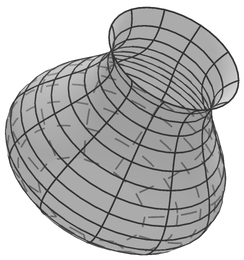
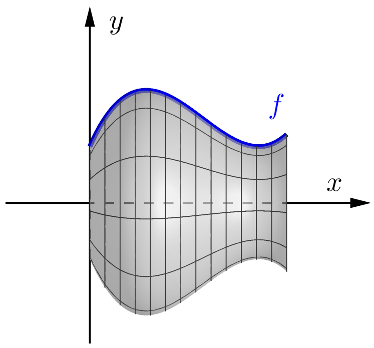
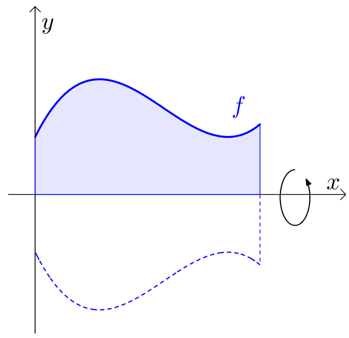
Rotationskörper

Die dargestellte Vase ist ein **Rotationskörper**:



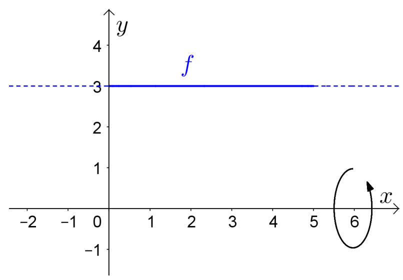


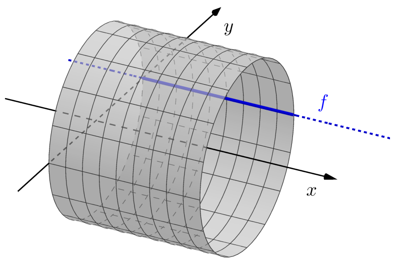


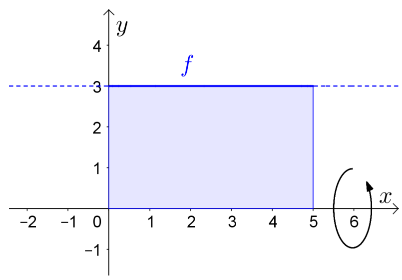
Ihre Mantelfläche kann nämlich durch Rotation eines Funktionsgraphen um die x-Achse erzeugt werden. Mithilfe der Integralrechnung können wir das Volumen solcher Rotationskörper berechnen.

Konstante Funktion

Der Graph der konstanten Funktion f mit $f(x) = 3$ rotiert im Intervall $[0; 5]$ um die x-Achse:



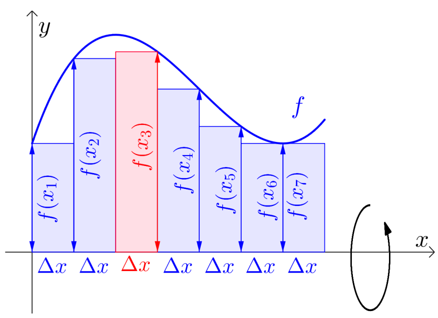


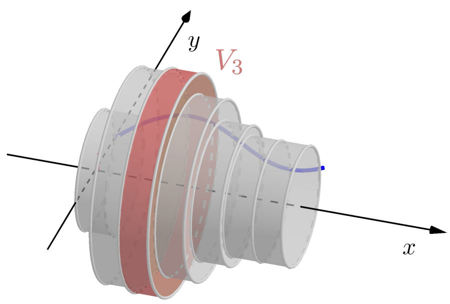


Dabei wird die Mantelfläche eines Drehzylinders mit Radius $r = 3$ und Höhe $h = 5$ erzeugt.
Für das Volumen V dieses Rotationskörpers gilt also: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 141{,}3...$

Untersumme

Wenn f keine konstante Funktion ist, zerlegen wir das Intervall in Teile mit gleicher Breite Δx.
Wir nähern das Volumen – genau wie bei Flächeninhalten – durch eine Untersumme an:





