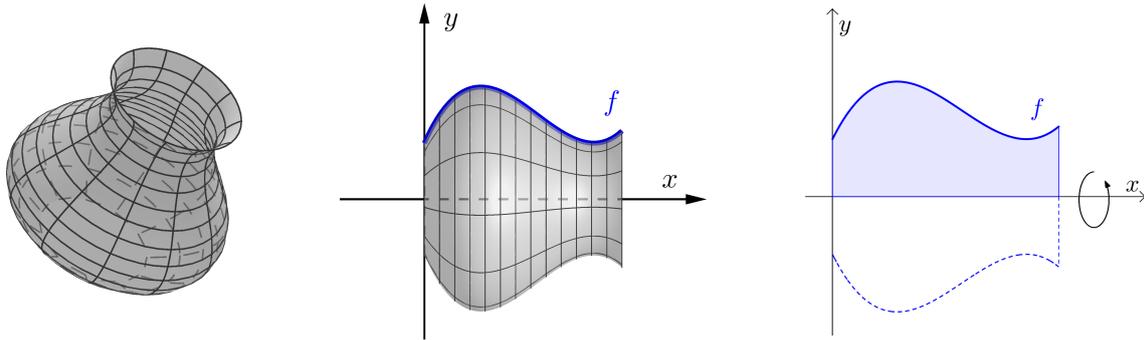




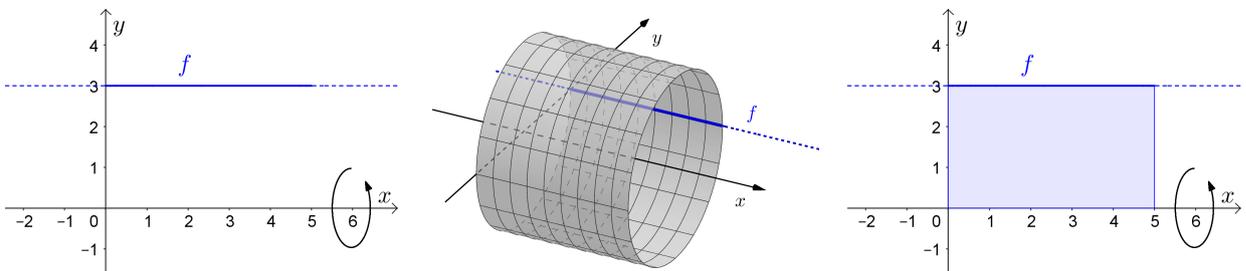
Die dargestellte Vase ist ein **Rotationskörper**:



Ihre Mantelfläche kann nämlich durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x -Achse erzeugt werden. Mithilfe der **Integralrechnung** können wir das Volumen solcher Rotationskörper berechnen.



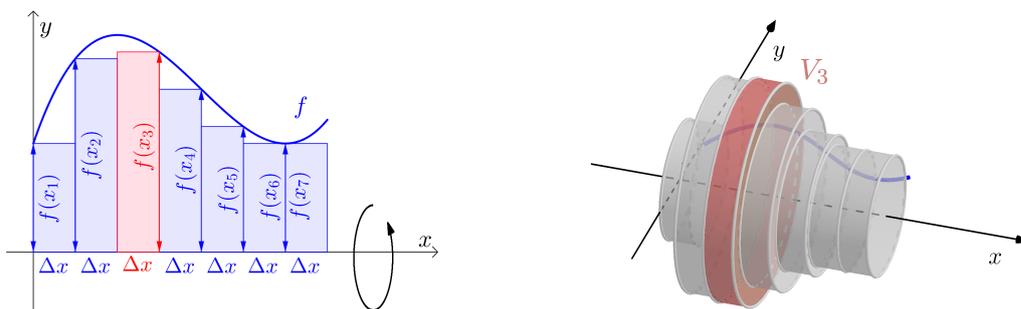
Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = 3$ rotiert im Intervall $[0; 5]$ um die x -Achse:



Dabei wird die Mantelfläche eines **Drehzylinders** mit Radius $r = 3$ und Höhe $h = 5$ erzeugt. Für das Volumen V dieses Rotationskörpers gilt also: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 141,3\dots$



Wenn f keine konstante Funktion ist, zerlegen wir das Intervall in Teile mit gleicher Breite Δx . Wir nähern das Volumen – genau wie bei Flächeninhalten – durch eine **Untersumme** an:



Stelle mithilfe von x_3 , Δx und f eine Formel für das Volumen V_3 des markierten Drehzylinders auf:

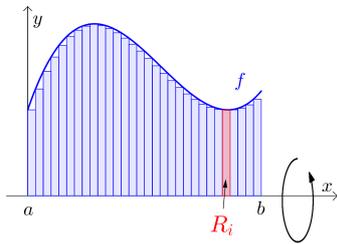
$$V_3 = \pi \cdot f(x_3)^2 \cdot \Delta x$$

Die Untersumme ist das Gesamtvolumen der 7 Drehzylinder:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_7 = \sum_{i=1}^7 V_i = \sum_{i=1}^7 \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$



Um die Annäherung an das tatsächliche Volumen zu verbessern, verfeinern wir die Zerlegung. Der Grenzwert dieser Untersummen ist der *exakte* Flächeninhalt A bzw. das *exakte* Volumen V . Im Bild unten nähern wir den Flächeninhalt durch n Rechtecke mit Breite Δx an:

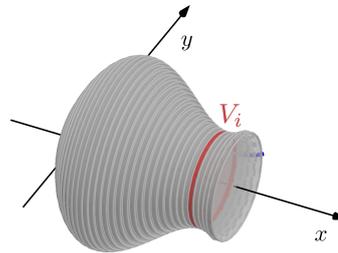


Einzelfläche: $R_i = f(x_i) \cdot \Delta x$

Gesamtfläche: $\sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x$

Grenzwert: $A = \int_a^b f(x) dx$

Im Bild unten nähern wir das Volumen durch n Drehzylinder mit Höhe Δx an:



Einzelvolumen: $V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$

Gesamtvolumen: $\sum_{i=1}^n \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$

Grenzwert: $V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 dx$

Volumen von Rotationskörpern (x-Achse)



Der Graph einer **stetigen** Funktion $y = f(x)$ rotiert für $a \leq x \leq b$ um die **x-Achse**. Für das **Volumen V_x** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$
 Das heißt: 1) Ermittle $\pi \cdot f(x)^2$ und integriere nach x .
 2) Die Integrationsgrenzen a und b lies auf der x -Achse ab.

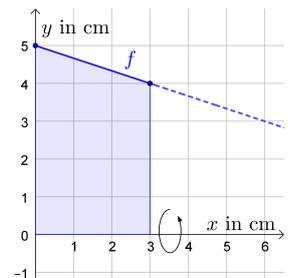
Drehkegelstumpf



Rechts ist der Graph einer **linearen Funktion f** dargestellt.

1) Stelle eine Funktionsgleichung von f auf.

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x + 5$$



Wenn der Graph in $[0; 3]$ um die x -Achse rotiert, entsteht ein Drehkegelstumpf.

2) Berechne sein Volumen V mit der Formel für das Rotationsvolumen.

$$f(x)^2 = \left(-\frac{1}{3} \cdot x + 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x + 5\right) = \frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{10}{3} \cdot x + 25$$

$$V = \pi \cdot \int_0^3 f(x)^2 dx = \pi \cdot \left(\frac{1}{27} \cdot x^3 - \frac{5}{3} \cdot x^2 + 25 \cdot x\right) \Big|_0^3 = 191,6... - 0 = 191,6... \text{ cm}^3$$

3) Berechne V mit der Formel für das Volumen von **Drehkegeln**.

