

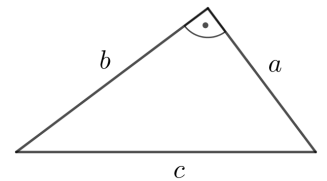
Wozu Termrechnung?



Vor mehr als 2000 Jahren schrieb **Euklid** sinngemäß:

„Am rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite den Quadraten über den den rechten Winkel umfassenden Seiten zusammen gleich.“

Mithilfe von Termen schreiben wir heutzutage kurz:  $a^2 + b^2 = c^2$



Kommutativgesetze

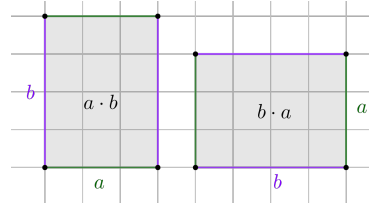
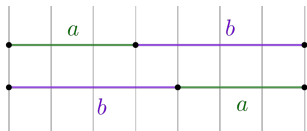


Für alle reellen Zahlen  $a$  und  $b$  gelten die **Kommutativgesetze**:

$$a + b = b + a$$

und

$$a \cdot b = b \cdot a$$



Assoziativgesetze

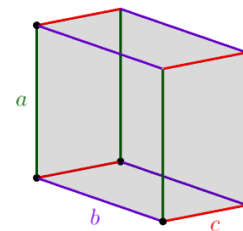
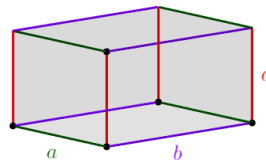
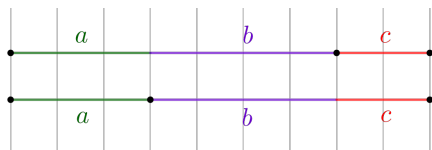


Für alle reellen Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gelten die **Assoziativgesetze**:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

und

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

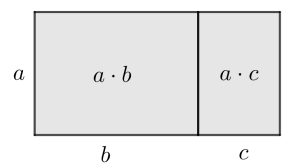


Distributivgesetz



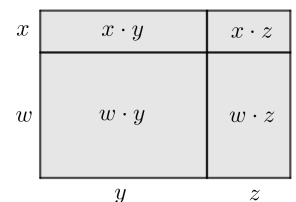
Für alle reellen Zahlen  $a$ ,  $b$  und  $c$  gilt das **Distributivgesetz**:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



Daraus folgt noch allgemeiner für alle reellen Zahlen  $w$ ,  $x$ ,  $y$  und  $z$ :

$$(w + x) \cdot (y + z) = w \cdot y + w \cdot z + x \cdot y + x \cdot z$$



Jeder Summand der ersten Klammer wird mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Koeffizienten



Die Terme  $7 \cdot x$  und  $5 \cdot x$  sind – abgesehen von ihren **Koeffizienten** – gleich.

Wir können also ihre Summe bzw. Differenz mit dem Distributivgesetz berechnen:

$$7 \cdot x + 5 \cdot x = (7 + 5) \cdot x = 12 \cdot x \quad \text{bzw.} \quad 7 \cdot x - 5 \cdot x = (7 - 5) \cdot x = 2 \cdot x$$

Terme – Addition und Subtraktion 

Vereinfache so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für **negative Zahlen** gelten auch beim Rechnen mit Termen.

a)  $7 \cdot x - 5 \cdot y - 4 \cdot x \cdot y - 9 \cdot x + 2 \cdot y + 7 \cdot x \cdot y =$


$$= -2 \cdot x - 3 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y$$

b)  $(x - 4 \cdot y) + (2 \cdot y - 5 \cdot x) - (7 \cdot x + 3 \cdot y) =$

$$= x - 4 \cdot y + 2 \cdot y - 5 \cdot x - 7 \cdot x - 3 \cdot y = -11 \cdot x - 5 \cdot y$$

c)  $5 \cdot x - 2 \cdot x \cdot 3 \cdot y - y \cdot x + 7 \cdot x =$

$$= 12 \cdot x - 7 \cdot x \cdot y$$

Ausmultiplizieren 

Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

a)  $(a + b) \cdot (a + b) =$

$$= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$$

b)  $(a \cdot b) \cdot (a + b) =$

$$= a \cdot b \cdot a + a \cdot b \cdot b = a^2 \cdot b + a \cdot b^2$$

c)  $(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) =$

$$= a \cdot b \cdot a \cdot b = a^2 \cdot b^2$$

d)  $2 \cdot (4 \cdot x - 3 \cdot y) + 3 \cdot x \cdot (y - 4) =$

$$= 8 \cdot x - 6 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y - 12 \cdot x = -4 \cdot x - 6 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y$$