Stelle mithilfe von x_3, Δx und f eine Formel für das Volumen V_3 des markierten Drehzylinders auf:

$$V_3 = \pi \cdot f(x_3)^2 \cdot \Delta x$$

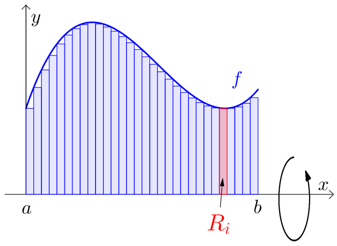
Die Untersumme ist das Gesamtvolumen der 7 Drehzylinder:

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_7 = \sum_{i=1}^{7} V_i = \sum_{i=1}^{7} \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$$

Integral als Grenzwert von Untersummen

Um die Annäherung an das tatsächliche Volumen zu verbessern, verfeinern wir die Zerlegung.
Der Grenzwert dieser Untersummen ist der *exakte* Flächeninhalt A bzw. das *exakte* Volumen V.

Im Bild unten nähern wir den Flächeninhalt durch n Rechtecke mit Breite Δx an:

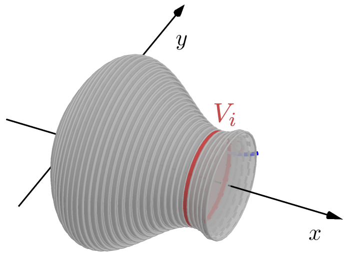


Einzelfläche: $R_i = f(x_i) \cdot \Delta x$

Gesamtfläche: $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$

Grenzwert: $A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Im Bild unten nähern wir das Volumen durch n Drehzylinder mit Höhe Δx an:



Einzelvolumen: $V_i = \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$

Gesamtvolumen: $\sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f(x_i)^2 \cdot \Delta x$

Grenzwert: $V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2\,\mathrm{d}x$

Volumen von Rotationskörpern (x-Achse)

Der Graph einer stetigen Funktion $y = f(x)$ rotiert für $a \leq x \leq b$ um die **x-Achse**.

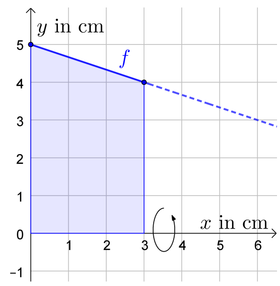
Für das **Volumen V_x** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $\boldsymbol{V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x}$

Das heißt: **1)** Ermittle $\pi \cdot f(x)^2$ und integriere nach x.

2) Die Integrationsgrenzen a und b lies auf der x-Achse ab.

Drehkegelstumpf

Rechts ist der Graph einer linearen Funktion f dargestellt.



1) Stelle eine Funktionsgleichung von f auf.

$$f(x) = -\frac{1}{3} \cdot x + 5$$

Wenn der Graph in $[0; 3]$ um die x-Achse rotiert, entsteht ein Drehkegelstumpf.

2) Berechne sein Volumen V mit der Formel für das Rotationsvolumen.

$$f(x)^2 = \left(-\frac{1}{3} \cdot x + 5\right) \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot x + 5\right) = \frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{10}{3} \cdot x + 25$$

$$V = \pi \cdot \int_0^3 f(x)^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left(\frac{1}{27} \cdot x^3 - \frac{5}{3} \cdot x^2 + 25 \cdot x\right) \Big|_0^3 = 191{,}6\ldots - 0 = 191{,}6\ldots\,\mathrm{cm}^3$$

3) Berechne V mit der Formel für das Volumen von Drehkegeln.

$$f(x) = 0 \iff -\frac{1}{3} \cdot x + 5 = 0 \iff x = 15$$

$$V = \frac{\pi \cdot 5^2 \cdot 15}{3} - \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 12}{3} = 191{,}6\ldots\,\mathrm{cm}^3$$

