



Die **Differentialgleichungen** (DGL)

$$1) y'(x) = x^2 \cdot y, \quad 2) y'(x) = 4 \cdot e^x \cdot y^2 \quad \text{und} \quad 3) y'(x) = \cos(x) \cdot (42 - y)$$

haben alle die Form $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$.

Für solche DGL kann die Lösungsmethode **Trennung der Variablen** zielführend sein.



Wir ermitteln die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0 \quad \text{Die Nullfunktion } y(x) = 0 \text{ ist eine sogenannte triviale Lösung dieser DGL.}$$

mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*:

- i) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ Forme die Differentialgleichung nach $y'(x)$ um.
- ii) $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$ Stelle $y'(x)$ in der **Differential-Schreibweise** $\frac{dy}{dx}$ dar.
- iii) $\int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx$ Trenne die Variablen: Bringe dazu nur mithilfe von Multiplikationen und Divisionen alle y -Terme auf die linke Seite, alle x -Terme auf die rechte Seite und **integriere**. Die Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$ ist nur auf einer Seite notwendig. Mehr Informationen zu diesen Schritten findest du am Ende des Arbeitsblatts.
- iv) $\ln(|y|) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$ Forme die erhaltene Gleichung nach y um.
Erinnere dich, dass $\odot \mapsto e^{\odot}$ die **Umkehrfunktion** von $\odot \mapsto \ln(\odot)$ ist.
- v) $|y| = e^{\frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1} = c_2 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}$ Verwende die **Rechenregel** $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ für Potenzen.
 Die positive Konstante e^{c_1} kannst du mit $c_2 = e^{c_1}$ abkürzen.
 Beim Weglassen der **Betragsstriche** kann sich nur das Vorzeichen ändern.
- vi) $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}$ mit $c \in \mathbb{R}$ Es gilt also: $c = \begin{cases} c_2, & \text{falls } y > 0 \\ -c_2, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$
 Der Fall $c = 0$ deckt die triviale Lösung $y(x) = 0$ ab.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0$ ist $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}$.

Wir führen die Probe durch:

$$y'(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2}_{\text{Kettenregel}} = x^2 \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}}_{=y(x)} \implies y'(x) = x^2 \cdot y(x) \implies y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0 \checkmark$$



Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) = 0$

mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

$$\begin{aligned} y'(x) &= -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) \\ \frac{dy}{dx} &= -2 \cdot \cos(x) \cdot y \\ \int \frac{1}{y} dy &= \int -2 \cdot \cos(x) dx \\ \ln(|y|) &= -2 \cdot \sin(x) + c_1 \\ |y| &= e^{-2 \cdot \sin(x) + c_1} = c_2 \cdot e^{-2 \cdot \sin(x)} \\ y(x) &= c \cdot e^{-2 \cdot \sin(x)} \end{aligned}$$



Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - y(x) = 0$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

$$\begin{aligned}
 y'(x) &= y(x) \\
 \frac{dy}{dx} &= 1 \cdot y \\
 \int \frac{1}{y} dy &= \int 1 dx \\
 \ln(|y|) &= x + c_1 \\
 |y| &= e^{x+c_1} = c_2 \cdot e^x \\
 y(x) &= c \cdot e^x
 \end{aligned}$$

Umkehrung der Kettenregel



Für die Funktion f mit $f(x) = e^{4x+2}$ gilt:

$$1) f'(x) = e^{4x+2} \cdot 4$$

Umgekehrt gilt also:

$$2) \int e^{4x+2} dx = e^{4x+2} \cdot \frac{1}{4} + c$$

Für die Funktion g mit $g(x) = \ln(|4 \cdot x + 2|)$ gilt:

$$1) g'(x) = \frac{1}{4 \cdot x + 2} \cdot 4$$

Umgekehrt gilt also:

$$2) \int \frac{1}{4 \cdot x + 2} dx = \ln(|4 \cdot x + 2|) \cdot \frac{1}{4} + c$$

Umkehrung der Kettenregel



Gegeben ist die Differentialgleichung $3 \cdot y(x) + y'(x) = 42$.

- Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 23$ erfüllt.

$$\begin{aligned}
 1) \quad & y'(x) = 42 - 3 \cdot y(x) \\
 & \frac{dy}{dx} = 1 \cdot (42 - 3 \cdot y) \\
 & \int \frac{1}{42 - 3 \cdot y} dy = \int 1 dx \\
 & \ln(|42 - 3 \cdot y|) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = x + c_1 \\
 & \ln(|42 - 3 \cdot y|) = -3 \cdot x + c_2 \\
 & |42 - 3 \cdot y| = e^{-3x+c_2} = c_3 \cdot e^{-3x} \\
 & 42 - 3 \cdot y = c_4 \cdot e^{-3x} \\
 & 42 - c_4 \cdot e^{-3x} = 3 \cdot y \\
 & y(x) = \frac{42 - c_4 \cdot e^{-3x}}{3} = 14 + c \cdot e^{-3x} \quad \left(\text{mit } c = -\frac{c_4}{3}\right)
 \end{aligned}$$