e)  $(4 \cdot x - 2 \cdot y) \cdot (3 + x) - 5 \cdot (x + 3 \cdot y) =$

$$= 12 \cdot x + 4 \cdot x^2 - 6 \cdot y - 2 \cdot x \cdot y - 5 \cdot x - 15 \cdot y = 4 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y + 7 \cdot x - 21 \cdot y$$

f)  $-3 \cdot (x - 2 \cdot y + 5) - (x + 2) \cdot (y - 3) =$

$$= -3 \cdot x + 6 \cdot y - 15 - (x \cdot y - 3 \cdot x + 2 \cdot y - 6) = -x \cdot y + 4 \cdot y - 9$$


Herausheben 

Trage Terme so in die Kästchen ein, dass beide Seiten äquivalent sind.

a)  $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x = x \cdot \underbrace{(3 \cdot x - 5)}_{= \left(\frac{3 \cdot x^2}{x} - \frac{5 \cdot x}{x}\right)}$

b)  $x^4 + x^3 - x^2 = x^2 \cdot (x^2 + x - 1)$

c)  $4 \cdot x^3 - 8 \cdot x^2 + 6 \cdot x = 2 \cdot x \cdot (2 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 3)$

Bruchterme kürzen 

Kürze den Bruchterm so weit wie möglich.

Alle Rechenregeln für Brüche gelten auch für Bruchterme.

a)  $\frac{10 \cdot x^5 \cdot y^2 \cdot z^2}{4 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z} = \frac{5 \cdot x^2 \cdot z}{2 \cdot y}$

c)  $\frac{3 \cdot (4 \cdot x - 2)^3}{(4 \cdot x - 2)^2 \cdot 9} = \frac{4 \cdot x - 2}{3}$

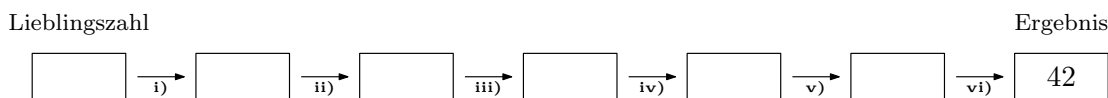
b)  $\frac{15 \cdot \ominus^2}{6 \cdot \ominus^5} = \frac{5}{2 \cdot \ominus^3}$

d)  $\frac{2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2}{6 \cdot x} = \frac{2 \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot x)}{6 \cdot x} = \frac{x^2 - 3 \cdot x}{3}$

Zahlenrätsel 


Suche dir deine Lieblingszahl aus und führe die folgenden Rechenschritte durch. Trage die Zwischenergebnisse in die Kästchen unten ein.

- i) Addiere 2 zu deiner Lieblingszahl.
- ii) Multipliziere das Ergebnis mit 6.
- iii) Subtrahiere 9 vom Ergebnis.
- iv) Dividiere das Ergebnis durch 3.
- v) Subtrahiere vom Ergebnis das Doppelte deiner Lieblingszahl.
- vi) Addiere 41 zum Ergebnis.



Meine Lieblingszahl bei solchen Rätseln ist  $x$ . Führe die gleichen Rechenschritte wie vorher mit  $x$  durch. Vereinfache nach jedem Schritt so weit wie möglich. Zeige, dass das Ergebnis hier immer 42 ist.

$$x \xrightarrow{+2} x + 2 \xrightarrow{\cdot 6} 6 \cdot x + 12 \xrightarrow{-9} 6 \cdot x + 3 \xrightarrow{:3} 2 \cdot x + 1 \xrightarrow{-2 \cdot x} 1 \xrightarrow{+41} 42 \checkmark$$

Bruchterme – Multiplikation und Division 

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und kürze so weit wie möglich.

