Quadratische Funktion – Polynomform

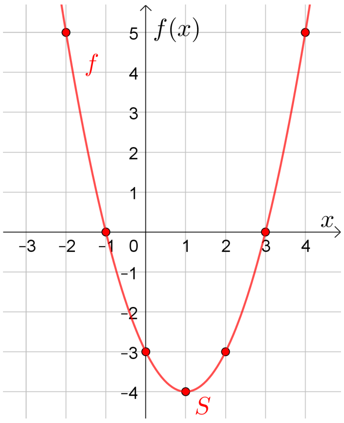
Jede Funktion f mit

$$\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c} \qquad \text{mit } a \neq 0$$

heißt **quadratische Funktion**.

Welchen Funktionstyp hätte f mit $a = 0$?

Parabel / Scheitelpunkt



Für die quadratische Funktion f gilt:

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x - 3$$

$(-2)^2 = (-2) \cdot (-2) = 4$
$-2^2 = -(2 \cdot 2) = -4$

Vervollständige die Wertetabelle der Funktion f.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	5	0	-3	-4	-3	0	5

Der Funktionsgraph ist eine sogenannte **Parabel**. Skizziere sie links.
Den Extrempunkt $(1 \mid -4)$ nennt man auch **Scheitelpunkt** der Parabel.

Minus mal minus

An welcher Stelle $x \in \mathbb{R}$ ist der Funktionswert $f(x)$ am *kleinsten*? Begründe deine Antwort.

a) $f(x) = x^2$ **b)** $f(x) = (x-3)^2$ **c)** $f(x) = 5 \cdot (x+4)^2 + 2$

a) An der Stelle $x = 0$ nimmt f den kleinsten Funktionswert $f(0) = 0$ an.
Begründung: Es gilt $x^2 \geq 0$ und $x^2 = 0$, falls $x = 0$ ist.

b) An der Stelle $x = 3$ nimmt f den kleinsten Funktionswert $f(3) = 0$ an.
Begründung: Es gilt $(x-3)^2 \geq 0$ und $(x-3)^2 = 0$, falls $x = 3$ ist.

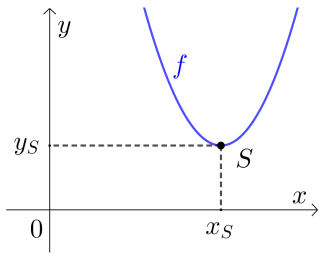
c) An der Stelle $x = -4$ nimmt f den kleinsten Funktionswert $f(-4) = 2$ an.
Begründung: Je kleiner ☺ ist, desto kleiner ist auch $5 \cdot ☺ + 2$.
Es gilt $(x+4)^2 \geq 0$ und $(x+4)^2 = 0$, falls $x = -4$ ist.

Quadratische Funktion – Scheitelpunktform

Jede quadratische Funktion kann auch in der sogenannten **Scheitelpunktform**

$$\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$$

angegeben werden. Erkläre anhand der Funktionsgleichung, warum der Funktionsgraph den **Scheitelpunkt** $\boldsymbol{S = (x_S \mid y_S)}$ hat.



Es gilt $(x - x_S)^2 \geq 0$ und $(x - x_S)^2 = 0$, falls $x = x_S$ ist.
$f(x_S) = a \cdot 0^2 + y_S = y_S$

Streiche jeweils so durch, dass eine wahre Aussage entsteht:

1) Wenn $a > 0$ ist, dann ist y_S der kleinste/~~größte~~ Funktionswert von f.
Die Parabel ist dann nach oben/~~unten~~ geöffnet.

