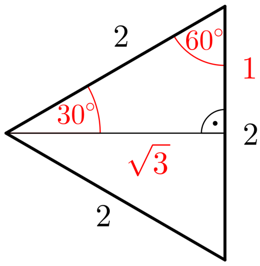
$\sin(\alpha+\beta)$ / $\sin(\alpha)+\sin(\beta)$ MmF



Zeige ohne Taschenrechner, dass $\sin(30^\circ)+\sin(30^\circ)\neq\sin(60^\circ)$ gilt:

$$\sin(30^\circ)+\sin(30^\circ)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\sin(30^\circ+30^\circ)=\sin(60^\circ)=\frac{\sqrt{3}}{2}<\frac{\sqrt{4}}{2}=1$$

Summensätze für Winkelfunktionen MmF

Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Winkelfunktionen gelten für alle Winkel α und β:

i) $\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$

ii) $\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$

iii) $\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}}$

Trigonometrische Identität MmF

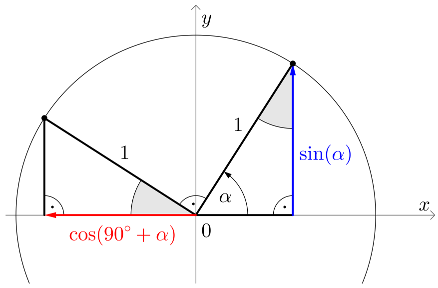
Allgemein gilt: $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin(\alpha)$

1) Begründe diese Behauptung für spitze Winkel α mit den Winkelfunktionen am Einheitskreis.

Die beiden grau markierten Winkel sind gleich groß, nämlich:

$$180^\circ-90^\circ-\alpha=90^\circ-\alpha$$

Die beiden Dreiecke sind also zueinander kongruent.
Die x-Koordinate vom linken Punkt am Einheitskreis ist also betragsmäßig gleich groß wie die y-Koordinate vom rechten Punkt am Einheitskreis, nur mit anderem Vorzeichen.
Daraus folgt: $\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin(\alpha)$



2) Begründe diese Behauptung mithilfe der Summensätze.

$$\cos(90^\circ+\alpha)=\underbrace{\cos(90^\circ)}_{=0}\cdot\cos(\alpha)-\underbrace{\sin(90^\circ)}_{=1}\cdot\sin(\alpha)=-\sin(\alpha)$$

Summensätze für Winkelfunktionen MmF

Für die Winkelfunktionen gilt: **1)** $\sin(-\beta)=-\sin(\beta)$ **2)** $\cos(-\beta)=\cos(\beta)$ **3)** $\tan(-\beta)=-\tan(\beta)$
Stelle jeweils mithilfe von $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$, $\tan(\alpha)$ und $\tan(\beta)$ eine Formel auf.

a) $\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

b) $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)$

c) $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$

Doppelwinkelfunktionen

Stelle jeweils mithilfe von $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ und $\tan(\alpha)$ eine Formel auf.

a) $\sin(2\cdot\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)$

b) $\cos(2\cdot\alpha) = \cos(\alpha+\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$

c) $\tan(2\cdot\alpha) = \tan(\alpha+\alpha) = \dfrac{2\cdot\tan(\alpha)}{1-\tan^2(\alpha)}$

Vermutung → Beweis

Den folgenden Ausdruck kann man auch einfacher anschreiben.
Stelle mit dem Taschenrechner eine Vermutung auf und beweise sie.

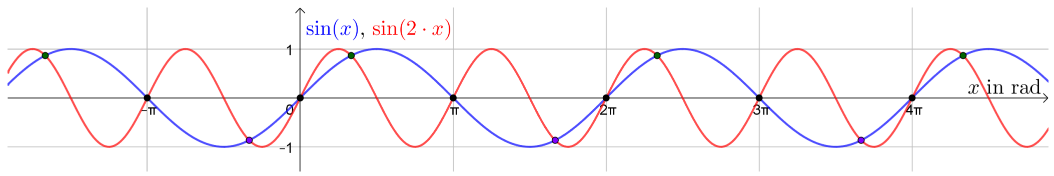
$\sin(2\cdot\alpha)\cdot\tan(\alpha) + \cos(2\cdot\alpha) = 1$ für alle Winkel $\alpha\in\mathbb{R}$

$$\sin(2\cdot\alpha)\cdot\tan(\alpha) + \cos(2\cdot\alpha) = 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\underbrace{\cos(\alpha)\cdot\tan(\alpha)}_{\sin(\alpha)} + \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) =$$

$$= \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$$

Goniometrische Gleichung

Löse die goniometrische Gleichung $\sin(2\cdot x) = \sin(x)$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$. (Winkel im Bogenmaß)
Gesucht sind also alle Schnittstellen der dargestellten Funktionen $x\mapsto\sin(x)$ und $x\mapsto\sin(2\cdot x)$:



Aus den Summensätzen folgt: $\sin(2\cdot x) = 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)$
Bevor wir beide Seiten der Gleichung

$$2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) = \sin(x) \qquad (\star)$$

durch $\sin(x)$ dividieren, müssen wir 2 Fälle unterscheiden:

Fall 1: $\sin(x) = 0$
Jeder Winkel x mit dieser Eigenschaft, ist eine Lösung von $(\star)$, weil $2\cdot 0\cdot\cos(x) = 0$ gilt.
Also sind alle Winkel $x = k\cdot\pi$ rad mit $k\in\mathbb{Z}$ Lösungen der Gleichung.

