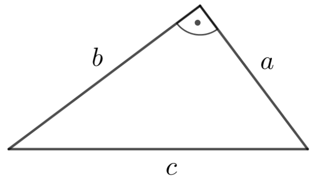
**Wozu Termrechnung?**

Vor mehr als 2000 Jahren schrieb Euklid sinngemäß:

*„Am rechtwinkeligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.“*

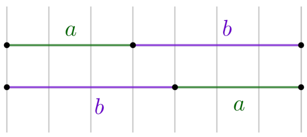
Mithilfe von Termen schreiben wir heutzutage kurz: $a^2 + b^2 = c^2$

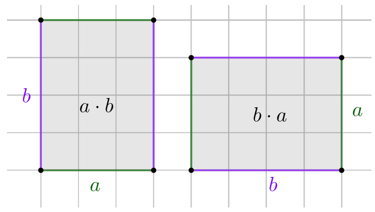



**Kommutativgesetze**

Für alle reellen Zahlen $a$, $b$ und $c$ gelten die **Kommutativgesetze**:

$\boldsymbol{a + b = b + a}$ und $\boldsymbol{a \cdot b = b \cdot a}$

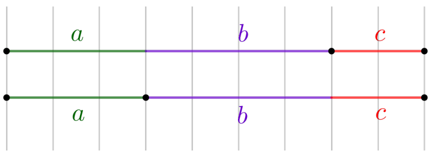


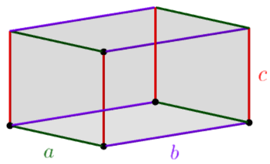



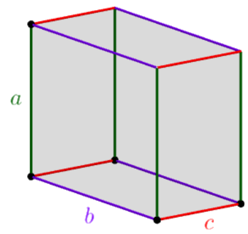

**Assoziativgesetze**

Für alle reellen Zahlen $a$ und $b$ gelten die **Assoziativgesetze**:

$\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$ und $\boldsymbol{(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)}$



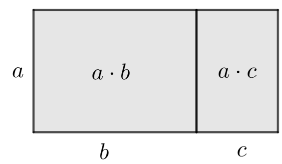




**Distributivgesetz**

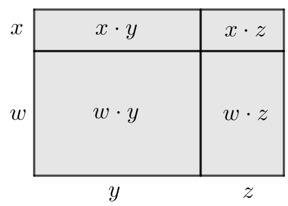
Für alle reellen Zahlen $a$, $b$ und $c$ gilt das **Distributivgesetz**:

$\boldsymbol{a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c}$




Daraus folgt noch allgemeiner für alle reellen Zahlen $w$, $x$, $y$ und $z$:

$\boldsymbol{(w + x) \cdot (y + z) = w \cdot y + w \cdot z + x \cdot y + x \cdot z}$




Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

**Koeffizienten**

Die Terme $7 \cdot x$ und $5 \cdot x$ sind – abgesehen von ihren **Koeffizienten** – gleich.

Wir können also ihre Summe bzw. Differenz mit dem Distributivgesetz berechnen:

$7 \cdot x + 5 \cdot x = (7 + 5) \cdot x = 12 \cdot x$ bzw. $7 \cdot x - 5 \cdot x = (7 - 5) \cdot x = 2 \cdot x$

**Terme – Addition und Subtraktion**

Vereinfache so weit wie möglich. Alle Rechenregeln für negative Zahlen gelten auch beim Rechnen mit Termen.

**a)** $7 \cdot x - 5 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y - 9 \cdot x + 2 \cdot y + 7 \cdot x \cdot y =$

$= -2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y$

**b)** $(x - 4 \cdot y) + (2 \cdot y - 5 \cdot x) - (7 \cdot x + 3 \cdot y) =$

$= x - 4 \cdot y + 2 \cdot y - 5 \cdot x - 7 \cdot x - 3 \cdot y = -11 \cdot x - 5 \cdot y$

**c)** $5 \cdot x - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y - y \cdot x + 7 \cdot x =$

$= 12 \cdot x - 7 \cdot x \cdot y$

**Ausmultiplizieren**

Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

**a)** $(a + b) \cdot (a + b) =$

$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$

**b)** $(a \cdot b) \cdot (a + b) =$

$= a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b = a^2 \cdot b + a \cdot b^2$

