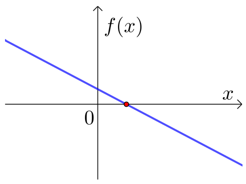
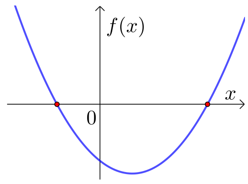
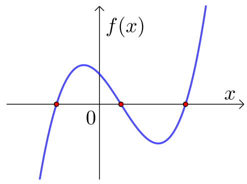
Polynomfunktionen

Polynomfunktion (Grad 1)	Polynomfunktion (Grad 2)	Polynomfunktion (Grad 3)
$f(x) = a_1 \cdot x + a_0$ $a_1 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$  $\square \leq$ Anzahl reeller Nullstellen $\leq \square$ Lineare Funktion mit Steigung $\neq 0$	$f(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ $a_2 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$  $\square \leq$ Anzahl reeller Nullstellen $\leq \square$ Quadratische Funktion	$f(x) = a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$ $a_3 \neq 0,\ a_i \in \mathbb{R}$  $\square \leq$ Anzahl reeller Nullstellen $\leq \square$ Kubische Funktion

Jede Funktion f mit

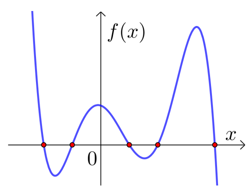
$$\boldsymbol{f(x) = a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0} \quad \text{mit} \quad n \geq 0,\ a_n \neq 0$$

heißt **Polynomfunktion**. Die reellen Zahlen $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ heißen **Koeffizienten**.

Der größte auftretende Exponent n heißt **Grad** der Polynomfunktion.

Der Grad einer Polynomfunktion gibt an, wie viele reelle Nullstellen sie *höchstens* haben kann.

Rechts ist der Graph einer Polynomfunktion vom Grad 5 dargestellt. Bei dieser Funktion sind alle 5 Nullstellen reelle Zahlen.



Mehr zu Nullstellen, die *keine* reellen Zahlen sind, findest du am Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen.

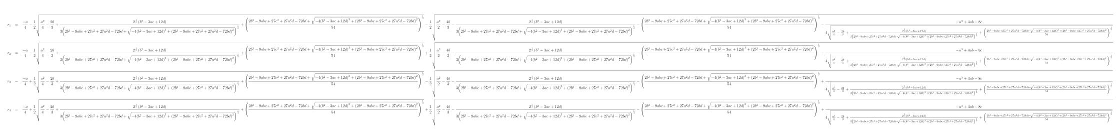
Polynomgleichungen lösen

1) Die Nullstelle jeder Polynomfunktion vom Grad 1 können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstelle der linearen Funktion f mit $f(x) = -2 \cdot x + 8$.

2) Die Nullstelle(n) jeder Polynomfunktion vom Grad 2 können wir systematisch berechnen.
Berechne die Nullstellen der quadratischen Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 16$.

Lösungsformeln

Seit etwa 500 Jahren kennt man Lösungsformeln für Polynomgleichungen vom Grad 3 bzw. Grad 4.



Seit etwa 200 Jahren ist bekannt, dass es ab Grad 5 keine allgemeine Lösungsformel geben kann.

Haben die Gleichungen besondere Strukturen, kann man sie trotzdem exakt lösen. Ansonsten kann man die Lösungen annähern.

Substitution

Die Polynomfunktion f mit $f(x) = x^6 - 7 \cdot x^3 - 8$ hat den Grad $\square$.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von f. Die zugehörige Gleichung

$$x^6 - 7 \cdot x^3 - 8 = 0$$

hat eine besondere Struktur, nämlich

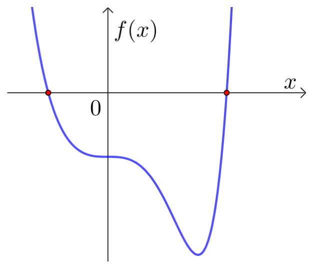
$$u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$$

mit $u = \square$. Löse diese quadratische Gleichung in u.

So eine Ersetzung heißt auch **Substitution**.

Die Gleichung $u^2 - 7 \cdot u - 8 = 0$ hat die 2 Lösungen $u_1 = \square$ und $u_2 = \square$.

Setze in $u = x^3$ ein, um die Nullstellen von f zu berechnen.



Die Polynomfunktion f hat also die reellen Nullstellen $\square$ und $\square$.