a)  $\frac{3 \cdot x}{4 \cdot y} \cdot (10 \cdot x \cdot y^2) = \frac{3 \cdot x \cdot 10 \cdot x \cdot y^2}{4 \cdot y} = \frac{15 \cdot x^2 \cdot y}{2}$

b)  $\frac{3 \cdot x}{4 \cdot y} : (10 \cdot x \cdot y^2) = \frac{3 \cdot x}{4 \cdot y \cdot 10 \cdot x \cdot y^2} = \frac{3}{40 \cdot y^3}$

c)  $(10 \cdot x \cdot y^2) : \frac{3 \cdot x}{4 \cdot y} = (10 \cdot x \cdot y^2) \cdot \frac{4 \cdot y}{3 \cdot x} = \frac{10 \cdot x \cdot y^2 \cdot 4 \cdot y}{3 \cdot x} = \frac{40 \cdot y^3}{3}$

d)  $\frac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \frac{6 \cdot x}{y^2} = \frac{3 \cdot x \cdot y \cdot 6 \cdot x}{2 \cdot y^2} = \frac{9 \cdot x^2}{y}$

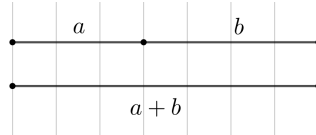
e)  $\frac{3 \cdot x \cdot y}{2} : \frac{6 \cdot x}{y^2} = \frac{3 \cdot x \cdot y}{2} \cdot \frac{y^2}{6 \cdot x} = \frac{3 \cdot x \cdot y \cdot y^2}{2 \cdot 6 \cdot x} = \frac{y^3}{4}$

Rechnen mit Einheiten

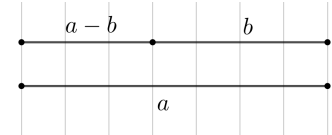


Wenn die Größen  $a$  und  $b$  jeweils die **Einheit** Zentimeter (cm) haben, dann hat die Größe ...

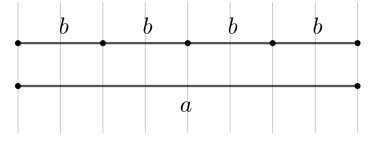
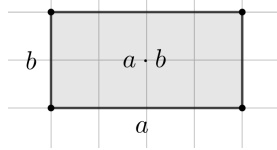
1)  $a + b$  die Einheit **cm**.



2)  $a - b$  die Einheit **cm**.



3)  $a \cdot b$  die Einheit **cm<sup>2</sup>**.



4)  $\frac{a}{b}$  die Einheit **1**.

Rechnen mit Einheiten



Eine Formel zur Berechnung von  $x$  ist gegeben. Ermittle  $[x]$ , also die Einheit der Größe  $x$ .

Setze dazu die angegebenen Einheiten in die Formel ein, und vereinfache gegebenenfalls.

Alle in den Formeln vorkommenden Zahlen und die Konstante  $\pi = 3,1415\dots$  haben jeweils die Einheit 1.

a)  $x = \pi \cdot r^2$  mit  $[r] = \text{m}$

$[x] = 1 \cdot \text{m}^2 = \text{m}^2$

b)  $x = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$  mit  $[a] = [b] = [c] = \text{cm}$

$[x] = 1 \cdot \text{cm} \cdot \text{cm} = \text{cm}^2$

c)  $x = \rho \cdot V$  mit  $[\rho] = \text{g/cm}^3$  und  $[V] = \text{cm}^3$

$[x] = \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \cdot \text{cm}^3 = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^3}{\text{cm}^3} = \text{g}$

d)  $x = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$  mit  $[v_1] = [v_2] = \text{m/s}$  und  $[t_1] = [t_2] = \text{s}$

$[x] = \frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \text{m/s}^2$

e)  $x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 + v_0 \cdot t$  mit  $[a] = \text{m/s}^2$ ,  $[v_0] = \text{m/s}$  und  $[t] = \text{s}$

$[x] = 1 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{s}^2 = \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \text{s} = \text{m}$

Versteckte Klammern



Die beiden Terme  $3 \cdot \frac{x+1}{2}$  und  $\frac{3 \cdot x+1}{2}$  sind *nicht* äquivalent. Zum Beispiel:  $3 \cdot \frac{0+1}{2} = \frac{3}{2}$  und  $\frac{3 \cdot 0+1}{2} = \frac{1}{2}$

Bei jedem Bruch sind Zähler und Nenner jeweils in Klammern gesetzt.