**c)** $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) =$

$= a \cdot b \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b^2$

**d)** $2 \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y) + 3 \cdot x \cdot (y - 4) =$

$= 8 \cdot x - 6 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x = -4 \cdot x - 6 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y$

**e)** $(4 \cdot x - 2 \cdot y) \cdot (3 + x) - 5 \cdot (x + 3 \cdot y) =$

$= 12 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 6 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x - 15 \cdot y = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 7 \cdot x - 21 \cdot y$

**f)** $-3 \cdot (x - 2 \cdot y + 5) - (x + 2) \cdot (y - 3) =$

$= -3 \cdot x + 6 \cdot y - 15 - (x \cdot y - 3 \cdot x + 2 \cdot y - 6) = -x \cdot y + 4 \cdot y - 9$

**Herausheben**

Trage Terme so in die Kästchen ein, dass beide Seiten äquivalent sind.

**a)** $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x = x \cdot \underbrace{(3 \cdot x - 5)}_{= (\frac{3 \cdot x^2}{x} - \frac{5 \cdot x}{x})}$

**b)** $x^4 + x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 + x - 1)$

**c)** $4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3)$

### Bruchterme kürzen

Kürze den Bruchterm so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für Brüche gelten auch für Bruchterme.

**a)** $\dfrac{10 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot z^2}{4 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z} = \dfrac{5 \cdot x^2 \cdot z}{2 \cdot y}$

**b)** $\dfrac{15 \cdot ☺^2}{6 \cdot ☺^5} = \dfrac{5}{2 \cdot ☺^3}$

**c)** $\dfrac{3 \cdot (4 \cdot x - 2)^3}{(4 \cdot x - 2)^2 \cdot 9} = \dfrac{4 \cdot x - 2}{3}$

**d)** $\dfrac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2}{6 \cdot x} = \dfrac{2 \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot x)}{6 \cdot x} = \dfrac{x^2 - 3 \cdot x}{3}$

### Zahlenrätsel

Suche dir deine Lieblingszahl aus und führe die folgenden Rechenschritte durch.
Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

**i)** Addiere 2 zu deiner Lieblingszahl.
**ii)** Multipliziere das Ergebnis mit 6.
**iii)** Subtrahiere 9 vom Ergebnis.
**iv)** Dividiere das Ergebnis durch 3.
**v)** Subtrahiere vom Ergebnis das Doppelte deiner Lieblingszahl.
**vi)** Addiere 41 zum Ergebnis.

| Lieblingszahl | | | | | | | | | | | | Ergebnis |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | i) | | ii) | | iii) | | iv) | | v) | | vi) | 42 |

Meine Lieblingszahl bei solchen Rätseln ist $x$. Führe die gleichen Rechenschritte wie vorher mit $x$ durch. Vereinfache nach jedem Schritt so weit wie möglich. Zeige, dass das Ergebnis hier immer 42 ist.

$$x \xrightarrow{+2} x+2 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \cdot x + 12 \xrightarrow{-9} 6 \cdot x + 3 \xrightarrow{:3} 2 \cdot x + 1 \xrightarrow{-2 \cdot x} 1 \xrightarrow{+41} 42 \checkmark$$

### Bruchterme – Multiplikation und Division

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und kürze so weit wie möglich.

**a)** $\dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y} \cdot (10 \cdot x \cdot y^2) = \dfrac{3 \cdot x \cdot 10 \cdot x \cdot y^2}{4 \cdot y} = \dfrac{15 \cdot x^2 \cdot y}{2}$

**b)** $\dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y} : (10 \cdot x \cdot y^2) = \dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y \cdot 10 \cdot x \cdot y^2} = \dfrac{3}{40 \cdot y^3}$

**c)** $(10 \cdot x \cdot y^2) : \dfrac{3 \cdot x}{4 \cdot y} = (10 \cdot x \cdot y^2) \cdot \dfrac{4 \cdot y}{3 \cdot x} = \dfrac{10 \cdot x \cdot y^2 \cdot 4 \cdot y}{3 \cdot x} = \dfrac{40 \cdot y^3}{3}$

