Quadratische Gleichungen

Jede Gleichung der Form

$$\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0} \qquad \text{mit } a \neq 0$$

ist eine **quadratische Gleichung**. Die Zahlen a, b und c sind die **Koeffizienten** der Gleichung.

Lösung ↔ Nullstelle

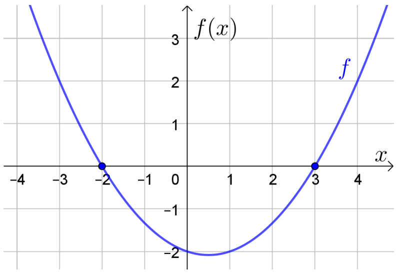
Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\boldsymbol{\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2 = 0} \qquad a = \tfrac{1}{3},\ b = -\tfrac{1}{3},\ c = -2$$

sollen ermittelt werden. Wir fassen die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm der quadratischen Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2$$

auf. Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

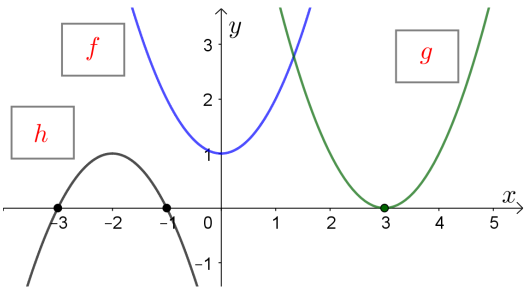


Die Lösungen der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{f(x) = 0}$ sind die Nullstellen von f.

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.

Wie viele reelle Lösungen kann eine quadratische Gleichung allgemein haben? 0, 1 oder 2

Wie viele Lösungen gibt es?



Für die Funktionen f, g und h gilt:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2 - 6 \cdot x + 9 = (x-3)^2$$

$$h(x) = -x^2 - 4 \cdot x - 3$$

Beschrifte links die Graphen dieser Funktionen.

Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat also keine Lösung in $\mathbb{R}$.

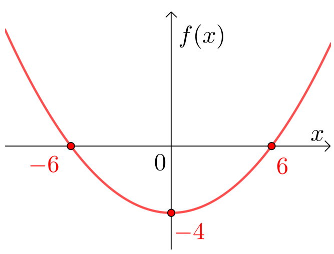
Die quadratische Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$ hat also eine Lösung in $\mathbb{R}$.

Die quadratische Gleichung $-x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0$ hat also zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

Spezialfall: $b = 0$

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $\frac{1}{9} \cdot x^2 - 4 = 0$.

$$\frac{1}{9} \cdot x^2 = 4 \iff x^2 = 36 \iff x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$



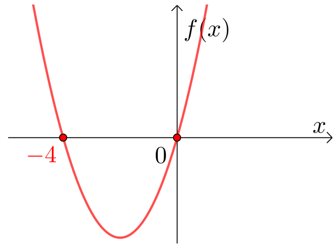
Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -6$ und $x_2 = 6$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^2 - 4$.

Spezialfall: $c = 0$

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ durch Herausheben von x.

$$x \cdot (3 \cdot x + 12) = 0 \iff$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot x + 12 = 0 \iff$$
$$x = 0 \quad \text{oder} \quad x = -4$$



Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 0$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x$.

Äquivalenzumformungen

Unten versucht Lukas die quadratische Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ anders zu lösen.
In welchem Rechenschritt ist ihm die zweite Lösung verloren gegangen?

$$\begin{aligned} 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x &= 0 && \mid -12 \cdot x \\ 3 \cdot x^2 &= -12 \cdot x && \mid :3 \\ x^2 &= -4 \cdot x && \mid :x \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Division durch x ist nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $x \neq 0$ gilt.
Bei der Division durch x geht die Lösung 0 verloren.

Sackgassen

Bei der quadratischen Gleichung $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ sind *alle* Koeffizienten ungleich 0.
Hier kommen wir mit unseren bisherigen Lösungsansätzen *nicht* weiter:

$$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 \iff x^2 = -2 \cdot x + 15 \iff x = \pm\sqrt{-2 \cdot x + 15} \iff \;!?$$

$$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 \iff x^2 + 2 \cdot x = 15 \iff x \cdot (x + 2) = 15 \iff \;!?$$

Quadratisches Ergänzen

Bei Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hilft quadratisches Ergänzen weiter.
Rechts unten sind die zielführenden Umformungen allgemein durchgeführt.
Führe links unten diese Umformungen für $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ durch.

$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$	$x^2 + p \cdot x + q = 0$
$x^2 + 2 \cdot x = 15$	$x^2 + p \cdot x = -q$
$(x+1)^2 - 1^2 = 15$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$
$(x+1)^2 = 16$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$x + 1 = \pm\sqrt{16}$	$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x = -1 \pm 4$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -5$ und $x_2 = 3$.