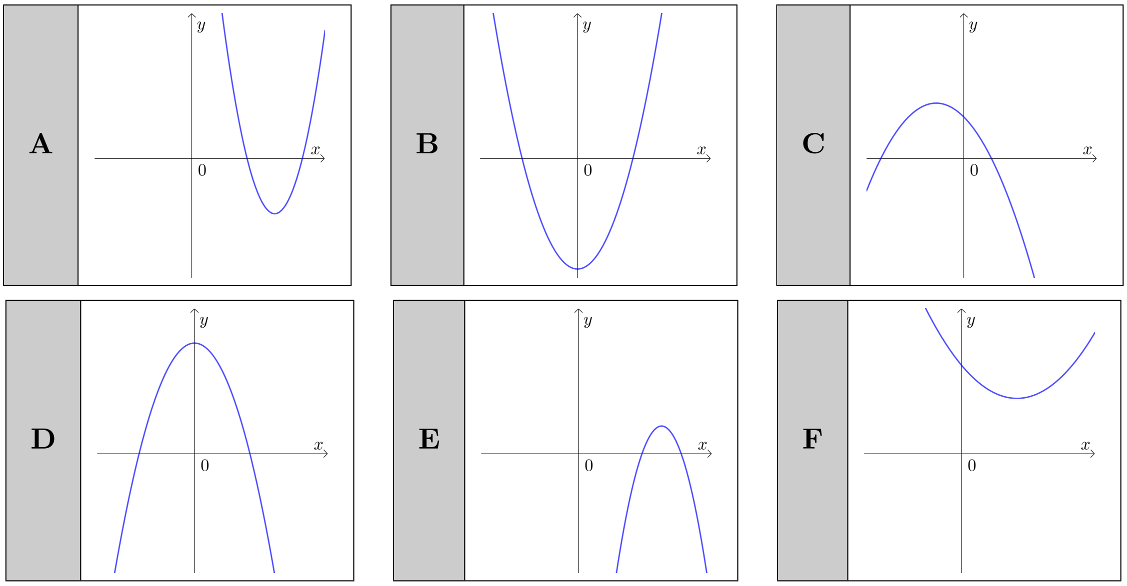
2) Wenn $a < 0$ ist, dann ist y_S der ~~kleinste~~/größte Funktionswert von f.
Die Parabel ist dann nach ~~oben~~/unten geöffnet.

3) Je größer $|a|$ ist, desto schmäler/~~breiter~~ ist die Parabel.

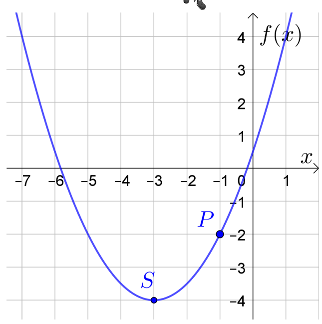
Scheitelpunktform → Funktionsgraph

Ordne den Funktionsgleichungen den entsprechenden Funktionsgraphen zu.

$f_1(x) = x^2 - 4$	B	$f_4(x) = -2 \cdot (x-3)^2 + 1$	E
$f_2(x) = 0{,}3 \cdot (x-2)^2 + 2$	F	$f_5(x) = -0{,}5 \cdot (x+1)^2 + 2$	C
$f_3(x) = 2 \cdot (x-3)^2 - 2$	A	$f_6(x) = -x^2 + 4$	D



Funktionsgraph → Scheitelpunktform



Rechts ist der Graph einer quadratischen Funktion f dargestellt.
Ermittle die Funktionsgleichung von f in Scheitelpunktform.

$f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

$S = (-3 \mid -4) \implies f(x) = a \cdot (x+3)^2 - 4$

$P = (-1 \mid -2) \implies f(-1) = -2 \implies a \cdot 2^2 - 4 = -2 \implies a = 0{,}5$

$\implies f(x) = 0{,}5 \cdot (x+3)^2 - 4$

Binomische Formeln

Erinnere dich an die Binomischen Formeln:

i) $(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b) = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$ **ii)** $(a-b)^2 = (a-b) \cdot (a-b) = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2$

Scheitelpunktform → Polynomform

Wandle die quadratische Funktion f mit Scheitelpunktform

$$f(x) = -3 \cdot (x-1)^2 - 4$$

in die **Polynomform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ um.

$$f(x) = -3 \cdot (x^2 - 2 \cdot x + 1) - 4 = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 7$$

Quadratisches Ergänzen

Beim **quadratischen Ergänzen** verwenden wir die Binomischen Formeln „rückwärts“.
Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind.

a) $x^2 + 6 \cdot x = (x+3)^2 - 9$

b) $x^2 - 8 \cdot x = (x-4)^2 - 16$

c) $x^2 + 5 \cdot x = \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

d) $x^2 + 4 \cdot x = (x+2)^2 - 4$

e) $x^2 - 6 \cdot x = (x-3)^2 - 9$

f) $x^2 - 7 \cdot x = \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$

Polynomform → Scheitelpunktform

Die **Polynomform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c}$ einer quadratischen Funktion f kannst du immer mit den gleichen Schritten in die **Scheitelpunktform** $\boldsymbol{f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S}$ umwandeln.