**d)** $\dfrac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \dfrac{6 \cdot x}{y^2} = \dfrac{3 \cdot x \cdot y \cdot 6 \cdot x}{2 \cdot y^2} = \dfrac{9 \cdot x^2}{y}$

**e)** $\dfrac{3 \cdot x \cdot y}{2} : \dfrac{6 \cdot x}{y^2} = \dfrac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \dfrac{y^2}{6 \cdot x} = \dfrac{3 \cdot x \cdot y \cdot y^2}{2 \cdot 6 \cdot x} = \dfrac{y^3}{4}$

**Rechnen mit Einheiten**

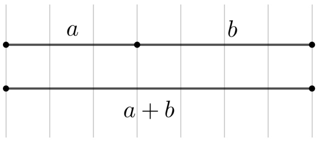
Wenn die Größen $a$ und $b$ jeweils die Einheit Zentimeter (cm) haben, dann hat die Größe ...

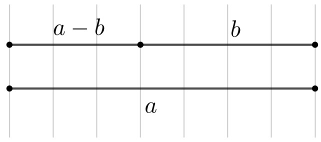
**1)** $a+b$ die Einheit $\mathrm{cm}$.

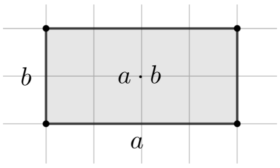
**2)** $a-b$ die Einheit $\mathrm{cm}$.

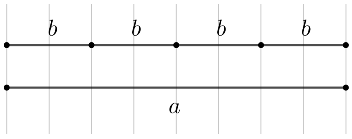
**3)** $a \cdot b$ die Einheit $\mathrm{cm}^2$.

**4)** $\dfrac{a}{b}$ die Einheit $1$.




**Rechnen mit Einheiten**

Eine Formel zur Berechnung von $x$ ist gegeben. Ermittle $[x]$, also die Einheit der Größe $x$.
Setze dazu die angegebenen Einheiten in die Formel ein, und vereinfache gegebenenfalls.
Alle in den Formeln vorkommenden Zahlen und die Konstante $\pi = 3{,}1415...$ haben jeweils die Einheit 1.

**a)** $x = \pi \cdot r^2$ mit $[r] = \mathrm{m}$ $\qquad [x] = 1 \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{m}^2$

**b)** $x = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$ mit $[a] = [b] = [c] = \mathrm{cm}$ $\qquad [x] = 1 \cdot \mathrm{cm} \cdot \mathrm{cm} = \mathrm{cm}^2$

**c)** $x = \rho \cdot V$ mit $[\rho] = \mathrm{g/cm}^3$ und $[V] = \mathrm{cm}^3$ $\qquad [x] = \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \cdot \mathrm{cm}^3 = \frac{\mathrm{g} \cdot \mathrm{cm}^3}{\mathrm{cm}^3} = \mathrm{g}$

**d)** $x = \dfrac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$ mit $[v_1] = [v_2] = \mathrm{m/s}$ und $[t_1] = [t_2] = \mathrm{s}$ $\qquad [x] = \frac{\mathrm{m/s}}{s} = \mathrm{m/s}^2$

**e)** $x = \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$ mit $[a] = \mathrm{m/s}^2$, $[v_0] = \mathrm{m/s}$ und $[t] = \mathrm{s}$ $\qquad [x] = 1 \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot \mathrm{s}^2 = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \mathrm{s} = \mathrm{m}$

**Versteckte Klammern**

Die beiden Terme $3 \cdot \dfrac{x+1}{2}$ und $\dfrac{3 \cdot x + 1}{2}$ sind *nicht* äquivalent. Zum Beispiel: $3 \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{3}{2}$ und $\frac{3 \cdot 0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$

Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt.
Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen beim Rechnen nicht darauf vergessen:

$$3 \cdot \frac{x+1}{2} = 3 \cdot \frac{(x+1)}{2} = \frac{3 \cdot (x+1)}{2} = \frac{3 \cdot x + 3}{2}$$