Kleine Lösungsformel

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{x^2 + p \cdot x + q = 0}$ kannst du auch direkt mit der **kleinen Lösungsformel** berechnen: $\boldsymbol{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

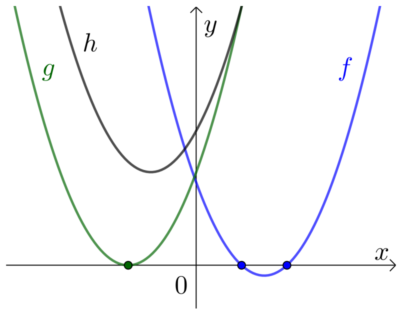
2, 1, 0

Versuche die Nullstellen der Funktionen f, g und h mit der kleinen Lösungsformel zu berechnen.

1) $\underbrace{x^2 - 6 \cdot x + 8}_{=f(x)} = 0$ $\quad p = -6 \quad q = 8$

2) $\underbrace{x^2 + 6 \cdot x + 9}_{=g(x)} = 0$ $\quad p = 6 \quad q = 9$

3) $\underbrace{x^2 + 4 \cdot x + 13}_{=h(x)} = 0$ $\quad p = 4 \quad q = 13$



1) $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1 \implies x_1 = 2,\ x_2 = 4$

2) $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9-9} = -3 \pm 0 \implies x_1 = x_2 = -3$

3) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-13} = -2 \pm \sqrt{-9} \implies$ keine Lösung in $\mathbb{R}$

Diskriminante

Die Anzahl der Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hängt von der **Diskriminante** $\boldsymbol{D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ ab.

1) Wenn $D > 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung zwei Lösungen in $\mathbb{R}$.

2) Wenn $D = 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung eine Lösung in $\mathbb{R}$.

3) Wenn $D < 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Normierung

Die Gleichung $4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 9 = 0$ können wir *nicht* direkt mit der kleinen Lösungsformel lösen. Dafür müssen wir zuerst die Gleichung durch den Koeffizienten $a = 4$ dividieren:

$$x^2 - 4 \cdot x - \frac{9}{4} = 0$$

Löse diese Gleichung durch quadratisches Ergänzen oder mit der kleinen Lösungsformel.

$$(x-2)^2 - 2^2 = \frac{9}{4} \iff x - 2 = \pm\sqrt{\frac{25}{4}} \iff x = 2 \pm \frac{5}{2} \iff x = -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad x = \frac{9}{2}$$

$$p = -4,\ q = -\frac{9}{4} \implies x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = 2 \pm \frac{5}{2} \implies x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{9}{2}$$

Große Lösungsformel

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $\boldsymbol{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$ kannst du auch direkt mit der **großen Lösungsformel** berechnen: $\boldsymbol{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}}$

Setze zur Herleitung der großen Lösungsformel die normierten Koeffizienten $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ in die kleine Lösungsformel ein.

Große Lösungsformel

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 = 16 \cdot x + 9$ mit der großen Lösungsformel.

$4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 9 = 0 \implies a = 4,\ b = -16,\ c = -9$

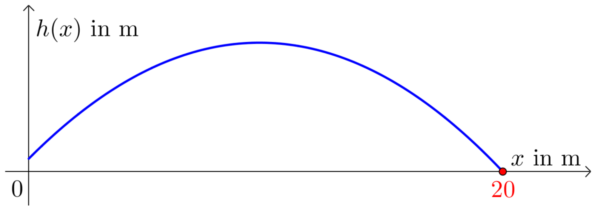
$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{8} = \frac{16 \pm 20}{8} \implies x_1 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2},\ x_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

Wurfparabel

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}18 \cdot x + 0{,}4$$

x … horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
$h(x)$ … Höhe über dem Boden an der Stelle x in m



Berechne den Aufprallpunkt am Boden.

$h(x) = 0$

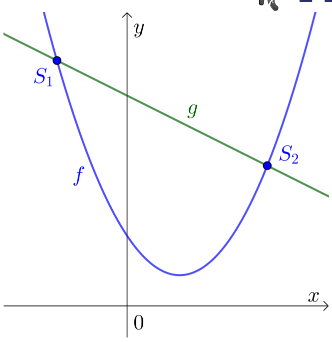
Große Lösungsformel: $a = -0{,}01,\ b = 0{,}18,\ c = 0{,}4$

$(x_1 = -2) \quad x_2 = 20$

Der Ball prallt im Punkt $(20\,\text{m} \mid 0\,\text{m})$ am Boden auf.

Sekante

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 0{,}5 \cdot x^2 - 1{,}5 \cdot x + 2$
Für die lineare Funktion g gilt: $g(x) = -0{,}5 \cdot x + 6$
Berechne die eingezeichneten Schnittpunkte S_1 und S_2.



Die

Schnittstellen sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$:

$$0{,}5 \cdot x^2 - 1{,}5 \cdot x + 2 = -0{,}5 \cdot x + 6$$
$$0{,}5 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 4 = 0$$

Große Lösungsformel: $a = 0{,}5,\ b = -1,\ c = -4$

$x_1 = -2,\ x_2 = 4$

$f(-2) = g(-2) = 7 \implies S_1 = (-2 \mid 7)$

$f(4) = g(4) = 4 \implies S_2 = (4 \mid 4)$