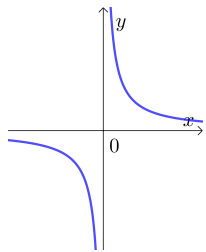
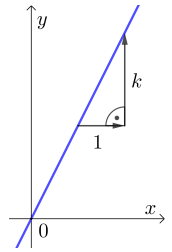
$$\begin{aligned}
 2) \quad & y(0) = 23 \iff 14 + c \cdot e^0 = 23 \iff c = 9 \\
 & \implies y(x) = 14 + 9 \cdot e^{-3x}
 \end{aligned}$$



Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **direkt proportionaler** Zusammenhang, wenn $\frac{y}{x} = k$ bzw. $y = k \cdot x$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt.

Dieser sogenannte **Proportionalitätsfaktor** k hängt also weder von x noch von y ab.

Die **Lösungen** der Gleichung $y = k \cdot x$ liegen auf einer **Gerade** mit **Steigung** k .



Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **indirekt proportionaler** Zusammenhang,

wenn $x \cdot y = k$ bzw. $y = \frac{k}{x}$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt, wobei $x, y \neq 0$.

Die **Lösungen** der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ liegen auf einer **Hyperbel**.



David trinkt einen Energy-Drink. Um 17 Uhr sind insgesamt 80 mg Koffein in seinem Körper. Die Funktion N gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der vorhandenen Koffeinmenge an.

$t \dots$ Zeit in Minuten ($t = 0$ ist 17 Uhr.)

$N(t) \dots$ Koffeinmenge in Davids Körper in mg zum Zeitpunkt t

Die **momentane Änderungsrate** der Koffeinmenge in Davids Körper ist direkt proportional zur aktuell vorhandenen Koffeinmenge in seinem Körper.

- 1) Stelle eine Differentialgleichung für N auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k . Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.
- 2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 3) Die Halbwertszeit von Koffein beträgt in Davids Körper 4 Stunden. Stelle eine Funktionsgleichung von N auf.

$$1) \underbrace{N'(t)}_{<0} = k \cdot \underbrace{N(t)}_{>0}$$

Damit das Vorzeichen auf beiden Seiten der DGL gleich ist, muss $k < 0$ gelten.

$$2) \quad \frac{dN}{dt} = k \cdot N$$

$$\int \frac{1}{N} dN = \int k dt$$

$$\ln(N) = k \cdot t + c_1$$

Wegen $N > 0$ sind die Betragsstriche nicht notwendig.

$$N(t) = e^{k \cdot t + c_1} = c \cdot e^{k \cdot t}$$

$$N(0) = 80 \iff c \cdot e^0 = 80 \iff c = 80$$

$$\implies N(t) = 80 \cdot e^{k \cdot t}$$

- 3) Nach einer Halbwertszeit sind nur mehr 40 mg Koffein in Davids Körper.

$$N(240) = 40 \iff 80 \cdot e^{240 \cdot k} = 40 \iff e^{240 \cdot k} = 0,5 \iff 240 \cdot k = \ln(0,5) \iff$$

$$\iff k = \frac{\ln(0,5)}{240} = -0,002888\dots$$

$$\implies N(t) = 80 \cdot e^{-0,002888\dots t}$$

Stefania stellt ein Getränk in einen Kühlschrank mit konstanter Umgebungstemperatur $T_U = 7^\circ\text{C}$.
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Getränketemperatur 26°C .

Die Funktion T gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Getränketemperatur an.

$t \dots$ Zeit in Stunden

$T(t) \dots$ Getränketemperatur in $^\circ\text{C}$ zum Zeitpunkt t

Die momentane Änderungsrate der Getränketemperatur ist direkt proportional zur Differenz zwischen der aktuellen Getränketemperatur und der Umgebungstemperatur.

- 1) Stelle eine Differentialgleichung für T auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k .
Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.
- 2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 3) Nach 2 Stunden misst Stefania die Getränketemperatur 18°C .
Sie möchte das Getränk bei der Temperatur 10°C trinken. Wie lange muss Stefania noch warten?

$$1) \underbrace{T'(t)}_{<0} = k \cdot \underbrace{[T(t) - 7]}_{>0}$$

Damit das Vorzeichen auf beiden Seiten der DGL gleich ist, muss $k < 0$ gelten.

$$2) \quad \frac{dT}{dt} = k \cdot [T - 7]$$

$$\int \frac{1}{T-7} dT = \int k dt$$

$$\ln(T-7) = k \cdot t + c_1$$

Wegen $T > 7$ sind die Betragsstriche nicht notwendig.

