Stammfunktion

In der Differentialrechnung haben wir Ableitungsfunktionen ermittelt.
In der Integralrechnung ermitteln wir zu einer Funktion f eine Funktion F, die $\boldsymbol{F' = f}$ erfüllt.
Eine solche Funktion $\boldsymbol{F}$ nennen wir **Stammfunktion von $\boldsymbol{f}$**.

Stammfunktion einer Polynomfunktion

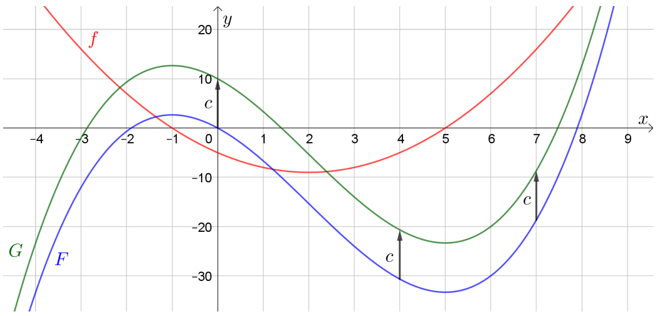
Ermittle eine Stammfunktion F von $f(x) = 8 \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{5} \cdot x - 42\,.$ Erinnere dich, dass $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ gilt.

$$F(x) = 8 \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{x^2}{2} - 42 \cdot x = 2 \cdot x^4 - \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{10} \cdot x^2 - 42 \cdot x$$

Hat f auch andere Stammfunktionen?

Vertikale Verschiebung

Die Graphen der Funktionen F und G unterscheiden sich um eine Verschiebung in vertikaler Richtung.
Der Graph von G entsteht durch Verschiebung des Graphen von F um $c = 10$ Einheiten nach oben.



An jeder Stelle x gilt also:

$$G(x) = F(x) + 10$$

Die Steigung bleibt dabei an jeder Stelle gleich.
An jeder Stelle x gilt also:

$$G'(x) = F'(x)$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist also auch $G = F + c$ eine Stammfunktion von f.

Tatsächlich unterscheiden sich je zwei Stammfunktionen einer stetigen Funktion auf einem Intervall nur um eine Konstante.

Stammfunktion mit Nebenbedingung

Ermittle jene Stammfunktion F von $f(x) = x^3 - 6 \cdot x + \frac{1}{2}$, die $F(4) = 2$ erfüllt.

$$F(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x + c$$

$$F(4) = 2 \implies \frac{4^4}{4} - 3 \cdot 4^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 + c = 2 \implies c = -16$$

$$\implies F(x) = \frac{x^4}{4} - 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot x - 16$$

Stammfunktion einer Stammfunktion

Ermittle jene Funktion f, die $f''(x) = 18 \cdot x$ sowie $f(0) = -2$ und $f(1) = 5$ erfüllt.

$$f''(x) = 18 \cdot x \implies f'(x) = 9 \cdot x^2 + c \implies f(x) = 3 \cdot x^3 + c \cdot x + d$$

$$f(0) = -2 \implies d = -2$$

$$f(1) = 5 \implies 3 + c - 2 = 5 \implies c = 4$$

$$\implies f(x) = 3 \cdot x^3 + 4 \cdot x - 2$$

Stammfunktion einer Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v

Für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v bei einer Bremsung gilt:

$$v(t) = 18 - 6 \cdot t$$

$t\ldots$ Zeit ab Beginn der Bremsung in Sekunden $(t \geq 0)$
$v(t)\ldots$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in m/s

1) Wie viele Sekunden dauert es, bis das Auto still steht?

$$v(t) = 0 \iff 18 - 6 \cdot t = 0 \iff t = 3\,\text{s}$$

2) Für die zugehörige Weg-Zeit-Funktion s gilt $s'(t) = v(t)$ und $s(0) = 0\,\text{m}$.
Ermittle eine Funktionsgleichung von s.

$$s(t) = 18 \cdot t - 3 \cdot t^2 + c$$

$$s(0) = 0 \implies c = 0 \implies s(t) = 18 \cdot t - 3 \cdot t^2$$

3) Berechne die absolute Änderung der Weg-Zeit-Funktion s im Intervall $[0\,\text{s}; 3\,\text{s}]$.
Interpretiere das Ergebnis unter Verwendung der Einheiten im Sachzusammenhang.

$s(3) - s(0) = 27 - 0 = 27\,\text{m}$ Der Bremsweg des Autos hat die Länge 27 m.

