

Jede Gleichung der Form

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad \text{mit } a \neq 0$$

ist eine **quadratische Gleichung**. Die Zahlen a , b und c sind die **Koeffizienten** der Gleichung.

Lösung ↔ Nullstelle 

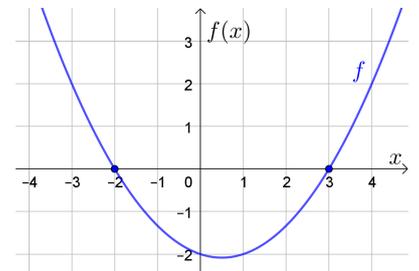
Die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$\frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2 = 0 \quad a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = -2$$

sollen ermittelt werden. Wir fassen die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm der **quadratischen Funktion** f mit

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x - 2$$

auf. Rechts ist der Funktionsgraph von f dargestellt.

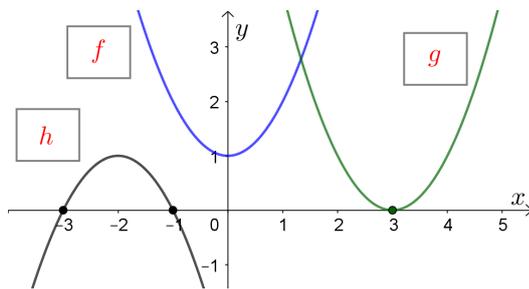


Die Lösungen der quadratischen Gleichung $f(x) = 0$ sind die **Nullstellen** von f .

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 3$.

Wie viele reelle Lösungen kann eine quadratische Gleichung allgemein haben? **0, 1 oder 2**

Wie viele Lösungen gibt es? 



Für die Funktionen f , g und h gilt:

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$g(x) = x^2 - 6 \cdot x + 9 = (x - 3)^2$$

$$h(x) = -x^2 - 4 \cdot x - 3$$

Beschrifte links die Graphen dieser Funktionen.

Die quadratische Gleichung $x^2 + 1 = 0$ hat also **keine** Lösung in \mathbb{R} .

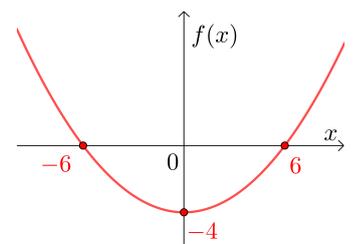
Die quadratische Gleichung $x^2 - 6 \cdot x + 9 = 0$ hat also **eine** Lösung in \mathbb{R} .

Die quadratische Gleichung $-x^2 - 4 \cdot x - 3 = 0$ hat also **zwei** Lösungen in \mathbb{R} .

Spezialfall: $b = 0$ 

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $\frac{1}{9} \cdot x^2 - 4 = 0$.

$$\frac{1}{9} \cdot x^2 = 4 \iff x^2 = 36 \iff x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$



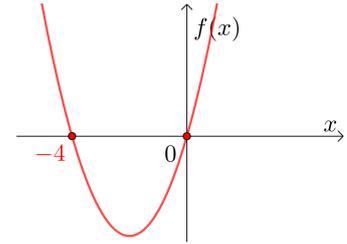
Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -6$ und $x_2 = 6$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^2 - 4$.

Spezialfall: $c = 0$ 

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ durch Herausheben von x .

$$\begin{aligned}
 x \cdot (3 \cdot x + 12) &= 0 && \iff \\
 x = 0 \quad \text{oder} \quad 3 \cdot x + 12 &= 0 && \iff \\
 x = 0 \quad \text{oder} \quad x &= -4
 \end{aligned}$$



Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -4$ und $x_2 = 0$.

Skizziere rechts oben den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot x^2 + 12 \cdot x$.

Äquivalenzumformungen  **MmF**

Unten versucht Lukas die quadratische Gleichung $3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$ anders zu lösen. In welchem Rechenschritt ist ihm die zweite Lösung verloren gegangen?

$3 \cdot x^2 + 12 \cdot x = 0$	$-12 \cdot x$	Division durch x ist nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $x \neq 0$ gilt. Bei der Division durch x geht die Lösung 0 verloren.
$3 \cdot x^2 = -12 \cdot x$: 3	
$x^2 = -4 \cdot x$: x	
$x = -4$		

Sackgassen  **MmF**

Bei der quadratischen Gleichung $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ sind *alle* Koeffizienten ungleich 0. Hier kommen wir mit unseren bisherigen Lösungsansätzen *nicht* weiter:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 &\iff x^2 = -2 \cdot x + 15 &\iff x = \pm\sqrt{-2 \cdot x + 15} &\iff \text{!?!} \\
 x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0 &\iff x^2 + 2 \cdot x = 15 &\iff x \cdot (x + 2) = 15 &\iff \text{!?!}
 \end{aligned}$$

Quadratisches Ergänzen  **MmF**

Bei Gleichungen der Form $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hilft **quadratisches Ergänzen** weiter. Rechts unten sind die zielführenden Umformungen allgemein durchgeführt. Führe links unten diese Umformungen für $x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$ durch.

$x^2 + 2 \cdot x - 15 = 0$	$x^2 + p \cdot x + q = 0$
$x^2 + 2 \cdot x = 15$	$x^2 + p \cdot x = -q$
$(x + 1)^2 - 1^2 = 15$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = -q$
$(x + 1)^2 = 16$	$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$
$x + 1 = \pm\sqrt{16}$	$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$
$x = -1 \pm 4$	$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Diese quadratische Gleichung hat also die zwei Lösungen $x_1 = -5$ und $x_2 = 3$.