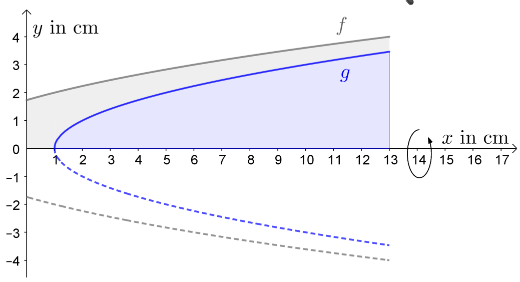
Wasserglas

Für das rechts dargestellte Wasserglas gilt:

$$f(x) = \sqrt{x+3} \quad \text{mit} \;\; 0 \leq x \leq 13$$

$$g(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{mit} \;\; 1 \leq x \leq 13$$

x, $f(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in cm



1) Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.

$$V_{\text{Innen}} = \pi \cdot \int_1^{13} g(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_1^{13} (x-1)\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 - x\right) \Big|_1^{13} =$$
$$= 224{,}6... - (-1{,}570...) = 226{,}1...\,\text{cm}^3 = 226{,}1...\,\text{ml}$$

2) Das verwendete Glas hat die Dichte $\rho = 2{,}5\,\text{g/cm}^3$. Berechne die Masse des leeren Wasserglases.

$$V_{\text{Außen}} = \pi \cdot \int_0^{13} f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{13} (x+3)\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot x^2 + 3 \cdot x\right) \Big|_0^{13} =$$
$$= 387{,}9... - 0 = 387{,}9...\,\text{cm}^3$$

$$V_{\text{Glas}} = V_{\text{Außen}} - V_{\text{Innen}} = 387{,}9... - 226{,}1... = 161{,}7...\,\text{cm}^3$$

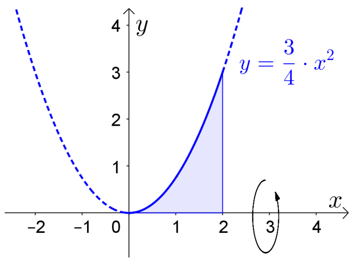
$$\rho = \frac{m}{V} \implies m = \rho \cdot V = 2{,}5\,\text{g/cm}^3 \cdot 161{,}7...\,\text{cm}^3 = 404{,}4...\,\text{g}$$

Rotation um die y-Achse

Die Lösungen der Gleichung $y = \frac{3}{4} \cdot x^2$ liegen auf der dargestellten Parabel.

Für die Rotation um die y-Achse vertauschen wir die Rollen von x und y.

Rotation um die x-Achse ($0 \leq x \leq 2$)



$$V_x = \int_0^2 \underbrace{\pi \cdot y(x)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt}\\ \text{vom Querschnitt}\\ \text{an der Stelle } x}} \,\mathrm{d}x$$

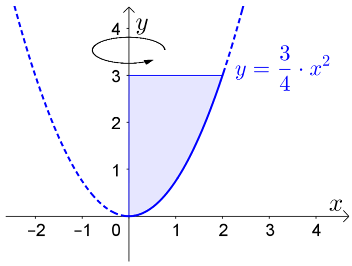
Wir integrieren $\pi \cdot y(x)^2$ nach x.

Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der x-Achse ab.

$$y^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot x^2\right)^2 = \frac{9}{16} \cdot x^4$$

$$V_x = \int_0^2 \pi \cdot \frac{9}{16} \cdot x^4 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{9}{80} \cdot x^5 \Big|_0^2 = 11{,}30...$$

Rotation um die y-Achse ($0 \leq y \leq 3$)



$$V_y = \int_0^3 \underbrace{\pi \cdot x(y)^2}_{\substack{\text{Flächeninhalt}\\ \text{vom Querschnitt}\\ \text{an der Stelle } y}} \,\mathrm{d}y$$

Wir integrieren $\pi \cdot x(y)^2$ nach y.

Die Integrationsgrenzen lesen wir auf der y-Achse ab.

$$x^2 = \frac{4}{3} \cdot y$$

$$V_y = \int_0^3 \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot y \,\mathrm{d}y = \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot y^2 \Big|_0^3 = 18{,}84...$$

Volumen von Rotationskörpern (y-Achse)

Der Graph einer stetigen Funktion $x = g(y)$ rotiert für $c \leq y \leq d$ um die **y-Achse**.