$$f(x) = 0 \iff -\frac{1}{3} \cdot x + 5 = 0 \iff x = 15$$

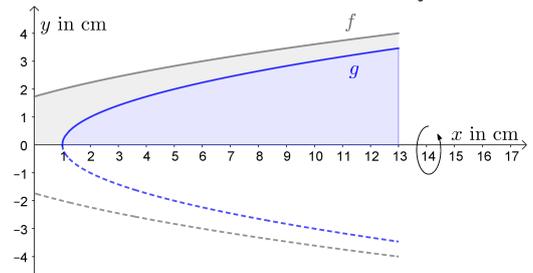
$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 15}{3} - \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 12}{3} = 191,6... \text{ cm}^3$$

Für das rechts dargestellte Wasserglas gilt:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 13$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{mit } 1 \leq x \leq 13$$

$x, f(x), g(x) \dots$ Koordinaten in cm



1) Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.

$$\begin{aligned} V_{\text{Innen}} &= \pi \cdot \int_1^{13} g(x)^2 dx = \pi \cdot \int_1^{13} (x-1) dx = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - x \right) \Big|_1^{13} = \\ &= 224,6\dots - (-1,570\dots) = 226,1\dots \text{ cm}^3 = 226,1\dots \text{ ml} \end{aligned}$$

2) Das verwendete Glas hat die Dichte $\rho = 2,5 \text{ g/cm}^3$. Berechne die Masse des leeren Wasserglases.

$$\begin{aligned} V_{\text{Außen}} &= \pi \cdot \int_0^{13} f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^{13} (x+3) dx = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x \right) \Big|_0^{13} = \\ &= 387,9\dots - 0 = 387,9\dots \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

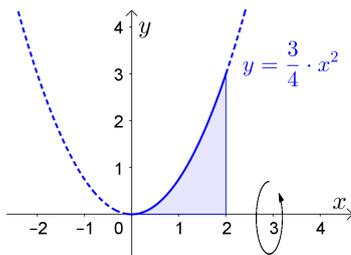
$$V_{\text{Glas}} = V_{\text{Außen}} - V_{\text{Innen}} = 387,9\dots - 226,1\dots = 161,7\dots \text{ cm}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} \implies m = \rho \cdot V = 2,5 \text{ g/cm}^3 \cdot 161,7\dots \text{ cm}^3 = 404,4\dots \text{ g}$$

Die Lösungen der Gleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$ liegen auf der dargestellten **Parabel**.

Für die Rotation um die y -Achse vertauschen wir die Rollen von x und y .

Rotation um die x -Achse ($0 \leq x \leq 2$)



$$V_x = \int_0^2 \underbrace{\pi \cdot y(x)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{vom Querschnitt} \\ \text{an der Stelle } x}} dx$$

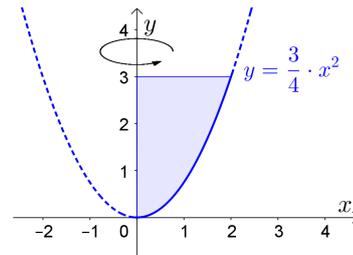
Wir integrieren $\pi \cdot y(x)^2$ nach x .

Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der x -Achse ab.

$$y^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot x^2 \right)^2 = \frac{9}{16} \cdot x^4$$

$$V_x = \int_0^2 \pi \cdot \frac{9}{16} \cdot x^4 dx = \pi \cdot \frac{9}{80} \cdot x^5 \Big|_0^2 = 11,30\dots$$

Rotation um die y -Achse ($0 \leq y \leq 3$)



$$V_y = \int_0^3 \underbrace{\pi \cdot x(y)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt} \\ \text{vom Querschnitt} \\ \text{an der Stelle } y}} dy$$

Wir integrieren $\pi \cdot x(y)^2$ nach y .

Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der y -Achse ab.

$$x^2 = \frac{4}{3} \cdot y$$

$$V_y = \int_0^3 \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot y dy = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot y^2 \Big|_0^3 = 18,84\dots$$

Volumen von Rotationskörpern (y-Achse)



Der Graph einer stetigen Funktion $x = g(y)$ rotiert für $c \leq y \leq d$ um die **y-Achse**.

