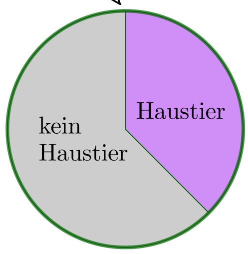
Relative Anteile – Bruchrechnung

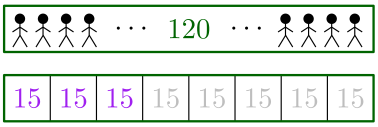
a) In einer Gruppe mit 120 Personen haben 45 Personen ein Haustier.
Gib den **relativen Anteil** der Personen mit Haustier als vollständig gekürzten Bruch an:



$$\frac{\mathbf{45}}{\mathbf{120}} = \frac{3}{8}$$

b) Wie viele Personen sind $\frac{3}{8}$ von 120 Personen?

„*Ein Achtel von* 120 *ist* $\frac{120}{8} = 15$.
Also sind drei Achtel von 120 *gleich* $3 \cdot 15 = 45$.“



Die Abkürzung der folgenden Rechnung merken wir uns:

$$\frac{3}{8} \textbf{ von } 120 = \frac{120}{8} \cdot 3 = \frac{120 \cdot 3}{8} = 120 \cdot \frac{3}{8} = 45$$

Bei solchen Berechnungen kann man also das Wort „von“ durch einen Malpunkt ersetzen.

Relative Anteile – Bruchrechnung

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

a) Berechne $\frac{2}{3}$ von x.

$x \cdot \frac{2}{3}$

b) Berechne $\frac{5}{4}$ von x.

$x \cdot \frac{5}{4}$

c) Vergrößere x um $\frac{3}{5}$ von x.

$x + x \cdot \frac{3}{5} = x \cdot \left(1 + \frac{3}{5}\right) = x \cdot \frac{8}{5}$

d) Verkleinere x um $\frac{4}{7}$ von x.

$x - x \cdot \frac{4}{7} = x \cdot \left(1 - \frac{4}{7}\right) = x \cdot \frac{3}{7}$

e) Vergrößere x um $\frac{2}{3}$ von x.

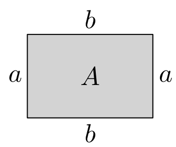
$x \cdot \frac{5}{3}$

f) Verkleinere x um $\frac{1}{6}$ von x.

$x \cdot \frac{5}{6}$

Änderungsfaktoren – Bruchrechnung

Das rechts dargestellte Rechteck mit den Seitenlängen a und b hat den Flächeninhalt $A = a \cdot b$.
Nun bilden wir ein neues Rechteck:
Die beiden Seiten mit Länge a verlängern wir jeweils um $\frac{1}{3}$ von a.
Die beiden Seiten mit Länge b verlängern wir jeweils um $\frac{1}{4}$ von b.

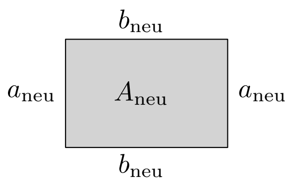


Trage unten Zahlen richtig in die Kästchen ein.

1) Für die neuen Seitenlängen a_{neu} und b_{neu} gilt: $a_{\text{neu}} = a \cdot \frac{4}{3}$ $\quad b_{\text{neu}} = b \cdot \frac{5}{4}$

2) Für den neuen Flächeninhalt A_{neu} gilt: $A_{\text{neu}} = a_{\text{neu}} \cdot b_{\text{neu}} = \underbrace{a \cdot b}_{=A} \cdot \frac{5}{3}$

A_{neu} ist also größer als A, nämlich um $\frac{2}{3}$ von A.



Diesmal verlängern wir a um $\frac{1}{3}$ von a und verkürzen b um $\frac{1}{3}$ von b.
Bleibt der Flächeninhalt gleich groß? Hängt das davon ab, wie groß a und b sind?

$$A_{\text{neu}} = a_{\text{neu}} \cdot b_{\text{neu}} = \left(a \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot \left(b \cdot \frac{2}{3}\right) = a \cdot b \cdot \frac{8}{9} = A \cdot \frac{8}{9}$$

A_{neu} ist also – unabhängig von a und b – kleiner als A, nämlich um $\frac{1}{9}$ von A.