Führe die folgenden Schritte für die Funktion f mit $f(x) = 5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 3$ durch.

i) Beim Term $a \cdot x^2 + b \cdot x$ den Koeffizienten a herausheben:

$$f(x) = 5 \cdot [x^2 - 6 \cdot x] + 3$$

ii) Den Term $x^2 + \frac{b}{a} \cdot x$ in der Klammer quadratisch ergänzen:

$$f(x) = 5 \cdot \left[(x-3)^2 - 9\right] + 3$$

iii) Die äußere Klammer ausmultiplizieren und vereinfachen:

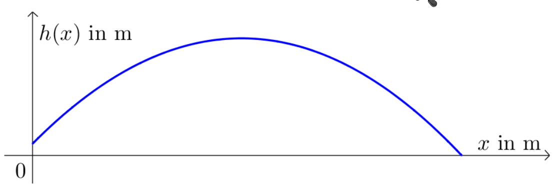
$$f(x) = 5 \cdot (x-3)^2 - 45 + 3 = 5 \cdot (x-3)^2 - 42$$

Die quadratische Funktion $f(x) = 5 \cdot x^2 - 30 \cdot x + 3$ hat also den Scheitelpunkt $S = (3 \mid -42)$.

Wurfparabel

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + b \cdot x + c$$



x ... horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
$h(x)$ ... Höhe über dem Boden an der Stelle x in m

Der Tennisball wird 40 cm über dem Boden abgeschlagen und trifft in 20 m horizontaler Entfernung von der Abschlagstelle am Boden auf.

1) Ermittle die Koeffizienten b und c.

2) Berechne den höchsten Punkt der Flugbahn.

1) $h(0) = 0{,}4 \implies c = 0{,}4$

$h(20) = 0 \implies -0{,}01 \cdot 20^2 + b \cdot 20 + 0{,}4 = 0 \implies b = 0{,}18$

2) $h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}18 \cdot x + 0{,}4 = -0{,}01 \cdot [x^2 - 18 \cdot x] + 0{,}4 =$

$= -0{,}01 \cdot [(x-9)^2 - 81] + 0{,}4 = -0{,}01 \cdot (x-9)^2 + 1{,}21$

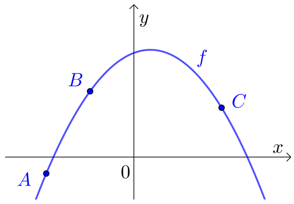
Der höchste Punkt der Flugkurve ist der Scheitelpunkt $(9\,\text{m} \mid 1{,}21\,\text{m})$.

3 Punkte → Quadratische Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

enthält die Punkte $A = (-4 \mid -6)$, $B = (-2 \mid 24)$ und $C = (4 \mid 18)$.
Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c auf.
Löse das Gleichungssystem und gib die Polynomform von f an.



$$\text{I}: \ f(-4) = -6 \implies 16 \cdot a - 4 \cdot b + c = -6$$

$$\text{II}: \ f(-2) = 24 \implies 4 \cdot a - 2 \cdot b + c = 24$$

$$\text{III}: \ f(4) = 18 \implies 16 \cdot a + 4 \cdot b + c = 18$$

Wir eliminieren c mithilfe von I:

$$\text{II}^* = \text{I} - \text{II}: \ 12 \cdot a - 2 \cdot b = -30$$

$$\text{III}^* = \text{I} - \text{III}: \ -8 \cdot b = -24 \implies b = 3$$

$$\overset{\text{II}^*}{\implies} 12 \cdot a - 2 \cdot 3 = -30 \implies a = -2$$

$$\overset{\text{I}}{\implies} c = -6 - 16 \cdot a + 4 \cdot b = 38$$

$$\implies f(x) = -2 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 38$$

Links, rechts, oben oder unten?

Wir können den Graphen jeder reellen Funktion f im Koordinatensystem beliebig verschieben:

$\boldsymbol{x \mapsto f(x) + d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach oben.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x) - d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach unten.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x + c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach links.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x - c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach rechts.

Mehr dazu findest du auf dem Arbeitsblatt – Verschiebung und Skalierung von Funktionsgraphen.

Scheitelpunktform grafisch erklärt

Der Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2$ ist $(0 \mid 0)$.

Der Graph von g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um x_S Einheiten nach rechts und um y_S Einheiten nach oben.

Der Scheitelpunkt von g ist dann also $S = (x_S \mid y_S)$.

Für die Funktionsgleichung von g gilt:

$$g(x) = f(x - x_S) + y_S = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$$