Für das **Volumen V_y** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $V_y = \pi \cdot \int_c^d g(y)^2 dy$

Das heißt: 1) Forme die gegebene Gleichung nach x^2 um, und integriere $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot g(y)^2$ nach y .

2) Die Integrationsgrenzen c und d lies auf der y -Achse ab.

Sektglas

Für das rechts dargestellte Sektglas gilt:

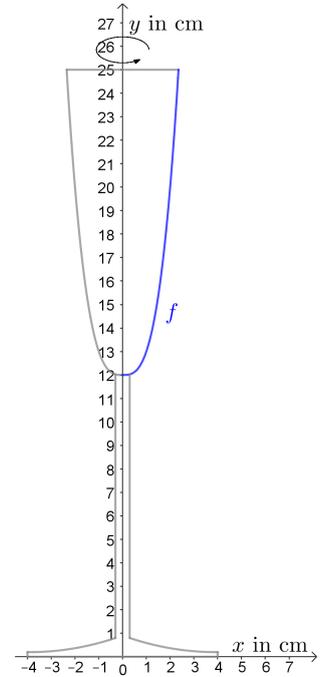
$$f(x) = x^3 + 12 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq \sqrt[3]{13}$$

$x, f(x)$... Koordinaten in cm

Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.

$$y = x^3 + 12 \iff x = \sqrt[3]{y - 12} \xrightarrow{x > 0} x^2 = (y - 12)^{\frac{2}{3}}$$

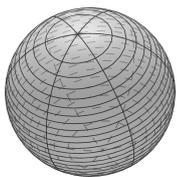
$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{12}^{25} (y - 12)^{\frac{2}{3}} dy = \pi \cdot \frac{3}{5} \cdot (y - 12)^{\frac{5}{3}} \Big|_{12}^{25} = \\ &= 135,4... - 0 = 135,4... \text{ cm}^3 = 135,4... \text{ ml} \end{aligned}$$



Kugelvolumen

Für das Volumen V einer Kugel mit Radius r gilt: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

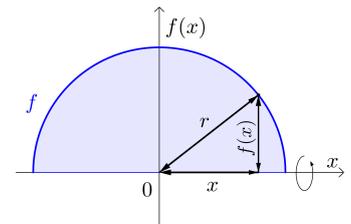
Eine Kugel mit Radius r kann als Rotationskörper um die x -Achse beschrieben werden:



1) Stelle mithilfe von r eine Funktionsgleichung von f auf.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

2) Leite mithilfe der Integralrechnung die obige Formel für das Kugelvolumen her.

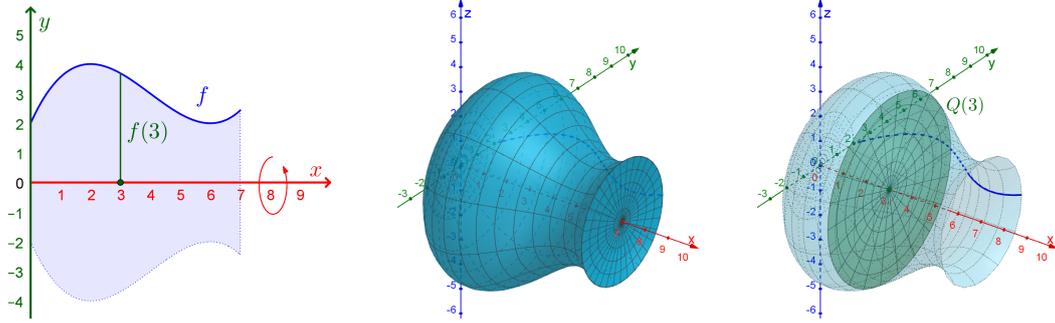


$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-r}^r f(x)^2 dx = 2 \cdot \pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_{x=0}^r = \\ &= 2 \cdot \pi \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3} \cdot r^3 \right) = 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{3 \cdot r^3 - 1 \cdot r^3}{3} \right) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot r^3}{3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \checkmark \end{aligned}$$