Prozent / Promille / part per million

Relative Anteile werden neben Brüchen auch in anderen Formen angegeben:

1 Prozent: $1\,\% = \frac{1}{100} = 0{,}01$

1 Promille: $1\,‰ = \frac{1}{1000} = 0{,}001$

1 part per million: $1\,\text{ppm} = \frac{1}{1\,000\,000} = 0{,}000\,001$

Relative Anteile – Prozentrechnung

a) In einer Gruppe mit 150 Personen haben 63 Personen ein Haustier.
Gib den **relativen Anteil** der Personen mit Haustier in Prozent an:

$$\frac{\mathbf{63}}{\mathbf{150}} = 0{,}42 \cdot \underbrace{100\,\%}_{=1} = 42\,\%$$

b) Wie viele Personen sind $42\,\%$ von 150 Personen?

„Ein Prozent von 150 *ist* $\frac{150}{100} = 1{,}5$.
Also sind 42 *Prozent von* 150 *gleich* $42 \cdot 1{,}5 = 63$.“

$$\begin{array}{rrcrl} : 100 & 100\,\% & \ldots\ldots\ldots & 150 \text{ Personen} & : 100 \\ \cdot\, 42 & 1\,\% & \ldots\ldots\ldots & 1{,}5 \text{ Personen} & \cdot\, 42 \\ & 42\,\% & \ldots\ldots\ldots & 63 \text{ Personen} & \end{array}$$

Die Abkürzung der folgenden Rechnung merken wir uns:

$$42\,\% \;\textbf{von}\; 150 = \frac{150}{100} \cdot 42 = \frac{150 \cdot 42}{100} = 150 \cdot \frac{42}{100} = 150 \cdot \underbrace{0{,}42}_{=42\,\%} = 63$$

Bei solchen Berechnungen kann man also das Wort „von“ wieder durch einen Malpunkt ersetzen.

Prozent / Promille / part per million

Trage jeweils Dezimalzahlen richtig in die Kästchen ein.

a) Berechne $87\,\%$ von x.

$x \cdot 0{,}87$

b) Berechne $0{,}5\,‰$ von x.

$x \cdot 0{,}0005$

c) Berechne $230\,\text{ppm}$ von x.

$x \cdot 0{,}000\,23$

Relative Anteile – Prozentrechnung

Trage jeweils Dezimalzahlen richtig in die Kästchen ein.

a) Vergrößere x um $17\,\%$ von x.

$x + x \cdot 0{,}17 = x \cdot (1 + 0{,}17) = x \cdot 1{,}17$

b) Verkleinere x um $32\,\%$ von x.

$x - x \cdot 0{,}32 = x \cdot (1 - 0{,}32) = x \cdot 0{,}68$

c) Verkleinere x um $15\,\%$ von x.

$x \cdot 0{,}85$

d) Vergrößere x um $123\,\%$ von x.

$x \cdot 2{,}23$

Änderungsfaktoren – Prozentrechnung

Ein Pullover kostet € 49. Berechne den neuen Preis des Pullovers, wenn …

a) … sein Preis um $12\,\%$ erhöht wird.

€ $49 \cdot 1{,}12 =$ € $54{,}88$

b) … sein Preis um $12\,\%$ verringert wird.

€ $49 \cdot 0{,}88 =$ € $43{,}12$

Grundwert gesucht MmF

Nach einer Preisänderung kostet ein Pullover € 49. Berechne den Preis P vor der Änderung, wenn ...

a) ... sein Preis um 12 % erhöht wurde.

$$P \cdot 1{,}12 = €\,49$$

$$\implies P = \frac{€\,49}{1{,}12} = €\,43{,}75$$

b) ... sein Preis um 12 % verringert wurde.

$$P \cdot 0{,}88 = €\,49$$

$$\implies P = \frac{€\,49}{0{,}88} \approx €\,55{,}68$$

Martin versucht **a)** anders zu lösen und meint:

„*Ich mache die Preisänderung rückgängig, indem ich vom neuen Preis die* 12 % *wieder abziehe.*“

Er rechnet: $P = €\,49 \cdot 0{,}88 = €\,43{,}12$

Erkläre, warum Martins Rechenweg *falsch* ist.

Es sind 12 % vom alten Preis *nicht* gleich viel wie 12 % vom neuen Preis.

Prozentsatz gesucht MmF

a) Der Preis eines Pullovers wird von € 40 auf € 50 erhöht.
Um wie viel Prozent ist der neue Preis höher als der alte Preis?

Lösungsweg 1: $\frac{50}{40} = 1{,}25 \implies 50 = 40 \cdot \underbrace{1{,}25}_{=125\,\%}$

Der neue Preis € 50 ist also um 25 % höher als der alte Preis € 40.