Wir müssen diese Klammern nicht anschreiben, aber dürfen beim Rechnen nicht darauf vergessen:

$$3 \cdot \frac{x+1}{2} = 3 \cdot \frac{(x+1)}{2} = \frac{3 \cdot (x+1)}{2} = \frac{3 \cdot x + 3}{2}$$

Bruchterm  $\pm$  Bruchterm (Gleicher Nenner)



Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

a)  $\frac{2}{x} - \frac{5}{x} + \frac{3}{x} = \frac{2-5+3}{x} = \frac{0}{x} = 0$

b)  $\frac{2 \cdot x - 3 \cdot y}{x \cdot y} - \frac{4 \cdot y + 2 \cdot x}{x \cdot y} = \frac{2 \cdot x - 3 \cdot y - (4 \cdot y + 2 \cdot x)}{x \cdot y} = \frac{-7 \cdot y}{x \cdot y} = \frac{-7}{x}$

c)  $\frac{x+y}{x^2-1} - 2 \cdot \frac{x-y}{x^2-1} = \frac{x+y-2 \cdot (x-y)}{x^2-1} = \frac{-x+3 \cdot y}{x^2-1}$

Bruch  $\pm$  Bruch (Verschiedene Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

$$\text{a) } \frac{4 \cdot x - 1}{2} - \frac{2 \cdot x + 3}{5} = \frac{5 \cdot (4 \cdot x - 1) - 2 \cdot (2 \cdot x + 3)}{10} = \frac{20 \cdot x - 5 - 4 \cdot x - 6}{10} = \frac{16 \cdot x - 11}{10}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{2 \cdot x - y}{3} - \frac{x + y}{6} &= \frac{2 \cdot (2 \cdot x - y) - (x + y)}{6} = \frac{4 \cdot x - 2 \cdot y - x - y}{6} = \\ &= \frac{3 \cdot x - 3 \cdot y}{6} = \frac{3 \cdot (x - y)}{6} = \frac{x - y}{2} \end{aligned}$$

Bruchterm  $\pm$  Bruchterm (Verschiedene Nenner)

Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch und vereinfache so weit wie möglich.

$$\text{a) } \frac{2}{3} + \frac{4}{x} = \frac{2 \cdot x}{3 \cdot x} + \frac{12}{3 \cdot x} = \frac{2 \cdot x + 12}{3 \cdot x}$$

$$\text{b) } \frac{3}{x} - \frac{5}{y} = \frac{3 \cdot y}{x \cdot y} - \frac{5 \cdot x}{x \cdot y} = \frac{3 \cdot y - 5 \cdot x}{x \cdot y}$$

$$\text{c) } \frac{4}{x+1} - \frac{2}{x} = \frac{4 \cdot x}{(x+1) \cdot x} - \frac{2 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot x} = \frac{4 \cdot x - 2 \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot x} = \frac{2 \cdot x - 2}{(x+1) \cdot x}$$

$$\text{d) } \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} = \frac{2 \cdot x}{x^3} + \frac{3}{x^3} = \frac{2 \cdot x + 3}{x^3}$$

$$\text{e) } 1 + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x^2 - 1} = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

$$\text{f) } \frac{3}{x \cdot (x-1)} - \frac{2}{x^2} = \frac{3 \cdot x}{x^2 \cdot (x-1)} - \frac{2 \cdot (x-1)}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{3 \cdot x - 2 \cdot (x-1)}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{x+2}{x^2 \cdot (x-1)}$$

## Goldener Schnitt



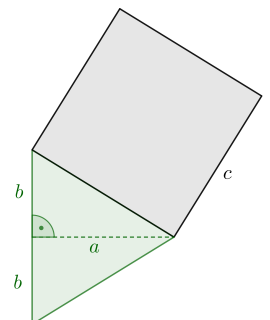
Das rechts unten dargestellte Quadrat mit Seitenlänge  $c$  hat den Flächeninhalt  $F_Q$ .

Das gleichschenkelige Dreieck mit Basis  $2 \cdot b$  und zugehöriger Höhe  $a$  hat den Flächeninhalt  $F_D$ .

Es gilt  $F_Q : F_D = \sqrt{5} : 1$ .

Das Quadrat ist also  $\sqrt{5} = 2,236\dots$ -Mal so groß wie das gleichschenkelige Dreieck.

$$\text{Berechne: } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2}{a \cdot b} + \frac{b^2}{a \cdot b} = \frac{a^2 + b^2}{a \cdot b} = \frac{c^2}{a \cdot b} = \frac{F_Q}{F_D} = \sqrt{5}$$



Das Verhältnis der Längen  $a$  und  $b$  ist in diesem Fall der **Goldene Schnitt**.