Produkt-Null-Satz

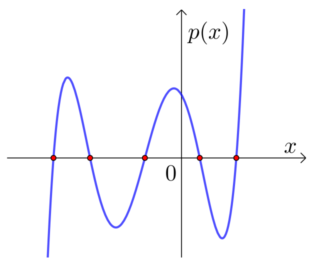
Die Polynomfunktion p mit $p(x) = 42 \cdot (x + 7) \cdot (x^2 - x - 6) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5)$ hat den Grad $\square$.

Gesucht sind alle reellen Nullstellen von p. Die zugehörige Gleichung hat eine besondere Struktur:

$$42 \cdot (x + 7) \cdot (x^2 + 4 \cdot x - 5) \cdot (x^2 - x - 6) = 0$$

Produkt-Null-Satz: *„Ein Produkt ist genau dann 0, wenn mindestens ein Faktor 0 ist.“*

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.



Die Polynomfunktion p hat also die reellen Nullstellen $\square$, $\square$, $\square$, $\square$ und $\square$.

Nullstelle 0

Die Polynomfunktion h mit $h(x) = 2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3$ hat den Grad $\square$.

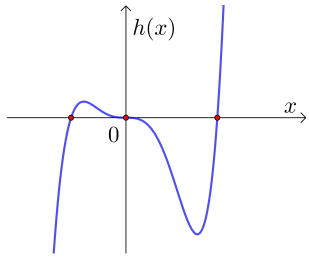
Gesucht sind alle reellen Nullstellen von h. Die zugehörige Gleichung

$$2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3 = 0$$

hat eine besondere Struktur, weil 0 eine Lösung ist. Wir können herausheben:

$$2 \cdot x^5 - 4 \cdot x^4 - 30 \cdot x^3 = x^{\square} \cdot \left(\square - \square - \square \right) = 0$$

Berechne damit alle Lösungen der Gleichung.



Die Polynomfunktion h hat also die reellen Nullstellen $\square$, $\square$ und $\square$.

Nullstellen → Gleichung

Stelle die Gleichung einer Polynomfunktion f auf, die genau die Nullstellen -7, 0 und 3 hat.

Hinweis: Verwende den Produkt-Null-Satz.

Zerlegung in Linearfaktoren

a) Die unten angegebene Polynomfunktion f vom Grad 3 hat die Nullstellen -5, -3 und $\frac{1}{2}$.
Ermittle ihre **Zerlegung in Linearfaktoren**.
Trage dazu Rechenzeichen und Zahlen richtig in die Kästchen ein.

$$f(x) = -2 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 - 22 \cdot x + 15 = \square \cdot \left(x \,\square\, \square\right) \cdot \left(x \,\square\, \square\right) \cdot \left(x \,\square\, \square\right)$$

b) Die unten angegebene Polynomfunktion g vom Grad 3 hat die Nullstellen 2, 3 und n.
Vervollständige mithilfe von n die Zerlegung in Linearfaktoren, und ermittle n.

$$g(x) = x^3 - 12 \cdot x^2 + 41 \cdot x - 42 = \square \cdot \left(x \,\square\, \square\right) \cdot \left(x \,\square\, \square\right) \cdot \left(x \,\square\, \square\right)$$

Teiler

Die Polynomfunktion f vom Grad 3 hat die Nullstellen x_1, x_2 und x_3.

$$f(x) = 2 \cdot x^3 + 2 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 30 = \boxed{} \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

Angenommen du weißt, dass alle 3 Nullstellen x_1, x_2 und x_3 ganze Zahlen sind.
Welche Nullstellen kommen wegen des Koeffizienten 30 dann nur mehr in Frage?

Ermittle aus diesen (endlich vielen) Möglichkeiten die 3 Nullstellen von f.

Abspaltung von Linearfaktoren

Gesucht sind die Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der folgenden Polynomfunktion f vom Grad 3:

$$f(x) = 8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42$$

1) Überprüfe, dass $x_1 = 2$ eine Nullstelle von f ist.

2) Zerlege in Linearfaktoren.

$$8 \cdot x^3 - 38 \cdot x^2 + 23 \cdot x + 42 = \boxed{} \cdot \left(x - \boxed{}\right) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0 \qquad (\star)$$

3) Dividiere $(\star)$ durch $(x - 2)$.

Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Polynomdivision.

$$\overset{(\star)}{\Longrightarrow} \quad 8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 8 \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

4) Berechne die Lösungen x_2 und x_3 der quadratischen Gleichung $8 \cdot x^2 - 22 \cdot x - 21 = 0$.

$$\Longrightarrow \quad f(x) = \boxed{} \cdot \left(x \, \square \, \boxed{}\right) \cdot \left(x \, \square \, \boxed{}\right) \cdot \left(x \, \square \, \boxed{}\right)$$