Kleine Lösungsformel  **MmF**

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$ kannst du auch direkt

mit der **kleinen Lösungsformel** berechnen: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

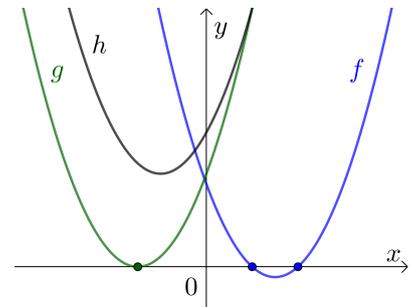
2, 1, 0  **MmF**

Versuche die Nullstellen der Funktionen f , g und h mit der kleinen Lösungsformel zu berechnen.

1) $\underbrace{x^2 - 6 \cdot x + 8 = 0}_{=f(x)} \quad p = -6 \quad q = 8$

2) $\underbrace{x^2 + 6 \cdot x + 9 = 0}_{=g(x)} \quad p = 6 \quad q = 9$

3) $\underbrace{x^2 + 4 \cdot x + 13 = 0}_{=h(x)} \quad p = 4 \quad q = 13$



1) $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9 - 8} = 3 \pm 1 \implies x_1 = 2, x_2 = 4$

2) $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \pm 0 \implies x_1 = x_2 = -3$

3) $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4 - 13} = -2 \pm \sqrt{-9} \implies \text{keine Lösung in } \mathbb{R}$

Diskriminante  **MmF**

Die Anzahl der Lösungen von $x^2 + p \cdot x + q = 0$ hängt von der **Diskriminante** $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ab.

- 1) Wenn $D > 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung **zwei** Lösungen in \mathbb{R} .
- 2) Wenn $D = 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung **eine** Lösung in \mathbb{R} .
- 3) Wenn $D < 0$ gilt, dann hat die quadratische Gleichung **keine** Lösung in \mathbb{R} .

Normierung  **MmF**

Die Gleichung $4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 9 = 0$ können wir *nicht* direkt mit der kleinen Lösungsformel lösen. Dafür müssen wir zuerst die Gleichung durch den Koeffizienten $a = 4$ dividieren:

$$x^2 - 4 \cdot x - \frac{9}{4} = 0$$

Löse diese Gleichung durch quadratisches Ergänzen oder mit der kleinen Lösungsformel.

$$(x - 2)^2 - 2^2 = \frac{9}{4} \iff x - 2 = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \iff x = 2 \pm \frac{5}{2} \iff x = -\frac{1}{2} \text{ oder } x = \frac{9}{2}$$

$$p = -4, q = -\frac{9}{4} \implies x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = 2 \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = 2 \pm \frac{5}{2} \implies x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{9}{2}$$

Große Lösungsformel  **MmF**

Die Lösung(en) der quadratischen Gleichung $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ kannst du auch direkt

mit der **großen Lösungsformel** berechnen: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$

★ Setze zur Herleitung der großen Lösungsformel die normierten Koeffizienten $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ in die kleine Lösungsformel ein.

Große Lösungsformel  **MmF**

Berechne die Lösungen der quadratischen Gleichung $4 \cdot x^2 = 16 \cdot x + 9$ mit der großen Lösungsformel.

$$4 \cdot x^2 - 16 \cdot x - 9 = 0 \implies a = 4, b = -16, c = -9$$

$$x_{1,2} = \frac{16 \pm \sqrt{256 + 144}}{8} = \frac{16 \pm 20}{8} \implies x_1 = \frac{36}{8} = \frac{9}{2}, x_2 = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Wurfparabel  **MmF**

Die Flugbahn eines Tennisballs wird durch den Graphen einer quadratischen Funktion h modelliert:

$$h(x) = -0,01 \cdot x^2 + 0,18 \cdot x + 0,4$$

$x \dots$ horizontal zurückgelegte Wegstrecke in m
 $h(x) \dots$ Höhe über dem Boden an der Stelle x in m

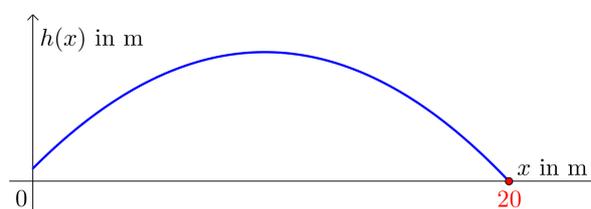
Berechne den Aufprallpunkt am Boden.

$$h(x) = 0$$

Große Lösungsformel: $a = -0,01, b = 0,18, c = 0,4$

$$(x_1 = -2) \quad x_2 = 20$$

Der Ball prallt im Punkt (20 m | 0 m) am Boden auf.

Sekante  **MmF**

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 0,5 \cdot x^2 - 1,5 \cdot x + 2$

Für die lineare Funktion g gilt: $g(x) = -0,5 \cdot x + 6$

Berechne die eingezeichneten **Schnittpunkte** S_1 und S_2 .

Schnittstellen sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$:

$$0,5 \cdot x^2 - 1,5 \cdot x + 2 = -0,5 \cdot x + 6$$

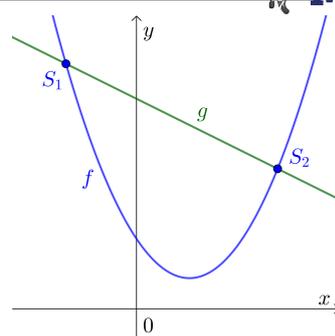
$$0,5 \cdot x^2 - 1 \cdot x - 4 = 0$$

Große Lösungsformel: $a = 0,5, b = -1, c = -4$

$$x_1 = -2, x_2 = 4$$

$$f(-2) = g(-2) = 7 \implies S_1 = (-2 | 7)$$

$$f(4) = g(4) = 4 \implies S_2 = (4 | 4)$$



Die