Für das **Volumen V_y** des dabei entstandenen **Rotationskörpers** gilt: $\boldsymbol{V_y = \pi \cdot \int_c^d g(y)^2 \, dy}$

Das heißt: **1)** Forme die gegebene Gleichung nach x^2 um, und integriere $\pi \cdot x^2 = \pi \cdot g(y)^2$ nach y.

2) Die Integrationsgrenzen c und d lies auf der y-Achse ab.

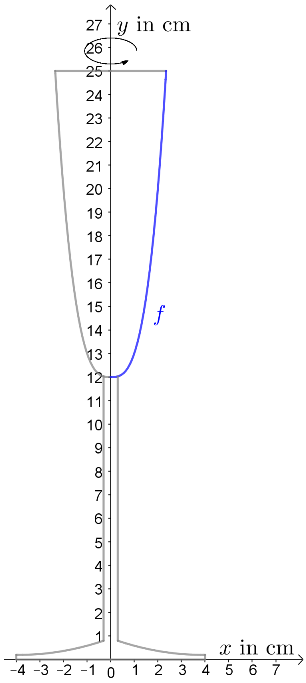
Sektglas

Für das rechts dargestellte Sektglas gilt:

$$f(x) = x^3 + 12 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq \sqrt[3]{13}$$

x, $f(x)\ldots$ Koordinaten in cm

Berechne sein maximales Füllvolumen in ml.



$$y = x^3 + 12 \iff x = \sqrt[3]{y-12} \overset{x \geq 0}{\iff} x^2 = (y-12)^{\frac{2}{3}}$$

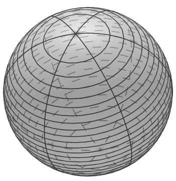
$$V = \pi \cdot \int_{12}^{25} (y-12)^{\frac{2}{3}} \, \mathrm{d}y = \pi \cdot \frac{3}{5} \cdot (y-12)^{\frac{5}{3}} \Big|_{12}^{25} =$$

$$= 135{,}4\ldots - 0 = 135{,}4\ldots \, \mathrm{cm}^3 = 135{,}4\ldots \, \mathrm{ml}$$

Kugelvolumen

Für das Volumen V einer Kugel mit Radius r gilt: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$

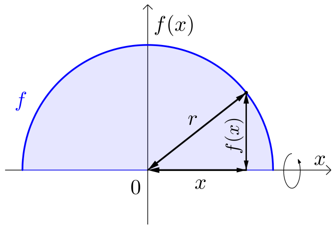
Eine Kugel mit Radius r kann als Rotationskörper um die x-Achse beschrieben werden:



1) Stelle mithilfe von r eine Funktionsgleichung von f auf.

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

2) Leite mithilfe der Integralrechnung die obige Formel für das Kugelvolumen her.

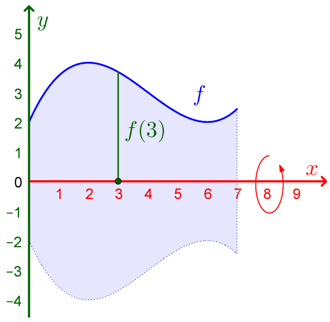


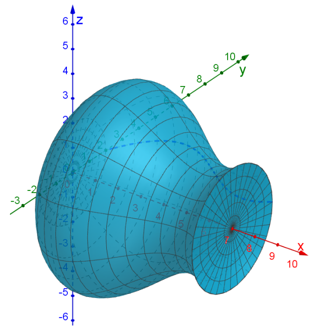
$$V = \pi \cdot \int_{-r}^{r} f(x)^2 \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \int_0^r (r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \pi \cdot \left(r^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right) \Big|_{x=0}^{r} =$$

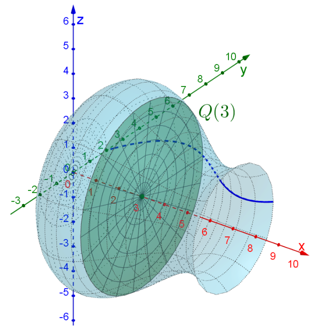
$$= 2 \cdot \pi \cdot \left(r^3 - \frac{1}{3} \cdot r^3 \right) = 2 \cdot \pi \left(\frac{3 \cdot r^3 - 1 \cdot r^3}{3} \right) = 2 \cdot \pi \cdot \frac{2 \cdot r^3}{3} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \checkmark$$

