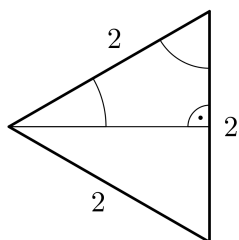


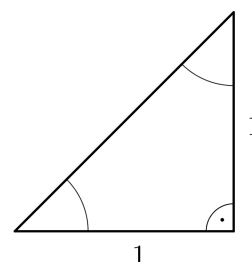
Winkelfunktionen



Gilt  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) + \sin(\beta)$  allgemein?  
 Berechne ohne Taschenrechner:

$$\sin(30^\circ + 30^\circ) =$$

$$\sin(30^\circ) + \sin(30^\circ) =$$



Summensätze für Winkelfunktionen



Die **Summensätze (Additionstheoreme)** für Winkelfunktionen gelten für alle Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ :

1)  $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

2)  $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

3)  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)}$$

$$\sin(-\beta) = -\sin(\beta), \cos(-\beta) = \cos(\beta), \tan(-\beta) = -\tan(\beta)$$

Doppelwinkelfunktionen



Zerlege die folgenden Ausdrücke mit den Summensätzen:

1)  $\sin(2 \cdot \alpha) = \sin(\alpha + \alpha) =$

2)  $\cos(2 \cdot \alpha) =$

3)  $\tan(2 \cdot \alpha) =$

Vermutung → Beweis



Die folgenden Ausdrücke kann man auch einfacher anschreiben.

Stelle jeweils mit dem Taschenrechner eine Vermutung auf, und beweise sie mit den Summensätzen.

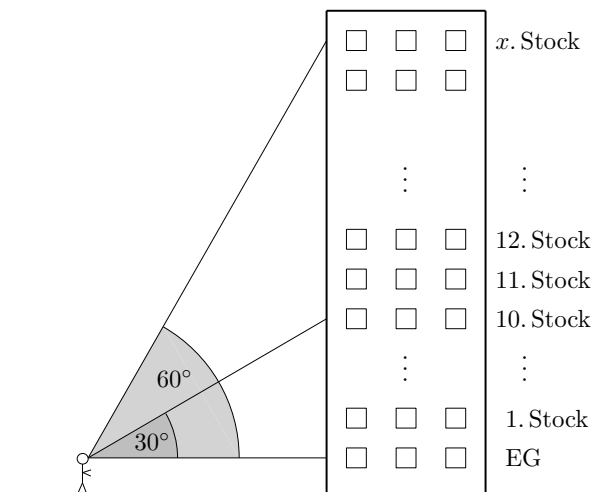
a)  $\sin(2 \cdot \alpha) \cdot \tan(\alpha) + \cos(2 \cdot \alpha)$       b)  $\sin(\alpha + 90^\circ) - \sin(\alpha - 90^\circ) - 2 \cdot \cos(\alpha)$

Steigungswinkel verdoppeln



Du stehst vor einem Wolkenkratzer und siehst geradeaus blickend das Erdgeschoß.  
Den 10. Stock siehst du unter dem Höhenwinkel  $30^\circ$ .  
Welchen Stock siehst du unter dem Höhenwinkel  $60^\circ$ ?

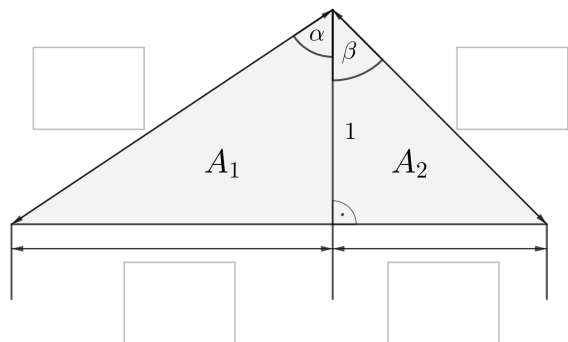
Alle Stockwerke sind gleich hoch.



Herleitung



Vom dargestellten Dreieck mit Höhe 1 kennst du die eingezeichneten Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ .



- 1) Beschrifte die vier Längen links mit Hilfe von  $\alpha$  und  $\beta$ .
- 2) Stelle mit Hilfe von  $\alpha$  und  $\beta$  eine Formel für die Flächeninhalte  $A_1$  und  $A_2$  auf:

$$A_1 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}} \quad A_2 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$$

- 3) Stelle mit der [trigonometrischen Flächenformel](#) eine Formel für  $A_1 + A_2$  auf:

$$A_1 + A_2 = \frac{\boxed{\phantom{000}}}{\boxed{\phantom{000}}}$$

- 4) Begründe mit 2) und 3) den Summensatz

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

für spitze Winkel  $\alpha$  und  $\beta$ .