Lösungsweg 2: $\frac{50-40}{40} = \frac{50}{40} - \frac{40}{40} = \frac{50}{40} - 1 = 0{,}25 = 25\,\%$

Die Zwischenschritte sind nicht notwendig, aber sie zeigen, warum die beiden Lösungswege das gleiche Ergebnis liefern.

Der neue Preis € 50 ist also um 25 % höher als der alte Preis € 40.

b) Der Preis eines Pullovers wird von € 50 auf € 40 verkleinert.
Um wie viel Prozent ist der neue Preis niedriger als der alte Preis?

Lösungsweg 1: $\frac{40}{50} = 0{,}8 \implies 40 = 50 \cdot \underbrace{0{,}8}_{=80\,\%}$

Lösungsweg 2: $\frac{40-50}{50} = -0{,}2$

Der neue Preis € 40 ist also um 20 % niedriger als der alte Preis € 50.

+15 % / − 15 % MmF

Der Preis eines Pullovers wird zuerst um 15 % erhöht.
Der neue Preis wird eine Woche später um 15 % verringert.
Ist der Preis nach diesen beiden Veränderungen wieder gleich hoch wie zu Beginn?
Falls nein, um wie viel Prozent ist der aktuelle Preis höher oder niedriger als zu Beginn?

$$P_{\text{neu}} = (P \cdot 1{,}15) \cdot 0{,}85 = P \cdot \underbrace{0{,}9775}_{=97{,}75\,\%}$$

Der neue Preis ist um 100 % − 97,75 % = 2,25 % niedriger als zu Beginn.

Änderungsfaktor – Kehrwert

Der gleiche Pullover wird in zwei Geschäften angeboten:

- Im 1. Geschäft kostet der Pullover P € mit $P > 0$.
- Im 2. Geschäft kostet der Pullover um 20 % mehr als im 1. Geschäft, aber du bekommst 17 % Rabatt.

a) In welchem Geschäft ist der Pullover für dich günstiger? Begründe deine Antwort.

b) Wieviel Prozent Rabatt muss das 2. Geschäft geben, damit du in beiden Geschäften gleich viel für den Pullover bezahlst?

a) Preis im 2. Geschäft: $P \cdot 1{,}2 \cdot 0{,}83 = \underbrace{P \cdot 0{,}996}_{99{,}6\,\%\text{ von }P}$

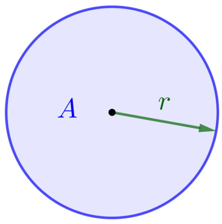
Im 2. Geschäft ist der Pullover um 100 % − 99,6 % = 0,4 % günstiger als im 1. Geschäft.

b) Die beiden Änderungsfaktoren müssen einander aufheben: $1{,}2 \cdot a = 1 \iff a = \frac{1}{1{,}2} = 0{,}833...$

Das 2. Geschäft muss 100 % − 83,3... % = 16,6... % Rabatt geben.

Änderungsfaktor – Quadratisch

Der rechts dargestellte Kreis mit Radius r hat den Flächeninhalt $A = \pi \cdot r^2$.
Sein Radius wird um 30 % vergrößert.
Um wie viel Prozent wird der Flächeninhalt größer?
Trage unten Zahlen richtig in die Kästchen ein.



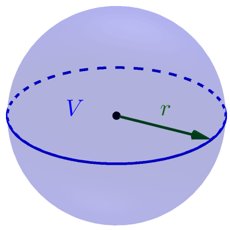
1) Für den neuen Radius r_{neu} gilt: $r_{\text{neu}} = r \cdot 1{,}3$

2) Für den neuen Flächeninhalt A_{neu} gilt: $A_{\text{neu}} = \pi \cdot r_{\text{neu}}^2 = \pi \cdot (r \cdot 1{,}3)^2 = \underbrace{\pi \cdot r^2}_{=A} \cdot 1{,}69$

Der neue Flächeninhalt ist also um 69 % größer als A.

Änderungsfaktor – Kubisch

Die rechts dargestellte Kugel mit Radius r hat das Volumen $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$.
Ihr Radius wird um 30 % vergrößert.
Um wie viel Prozent wird das Volumen größer?



1) Für den neuen Radius r_{neu} gilt: $r_{\text{neu}} = r \cdot 1{,}3$

2) Für das neue Volumen V_{neu} gilt: $V_{\text{neu}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{\text{neu}}^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (r \cdot 1{,}3)^3 = \underbrace{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}_{=V} \cdot 2{,}197$

Das neue Volumen ist also um 119,7 % größer als V.