Allgemein hat die absolute Änderung $F(b) - F(a)$ einer Stammfunktion F von f auch eine grafische Bedeutung für f.
Mehr dazu findest am Arbeitsblatt – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

Stammfunktion einer Beschleunigung-Zeit-Funktion a

Für die Beschleunigung-Zeit-Funktion a eines Autos gilt:

$$a(t) = \frac{1}{2} \cdot t + 2$$

$t\ldots$ Zeit ab Beginn der Beschleunigung in Sekunden $(t \geq 0)$
$a(t)\ldots$ Beschleunigung zum Zeitpunkt t in m/s^2

1) Für die zugehörige Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v gilt $v'(t) = a(t)$ und $v(0) = 15\,\text{m/s}$.
Ermittle eine Funktionsgleichung von v.

$$v(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + 2 \cdot t + c$$

$$v(0) = 15 \implies c = 15 \implies v(t) = \frac{1}{4} \cdot t^2 + 2 \cdot t + 15$$

2) Berechne die absolute Änderung der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v im Intervall $[0\,\text{s}; 6\,\text{s}]$.
Interpretiere das Ergebnis unter Verwendung der Einheiten im Sachzusammenhang.

$v(6) - v(0) = 36 - 15 = 21\,\text{m/s}$ Das Auto beschleunigt in $[0\,\text{s}; 6\,\text{s}]$ um 21 m/s.

3) Wie viele Meter legt das Auto im Intervall $[0\,\text{s}; 6\,\text{s}]$ zurück?

$$s'(t) = v(t) \implies s(t) = \frac{1}{12} \cdot t^3 + t^2 + 15 \cdot t$$

$$s(6) - s(0) = 144 - 0 = 144\,\text{m}$$

Stammfunktionen von elementaren Funktionen

In der 1. Spalte der folgenden Tabelle aus der Formelsammlung sind elementare Funktionen aufgelistet.
In der 2. Spalte ist jeweils die zugehörige Ableitungsfunktion angegeben.
In der 3. Spalte ist jeweils eine zugehörige Stammfunktion angegeben.

Funktion	Ableitungsfunktion	Stammfunktion
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	$F(x) = k \cdot x$
$f(x) = x^q$	$f'(x) = q \cdot x^{q-1}$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$ für $q = -1$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
$f(x) = \log_a(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
$f(x) = \sin(x)$	$f'(x) = \cos(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
$f(x) = \cos(x)$	$f'(x) = -\sin(x)$	$F(x) = \sin(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$F(x) = -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$
$g(x) = k \cdot f(x)$	$g'(x) = k \cdot f'(x)$	$G(x) = k \cdot F(x)$
$h(x) = f(x) \pm g(x)$	$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$	$H(x) = F(x) \pm G(x)$
$g(x) = f(k \cdot x)$	$g'(x) = k \cdot f'(k \cdot x)$	$G(x) = \frac{1}{k} \cdot F(k \cdot x)$

Stammfunktionen von elementaren Funktionen

Ermittle alle Stammfunktionen F der gegebenen Funktion f.

a) $f(x) = 6 \cdot x^2 + \dfrac{6}{x^2} = 6 \cdot x^2 + 6 \cdot x^{-2} \implies F(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x^{-1} + c$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x} = x^{-3} + x^{-1} \implies F(x) = -\dfrac{1}{2} \cdot x^{-2} + \ln(|x|) + c$

c) $f(x) = \sqrt{x} + 5 = x^{\frac{1}{2}} + 5 \implies F(x) = \dfrac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + 5 \cdot x + c$

d) $f(x) = \sqrt[3]{x^4} = x^{\frac{4}{3}} \implies F(x) = \dfrac{3}{7} \cdot x^{\frac{7}{3}} + c$

e) $f(x) = 4 \cdot e^x \implies F(x) = 4 \cdot e^x + c$

f) $f(x) = e^{4 \cdot x} \implies F(x) = \dfrac{1}{4} \cdot e^{4 \cdot x} + c$

g) $f(x) = 42 \cdot \cos(x) \implies F(x) = 42 \cdot \sin(x) + c$

h) $f(x) = \cos(42 \cdot x) \implies F(x) = \dfrac{1}{42} \cdot \sin(42 \cdot x) + c$

i) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{5} \implies F(x) = \dfrac{-\cos(x)}{5} + c$

j) $f(x) = \sin\left(\dfrac{x}{5}\right) \implies F(x) = -5 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{5}\right) + c$

Für das Ermitteln von Stammfunktionen verwenden manche auch die Schreibweise

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c$$

und sprechen vom **unbestimmten Integral**.