$$T - 7 = e^{k \cdot t + c_1} = c \cdot e^{k \cdot t}$$

$$T(t) = 7 + c \cdot e^{k \cdot t}$$

$$T(0) = 26 \iff 7 + c \cdot e^0 = 26 \iff c = 19$$

$$\implies T(t) = 7 + 19 \cdot e^{k \cdot t}$$

- 3) Aus $T(2) = 18$ folgt:

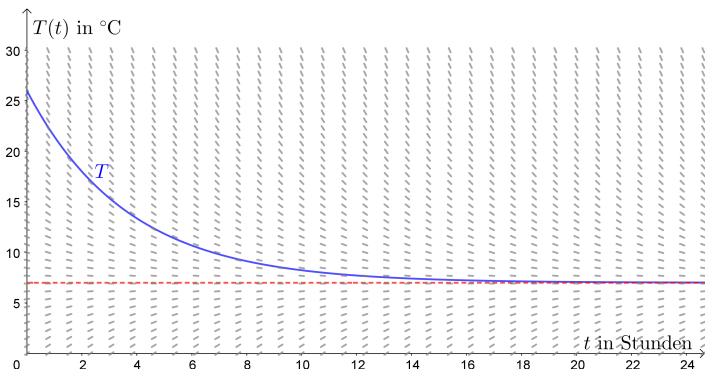
$$7 + 19 \cdot e^{2 \cdot k} = 18 \iff e^{2 \cdot k} = \frac{11}{19} \iff 2 \cdot k = \ln\left(\frac{11}{19}\right) \iff k = \frac{\ln\left(\frac{11}{19}\right)}{2} = -0,2732\dots$$

Wir lösen die Gleichung $T(t) = 10$:

$$7 + 19 \cdot e^{k \cdot t} = 10 \iff e^{k \cdot t} = \frac{3}{19} \iff k \cdot t = \ln\left(\frac{3}{19}\right) \iff t = \frac{\ln\left(\frac{3}{19}\right)}{k} = 6,754\dots \text{ h}$$

Stefania muss also noch 4,754... Stunden warten.

Das Richtungsfeld und die spezielle Lösung der DGL sind unten dargestellt.



Die Funktion h modelliert die Höhe einer wachsenden Pflanze in den ersten Monaten nach der Keimung.

$t \dots$ Zeit in Monaten seit der Keimung ($t > 0$)

$h(t) \dots$ Pflanzenhöhe in cm zum Zeitpunkt t

Die Funktion h ist eine Lösung der folgenden Differentialgleichung: $h'(t) = k \cdot \frac{h(t)}{t^3}$

- 1) Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.
- 2) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 3) Begründe, ob $h(t)$ in diesem Modell für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt wächst.

$$1) \underbrace{h'(t)}_{>0} = k \cdot \underbrace{\frac{h(t)}{t^3}}_{>0}$$

Damit das Vorzeichen auf beiden Seiten der DGL gleich ist, muss $k > 0$ gelten.

$$2) \quad \frac{dh}{dt} = k \cdot \frac{h}{t^3} = k \cdot h \cdot t^{-3}$$

$$\int \frac{1}{h} dh = \int k \cdot t^{-3} dt$$

$$\ln(h) = k \cdot t^{-2} \cdot \frac{1}{-2} + c_1 = -\frac{k}{2 \cdot t^2} + c_1 \quad \text{Wegen } h > 0 \text{ sind die Betragsstriche nicht notwendig.}$$

$$h(t) = e^{-\frac{k}{2 \cdot t^2} + c_1} = c \cdot e^{-\frac{k}{2 \cdot t^2}}$$

$$3) \text{ Für } t \rightarrow \infty \text{ gilt } -\frac{k}{2 \cdot t^2} \rightarrow 0 \text{ und damit } h(t) \rightarrow c \cdot e^0 = c.$$

Das Wachstum ist in diesem Modell also nach oben beschränkt durch c .

Trennung der Variablen / Umkehrung der Kettenregel 

Wir haben die Differentialgleichung $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ rezeptartig durch *Trennung der Variablen* gelöst.

Die ersten Lösungsschritte davon stehen nochmal links unten.

Rechts daneben steht ein alternativer Lösungsweg, der ohne Operieren mit **Differentiellen** auskommt:

$$i) \quad y'(x) = x^2 \cdot y(x) \qquad y'(x) = x^2 \cdot y(x) \qquad | : y(x)$$

$$ii) \quad \frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y \qquad \frac{y'(x)}{y(x)} = x^2 \qquad | \int \dots dx$$

Gleiche Funktionen haben die gleichen **Stammfunktionen**.

$$iii) \quad \int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx \qquad \int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x^2 dx$$

$$iv) \quad \ln(|y|) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1 \qquad \ln(|y(x)|) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1 \qquad \text{Umkehrung der Kettenregel}$$

Hinter dem *Trennen der Variablen* steckt also die Umkehrung der Kettenregel.