**Bruchterm ± Bruchterm (Gleicher Nenner)**

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

**a)** $\dfrac{2}{x} - \dfrac{5}{x} + \dfrac{3}{x} = \dfrac{2 - 5 + 3}{x} = \dfrac{0}{x} = 0$

**b)** $\dfrac{2 \cdot x - 3 \cdot y}{x \cdot y} - \dfrac{4 \cdot y + 2 \cdot x}{x \cdot y} = \dfrac{2 \cdot x - 3 \cdot y - (4 \cdot y + 2 \cdot x)}{x \cdot y} = \dfrac{-7 \cdot y}{x \cdot y} = \dfrac{-7}{x}$

**c)** $\dfrac{x+y}{x^2-1} - 2 \cdot \dfrac{x-y}{x^2-1} = \dfrac{x + y - 2 \cdot (x - y)}{x^2 - 1} = \dfrac{-x + 3 \cdot y}{x^2 - 1}$

**Bruch ± Bruch (Verschiedene Nenner)**

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

**a)** $\frac{4\cdot x-1}{2}-\frac{2\cdot x+3}{5}=\frac{5\cdot(4\cdot x-1)-2\cdot(2\cdot x+3)}{10}=\frac{20\cdot x-5-4\cdot x-6}{10}=\frac{16\cdot x-11}{10}$

**b)** $\frac{2\cdot x-y}{3}-\frac{x+y}{6}=\frac{2\cdot(2\cdot x-y)-(x+y)}{6}=\frac{4\cdot x-2\cdot y-x-y}{6}=$

$=\frac{3\cdot x-3\cdot y}{6}=\frac{3\cdot(x-y)}{6}=\frac{x-y}{2}$

**Bruchterm ± Bruchterm (Verschiedene Nenner)**

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

**a)** $\frac{2}{3}+\frac{4}{x}=\frac{2\cdot x}{3\cdot x}+\frac{12}{3\cdot x}=\frac{2\cdot x+12}{3\cdot x}$

**b)** $\frac{3}{x}-\frac{5}{y}=\frac{3\cdot y}{x\cdot y}-\frac{5\cdot x}{x\cdot y}=\frac{3\cdot y-5\cdot x}{x\cdot y}$

**c)** $\frac{4}{x+1}-\frac{2}{x}=\frac{4\cdot x}{(x+1)\cdot x}-\frac{2\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot x}=\frac{4\cdot x-2\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot x}=\frac{2\cdot x-2}{(x+1)\cdot x}$

**d)** $\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}=\frac{2\cdot x}{x^3}+\frac{3}{x^3}=\frac{2\cdot x+3}{x^3}$

**e)** $1+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2-1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}=\frac{x^2-1+1}{x^2-1}=\frac{x^2}{x^2-1}$

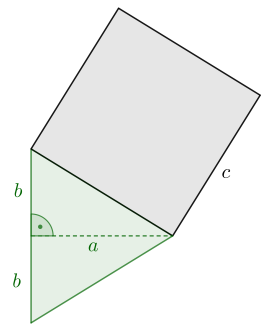
**f)** $\frac{3}{x\cdot(x-1)}-\frac{2}{x^2}=\frac{3\cdot x}{x^2\cdot(x-1)}-\frac{2\cdot(x-1)}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{3\cdot x-2\cdot(x-1)}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{x+2}{x^2\cdot(x-1)}$

**Goldener Schnitt**

Das rechts unten dargestellte Quadrat mit Seitenlänge $c$ hat den Flächeninhalt $F_Q$.
Das gleichschenkelige Dreieck mit Basis $2\cdot b$ und zugehöriger Höhe $a$ hat den Flächeninhalt $F_D$.

Es gilt $F_Q : F_D = \sqrt{5} : 1\,.$ Das Quadrat ist also $\sqrt{5} = 2{,}236\ldots$-Mal so groß wie das gleichschenkelige Dreieck.

Berechne: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=\frac{a^2}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}=\frac{a^2+b^2}{a\cdot b}=\frac{c^2}{a\cdot b}=\frac{F_Q}{F_D}=\sqrt{5}$




Das Verhältnis der Längen $a$ und $b$ ist in diesem Fall der Goldene Schnitt.