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 22 \\ 2 \cdot x^3 - \ 8 \cdot x^2 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} - \ 3 \cdot x^2 + 17 \cdot x + 22 \\ - \ 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} 5 \cdot x + 22 \\ 5 \cdot x - 20 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 42 \text{ Rest}
\end{array}
$$