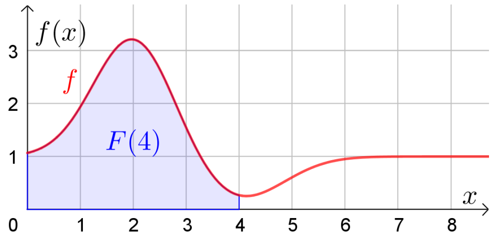
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

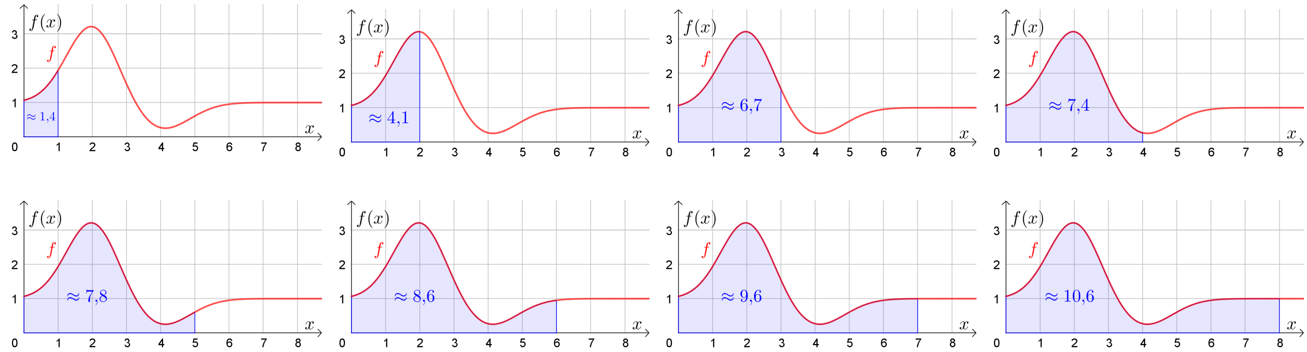
Ein Meilenstein der Mathematik ist die folgende Entdeckung aus dem 17. Jahrhundert:

Rechts ist der Graph einer stetigen Funktion f dargestellt.

$F(x)$ ist der Flächeninhalt, den der Graph von f mit der waagrechten Achse im Intervall $[0; x]$ einschließt.

Rechts ist zum Beispiel $F(4) \approx 7{,}4$ veranschaulicht – unten die Werte $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$, $\ldots$, $F(8)$.



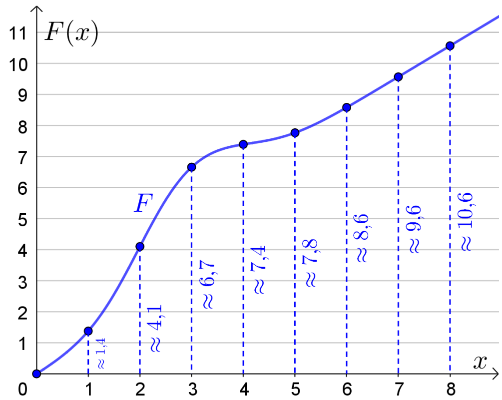


Der Graph der Funktion F ist rechts dargestellt.

F hat im dargestellten Bereich die folgenden Eigenschaften:

- F ist streng monoton wachsend.
- An der Stelle $x = 2$ hat die Steigung von F – also F' – ein lokales Maximum.
- An der Stelle $x = 4$ hat die Steigung von F – also F' – ein lokales Minimum.

Tatsächlich ist F jene Stammfunktion von f mit $F(0) = 0$.

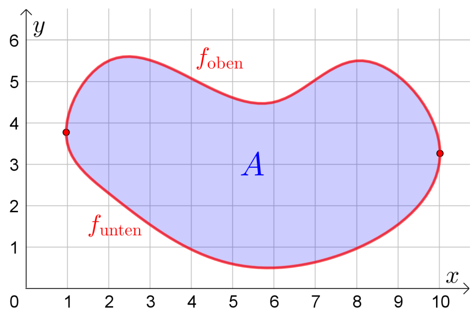


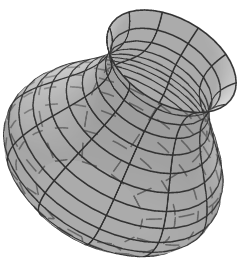
Mehr zu diesem entdeckten Zusammenhang zwischen der Berechnung von Flächeninhalten und Stammfunktionen erfährst du am AB – Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

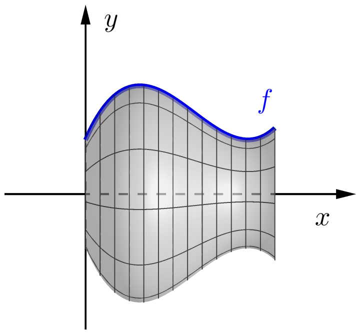
Die rechts dargestellte Fläche wird von den Graphen der Funktionen f_{oben} und f_{unten} berandet.

Mithilfe von Stammfunktionen von f_{oben} bzw. f_{unten} und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung können wir den Flächeninhalt A im *Handumdrehen* berechnen.

Mehr dazu erfährst du am AB – Kulturtechnik Integration, am AB – Bestimmtes Integral und am AB – Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen.







Die Kontur der links dargestellten Vase wird mit einer Funktion f modelliert.

Mithilfe einer Stammfunktion von f^2 und dem Hauptsatz können wir ihr Volumen im *Handumdrehen* berechnen.

Mehr dazu folgt am AB – Rotationsvolumen.