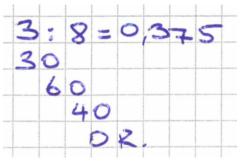
Rationale Zahlen

Jede rationale Zahl kann man als Bruch $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und $b \neq 0$ schreiben.
Um einen Bruch in eine Dezimalzahl umzuwandeln, führen wir die Division durch.
Bei der Berechnung der Nachkommastellen tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

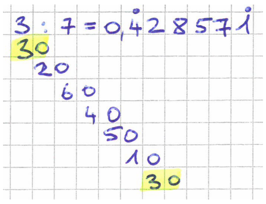
Fall 1: Nach einem Rechenschritt bleibt 0 Rest.



In diesem Fall hat die Dezimalzahl nur endlich viele Nachkommastellen $\neq 0$.

$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

Fall 2: Es bleibt niemals 0 Rest.



Dann gibt es bei der Division durch 7 nur mehr 6 mögliche Reste,
nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6.
Spätestens bei der 7. Nachkommastelle muss sich also ein Rest wiederholen.
In diesem Fall ist die Dezimalzahl periodisch.

$$\frac{3}{7} = 0{,}\dot{4}2857\dot{1} = 0{,}428571|428571|428571|\ldots$$

Es gilt auch die Umkehrung:

1) Jede Dezimalzahl mit endlich vielen Nachkommastellen $\neq 0$ ist eine rationale Zahl.

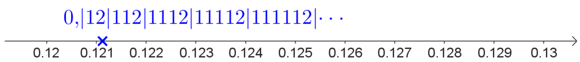
Schreibe die Dezimalzahl als Bruch: $42{,}23 = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$

2) Jede periodische Dezimalzahl ist eine rationale Zahl. Zum Beispiel gilt für $0{,}\dot{4}\dot{2}$:

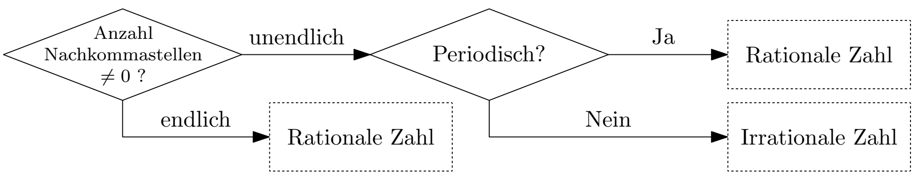
$$\underbrace{100 \cdot 0{,}\dot{4}\dot{2}}_{=42{,}4242\ldots} = \underbrace{42 + 0{,}\dot{4}\dot{2}}_{=42{,}4242\ldots} \implies 99 \cdot 0{,}\dot{4}\dot{2} = 42 \implies 0{,}\dot{4}\dot{2} = \frac{42}{99}$$

Irrationale Zahlen

Die Dezimalzahl $0,|12|112|1112|11112|111112|\cdots$
liegt zwischen 0,12 und 0,13 auf der Zahlengerade.



Sie hat unendlich viele Nachkommastellen $\neq 0$ und ist *nicht* periodisch.
Man kann sie also *nicht* als Bruch $\frac{a}{b}$ mit ganzen Zahlen a und $b \neq 0$ schreiben.
Zahlen mit dieser Eigenschaft heißen **irrationale Zahlen**:



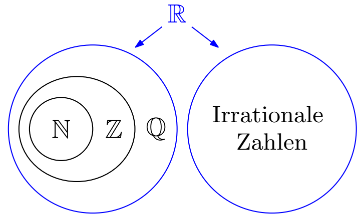
Man kann zeigen, dass zum Beispiel die folgenden Zahlen irrational sind:

- Kreiszahl: $\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716 9\cdots$ Erster Beweis im 18. Jhdt.
- Eulersche Zahl: $e = 2{,}7182818284590452353602874713526624977572 47\cdots$ Erster Beweis im 18. Jhdt.
- $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980785696 71\cdots$ Erster Beweis vor mehr als 2000 Jahren.
- $\sqrt{3} = 1{,}7320508075688772935274463415058723669428 05\cdots$ Erster Beweis vor mehr als 2000 Jahren.
- $0,|1|2|3|4|5|6|7|8|9|10|11|12|13|14|15|16|17|18|19|20|21|\cdots$ Findest du eine Begründung?

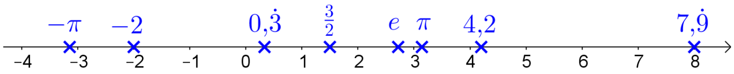
Tatsächlich gibt es unendlich viele irrationale Zahlen.

Reelle Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und
die Menge der irrationalen Zahlen bilden zusammen
die Menge der **reellen Zahlen** $\mathbb{R}$.



Wenn man *alle* reellen Zahlen auf der Zahlengerade einträgt, dann ist sie lückenlos gefüllt.



Zahlenbereiche

Kreuze jeweils alle Zahlenbereiche an, in denen die Zahl enthalten ist.

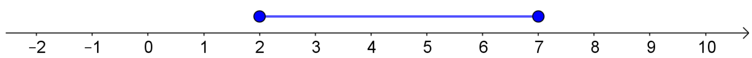
	$4{,}2$	$\sqrt{5}$	-3	87	$-\frac{1}{3}$	$\sqrt{36}$	$2 \cdot \pi$	$\frac{1}{\sqrt{4}}$	$7{,}5\dot{8}$
$\mathbb{N}$									
$\mathbb{Z}$									
$\mathbb{Q}$									
$\mathbb{R}$									

Intervall

Ein **Intervall** ist eine zusammenhängende Teilmenge der reellen Zahlen.

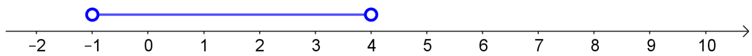
1) Abgeschlossenes Intervall: $[2; 7]$

Alle reellen Zahlen, die sowohl ≥ 2 als auch ≤ 7 sind.



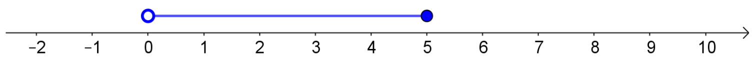
2) Offenes Intervall: $]-1; 4[$ bzw. $(-1; 4)$

Alle reellen Zahlen, die sowohl > -1 als auch < 4 sind.



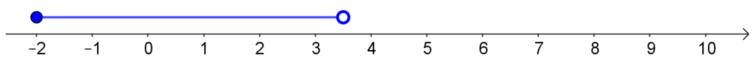
3) Linksoffenes Intervall: $]0; 5]$ bzw. $(0; 5]$

Alle reellen Zahlen, die sowohl > 0 als auch ≤ 5 sind.



4) Rechtsoffenes Intervall: $[-2; \frac{7}{2}[$ bzw. $[-2; \frac{7}{2})$

Alle reellen Zahlen, die sowohl ≥ -2 als auch $< \frac{7}{2}$ sind.



5) Unbeschränkte Intervalle: $]1; \infty[$ bzw. $(1; \infty)$ — Alle reellen Zahlen, die > 1 sind.

$]-\infty; 4]$ bzw. $(-\infty; 4]$ — Alle reellen Zahlen, die ≤ 4 sind.

Intervall

Welche der folgenden Zahlen sind im Intervall $[-4; 5[$ enthalten? Kreuze an.

$-4{,}2$	$4{,}2$	-4	5	$\frac{9}{2}$	$\sqrt{15}$	$-1{,}\dot{2}\dot{3}$	$2 \cdot \pi$
☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