Stammfunktion

Zu einer gegebenen Funktion f suchen wir eine Funktion F, die $\boldsymbol{F' = f}$ erfüllt.
Eine solche Funktion $\boldsymbol{F}$ nennen wir **Stammfunktion von $\boldsymbol{f}$**.

Aufleiten

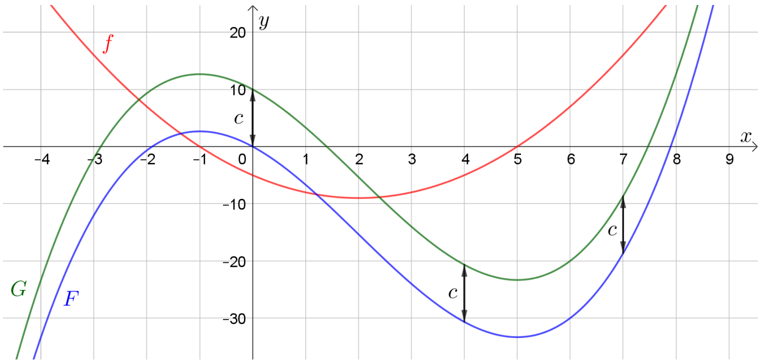
Ermittle eine Stammfunktion F von $f(x) = 8 \cdot x^3 - x^2 + \frac{1}{5} \cdot x - 42$.

In Anlehnung zum „Ableiten“ sprechen manche hier umgekehrt vom „Aufleiten“. Hat f auch andere Stammfunktionen?

Vertikale Verschiebung

Zwei Funktionen F und G unterscheiden sich graphisch nur um eine Verschiebung in vertikaler Richtung.

Der Graph von G entsteht durch Verschiebung des Graphen von F um c Einheiten nach oben.



Es gilt also:

$$G(x) = F(x) \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Beim vertikalen Verschieben bleibt die Steigung an jeder Stelle gleich.

Es gilt also:

$$G'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist also auch $G = F + c$ eine Stammfunktion von f.

Tatsächlich unterscheiden sich *alle* Stammfunktionen einer stetigen Funktion nur um vertikale Verschiebungen.

(4 | 2)

Ermittle jene Stammfunktion F von $f(x) = 3 \cdot e^x - 8 \cdot x + 7$, die $F(4) = 2$ erfüllt.

Differentialgleichung

Ermittle jene Funktion f, die $f''(x) = 18 \cdot x$ sowie $f(0) = -2$ und $f(1) = 5$ erfüllt.

Stammfunktionen der elementaren Funktionen

Links sind die Regeln zur Berechnung von Stammfunktionen aus der Formelsammlung dargestellt. Überprüfe sie jeweils mit den Ableitungsregeln. Eine Erklärung für $f(x) = x^{-1}$ bzw. $f(x) = \tan(x)$ findest du unten.

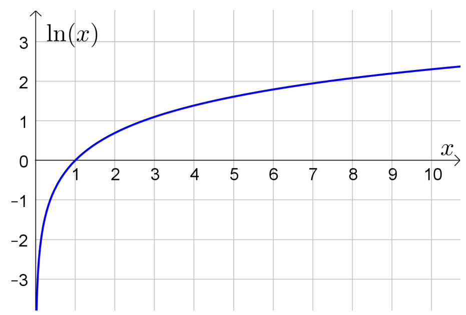
	Funktion f	Stammfunktion F
1)	$f(x) = k$	$F(x) = k \cdot x$
2)	$f(x) = x^q$	$F(x) = \frac{x^{q+1}}{q+1}$ für $q \neq -1$ $F(x) = \ln(\lvert x \rvert)$ für $q = -1$
3)	$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$
4)	$f(x) = a^x$	$F(x) = \frac{a^x}{\ln(a)}$
5)	$f(x) = \ln(x)$	$F(x) = x \cdot \ln(x) - x$
6)	$f(x) = \log_a(x)$	$F(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot (x \cdot \ln(x) - x)$
7)	$f(x) = \sin(x)$	$F(x) = -\cos(x)$
8)	$f(x) = \cos(x)$	$F(x) = \sin(x)$
9)	$f(x) = \tan(x)$	$F(x) = -\ln(\lvert \cos(x) \rvert)$

Stammfunktion von $x \mapsto x^{-1}$

Erinnere dich, dass die Funktion F mit

$$F(x) = \ln(x) = \log_e(x)$$

nur für $x > 0$ definiert ist. e = 2,718 28... ist die Eulersche Zahl.



Es gilt $F(1) = \log_e(1) =$ ______ , weil $e^{\square} = 1$.

Es gilt $F(e) = \log_e(e) =$ ______ , weil $e^{\square} = e$.

Ihre Ableitungsfunktion ist $F'(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Mehr dazu erfährst du am AB – Natürlicher Logarithmus.

Die Funktion G mit $G(x) = \ln(-x)$ ist nur für x ____ 0 definiert. Berechne ihre Ableitungsfunktion:

$$G'(x) =$$

Die Funktion H mit $H(x) = \ln(|x|)$ ist für x ____ 0 definiert und eine Stammfunktion von $h(x) = \frac{1}{x}$.

Stammfunktion von $x \mapsto \tan(x)$

Rechne nach, dass $F(x) = -\ln(|\cos(x)|)$ eine Stammfunktion von $f(x) = \tan(x)$ ist.