Rotationsvolumen als bestimmtes Integral der Querschnittsfläche

Der Graph einer Funktion f in einer Variablen x rotiert im Intervall $[0;7]$ um die x-Achse:







Der Querschnitt mit $x = 3$ ist ein Kreis mit Radius $f(3)$ und Flächeninhalt $Q(3) = \pi \cdot f(3)^2$.

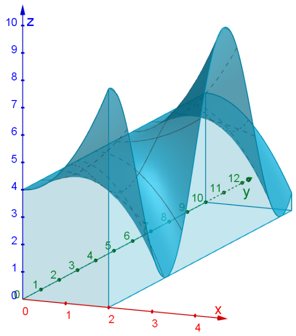
Für das Rotationsvolumen V gilt: $V = \int_0^7 \pi \cdot f(x)^2 \, \mathrm{d}x = \int_0^7 Q(x) \, \mathrm{d}x$

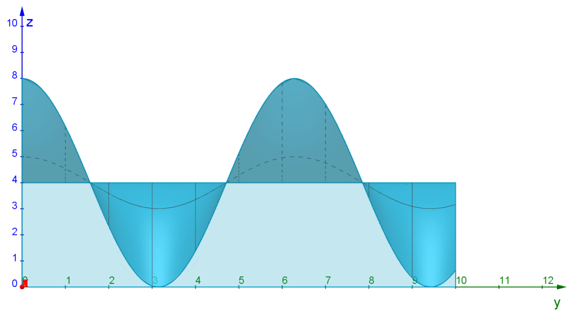
Bestimmtes Integral der Querschnittsfläche

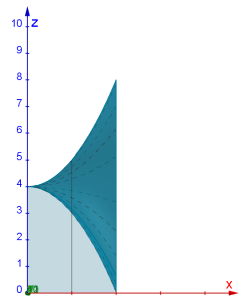
Für die Funktion f in zwei Variablen x und y gilt:

$$f(x;y) = x^2 \cdot \cos(y) + 4 \quad \text{mit} \quad 0 \leq x \leq 2 \quad \text{und} \quad 0 \leq y \leq 10$$

Der Graph der Funktion f ist eine Fläche im 3-dimensionalen Raum:





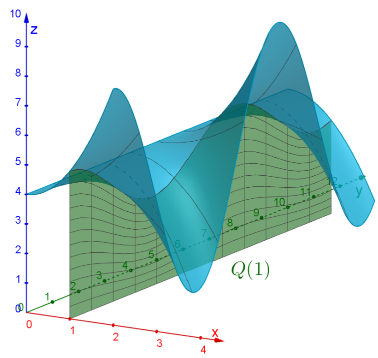


Der Funktionsgraph und die xy-Ebene schließen in diesem Bereich einen 3-dimensionalen Körper ein.

Für den Inhalt der Querschnittsfläche $Q(x)$ an der Stelle x gilt:

$$Q(x) = \int_0^{10} f(x;y) \, \mathrm{d}y$$

Rechts ist $Q(1)$ dargestellt.



1) Ermittle $Q(x)$.

Für das Volumen V des 3-dimensionalen Körpers gilt: $V = \int_0^2 Q(x) \, \mathrm{d}x$

2) Ermittle das Volumen V (alle Koordinaten in cm).

1) $Q(x) = \int_0^{10} [\, x^2 \cdot \cos(y) + 4 \,] \, \mathrm{d}y = \left[x^2 \cdot \sin(y) + 4 \cdot y \right] \Big|_{y=0}^{10} = \sin(10) \cdot x^2 + 40$

2) $V = \int_0^2 [\, \sin(10) \cdot x^2 + 40 \,] \, \mathrm{d}x = \frac{\sin(10)}{3} \cdot x^3 + 40 \cdot x \Big|_{x=0}^{2} = 78{,}54\ldots \text{ cm}^3$