Rotationsvolumen als bestimmtes Integral der Querschnittsfläche



Der Graph einer Funktion f in einer Variablen x rotiert im Intervall $[0; 7]$ um die x -Achse:



Der Querschnitt mit $x = 3$ ist ein Kreis mit Radius $f(3)$ und Flächeninhalt $Q(3) = \pi \cdot f(3)^2$.

Für das Rotationsvolumen V gilt: $V = \int_0^7 \pi \cdot f(x)^2 dx = \int_0^7 Q(x) dx$

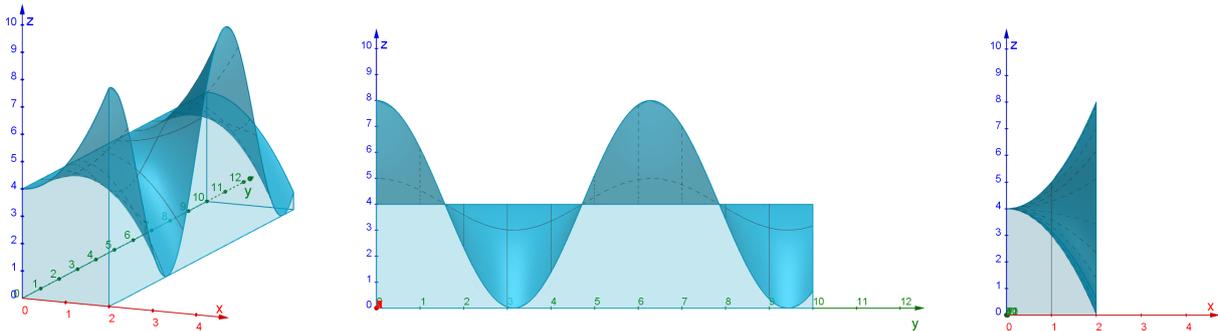
Bestimmtes Integral der Querschnittsfläche



Für die Funktion f in zwei Variablen x und y gilt:

$$f(x; y) = x^2 \cdot \cos(y) + 4 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq 10$$

Der Graph der Funktion f ist eine Fläche im 3-dimensionalen Raum:



Der Funktionsgraph und die xy -Ebene schließen in diesem Bereich einen 3-dimensionalen Körper ein.

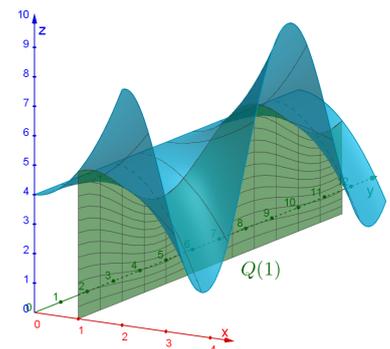
Für den Inhalt der Querschnittsfläche $Q(x)$ an der Stelle x gilt:

$$Q(x) = \int_0^{10} f(x; y) dy \quad \text{Rechts ist } Q(1) \text{ dargestellt.}$$

1) Ermittle $Q(x)$.

Für das Volumen V des 3-dimensionalen Körpers gilt: $V = \int_0^2 Q(x) dx$

2) Ermittle das Volumen V (alle Koordinaten in cm).



1) $Q(x) = \int_0^{10} [x^2 \cdot \cos(y) + 4] dy = [x^2 \cdot \sin(y) + 4 \cdot y] \Big|_{y=0}^{10} = \sin(10) \cdot x^2 + 40$

2) $V = \int_0^2 [\sin(10) \cdot x^2 + 40] dx = \frac{\sin(10)}{3} \cdot x^3 + 40 \cdot x \Big|_{x=0}^2 = 78,54... \text{ cm}^3$