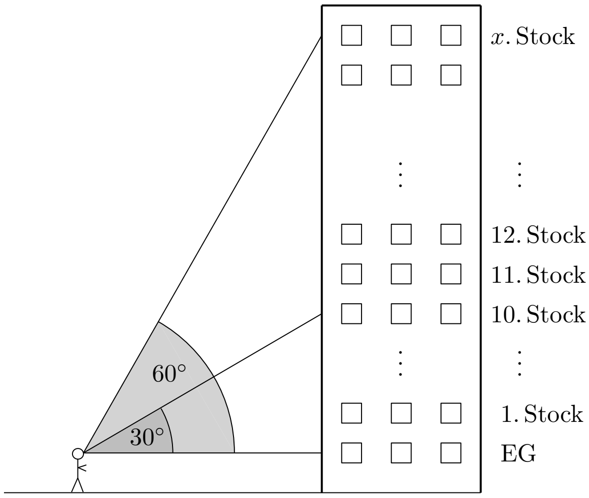
Fall 2: $\sin(x)\neq 0$
In diesem Fall ist die Division durch $\sin(x)$ eine Äquivalenzumformung und wir erhalten:

$$2\cdot\cos(x) = 1 \iff \cos(x) = \frac{1}{2}$$

Die „Bergab-Lösungen“ davon sind alle Winkel $x = \arccos(\frac{1}{2}) + k\cdot 2\cdot\pi = 1{,}047... + k\cdot 2\cdot\pi$ rad.
Die „Bergauf-Lösungen“ davon sind alle Winkel $x = 2\cdot\pi - \arccos(\frac{1}{2}) + k\cdot 2\cdot\pi = 5{,}235... + k\cdot 2\cdot\pi$ rad.

Steigungswinkel verdoppeln

Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend das Erdgeschoß.
Den 10. Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 30°.
Welchen Stock siehst du unter dem Höhenwinkel 60°?
Alle Stockwerke sind gleich hoch und das Gebäude steht senkrecht.



$h\dots$ Höhe pro Stockwerk
$d\dots$ horizontale Entfernung vom Gebäude

$$\mathrm{I}:\ \tan(30^\circ) = \frac{10\cdot h}{d} \quad\Longrightarrow\quad \frac{d}{h} = \frac{10}{\tan(30^\circ)}$$

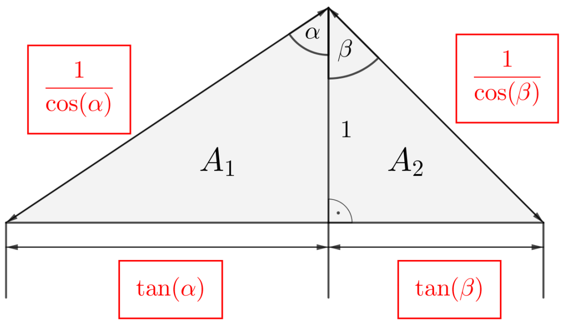
$$\mathrm{II}:\ \tan(60^\circ) = \frac{x\cdot h}{d}$$

$$\Longrightarrow\ x = \frac{\tan(60^\circ)\cdot d}{h} = \frac{\tan(60^\circ)\cdot 10}{\tan(30^\circ)} = 30$$

Man sieht den 30. Stock unter dem Höhenwinkel 60°.

Beweis eines Summensatzes

Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel α und β.



1) Beschrifte die vier Längen links mithilfe von α und β.

2) Stelle mithilfe von α und β eine Formel für die Flächeninhalte A_1 und A_2 auf:

$$A_1 = \frac{\tan(\alpha)}{2} \qquad A_2 = \frac{\tan(\beta)}{2}$$

3) Stelle mithilfe der trigonometrischen Flächenformel eine Formel für $A_1 + A_2$ auf:

$$A_1 + A_2 = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)}$$

4) Begründe mithilfe **2)** und **3)** den Summensatz

$$\boldsymbol{\sin(\alpha+\beta) = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\sin(\beta)}$$

für alle spitzen Winkel α und β.

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cdot\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)} = \frac{\tan(\alpha)}{2} + \frac{\tan(\beta)}{2}$$

$$\Longrightarrow\ \sin(\alpha+\beta) = \underbrace{\tan(\alpha)\cdot\cos(\alpha)}_{=\sin(\alpha)}\cdot\cos(\beta) + \cos(\alpha)\cdot\underbrace{\tan(\beta)\cdot\cos(\beta)}_{=\sin(\beta)}\ \checkmark$$