Trennung der Variablen

Die Differentialgleichungen (DGL)

1) $y'(x) = x^2 \cdot y$, **2)** $y'(x) = 4 \cdot e^x \cdot y^2$ und **3)** $y'(x) = \cos(x) \cdot (42 - y)$

haben alle die Form $\boldsymbol{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$.

Für solche DGL kann die Lösungsmethode **Trennung der Variablen** zielführend sein.

Trennung der Variablen

Wir ermitteln die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0$$

Die Nullfunktion $y(x) = 0$ ist eine sogenannte triviale Lösung dieser DGL.

mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*:

i) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ — Forme die Differentialgleichung nach $y'(x)$ um.

ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \cdot y$ — Stelle $y'(x)$ in der Differential-Schreibweise $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dar.

iii) $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x$ — Trenne die Variablen: Bringe dazu nur mithilfe von Multiplikationen und Divisionen alle y-Terme auf die linke Seite, alle x-Terme auf die rechte Seite und integriere.
Die Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$ ist nur auf einer Seite notwendig.
Mehr Informationen zu diesen Schritten findest du am Ende des Arbeitsblatts.

iv) $\ln(|y|) = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$ — Forme die erhaltene Gleichung nach y um.
Erinnere dich, dass ☺ $\mapsto e^{☺}$ die Umkehrfunktion von ☺ $\mapsto \ln(☺)$ ist.

v) $|y| = e^{\frac{1}{3}\cdot x^3 + c_1} = c_2 \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}$ — Verwende die Rechenregel $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ für Potenzen.
Die positive Konstante e^{c_1} kannst du mit $c_2 = e^{c_1}$ abkürzen.

vi) $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}$ mit $c \in \mathbb{R}$ — Beim Weglassen der Betragsstriche kann sich nur das Vorzeichen ändern.
Es gilt also: $c = \begin{cases} c_2, & \text{falls } y > 0 \\ -c_2, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$
Der Fall $c = 0$ deckt die triviale Lösung $y(x) = 0$ ab.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0$ ist $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}$.

Wir führen die Probe durch:

$$y'(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2}_{\text{Kettenregel}} = x^2 \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}}_{=y(x)} \implies y'(x) = x^2 \cdot y(x) \implies y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0 \checkmark$$

Trennung der Variablen

Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) = 0$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

$$y'(x) = -2 \cdot \cos(x) \cdot y(x)$$
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2 \cdot \cos(x) \cdot y$$
$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int -2 \cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\ln(|y|) = -2 \cdot \sin(x) + c_1$$
$$|y| = e^{-2\cdot\sin(x) + c_1} = c_2 \cdot e^{-2\cdot\sin(x)}$$
$$y(x) = c \cdot e^{-2\cdot\sin(x)}$$

Versteckte 1 MmF

Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - y(x) = 0$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

$$\begin{aligned} y'(x) &= y(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 \cdot y \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y &= \int 1\,\mathrm{d}x \\ \ln(|y|) &= x + c_1 \\ |y| &= e^{x+c_1} = c_2 \cdot e^x \\ y(x) &= c \cdot e^x \end{aligned}$$

Umkehrung der Kettenregel MmF

Für die Funktion f mit $f(x) = e^{4\cdot x+2}$ gilt:

1) $f'(x) = e^{4\cdot x+2} \cdot 4$

Umgekehrt gilt also:

2) $\int e^{4\cdot x+2}\,\mathrm{d}x = e^{4\cdot x+2} \cdot \frac{1}{4} + c$

Für die Funktion g mit $g(x) = \ln(|4 \cdot x + 2|)$ gilt:

1) $g'(x) = \frac{1}{4\cdot x+2} \cdot 4$

Umgekehrt gilt also:

2) $\int \frac{1}{4\cdot x+2}\,\mathrm{d}x = \ln(|4\cdot x+2|) \cdot \frac{1}{4} + c$

Umkehrung der Kettenregel MmF

Gegeben ist die Differentialgleichung $3 \cdot y(x) + y'(x) = 42$.

1) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

2) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 23$ erfüllt.

1)

$$\begin{aligned} y'(x) &= 42 - 3 \cdot y(x) \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 1 \cdot (42 - 3 \cdot y) \\ \int \frac{1}{42 - 3\cdot y}\,\mathrm{d}y &= \int 1\,\mathrm{d}x \\ \ln(|42 - 3 \cdot y|) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) &= x + c_1 \\ \ln(|42 - 3 \cdot y|) &= -3 \cdot x + c_2 \\ |42 - 3 \cdot y| &= e^{-3\cdot x + c_2} = c_3 \cdot e^{-3\cdot x} \\ 42 - 3 \cdot y &= c_4 \cdot e^{-3\cdot x} \\ 42 - c_4 \cdot e^{-3\cdot x} &= 3 \cdot y \\ y(x) &= \frac{42 - c_4 \cdot e^{-3\cdot x}}{3} = 14 + c \cdot e^{-3\cdot x} \qquad \left(\text{mit } c = -\frac{c_4}{3}\right) \end{aligned}$$

2) $y(0) = 23 \iff 14 + c \cdot e^0 = 23 \iff c = 9$

$\implies y(x) = 14 + 9 \cdot e^{-3\cdot x}$

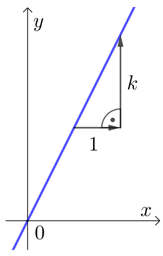
Proportionalität

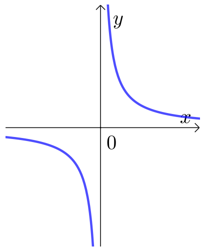
Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **direkt proportionaler** Zusammenhang,

wenn $\boldsymbol{\frac{y}{x} = k}$ bzw. $\boldsymbol{y = k \cdot x}$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt.

Dieser sogenannte **Proportionalitätsfaktor** k hängt also weder von x noch von y ab.

Die Lösungen der Gleichung $y = k \cdot x$ liegen auf einer **Gerade** mit Steigung k.





Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **indirekt proportionaler** Zusammenhang,

wenn $\boldsymbol{x \cdot y = k}$ bzw. $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt, wobei $x, y \neq 0$.

Die Lösungen der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ liegen auf einer **Hyperbel**.

Abbau von Koffein

David trinkt einen Energy-Drink. Um 17 Uhr sind insgesamt 80 mg Koffein in seinem Körper.
Die Funktion N gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der vorhandenen Koffeinmenge an.

$t \ldots$ Zeit in Minuten ($t = 0$ ist 17 Uhr.)
$N(t) \ldots$ Koffeinmenge in Davids Körper in mg zum Zeitpunkt t

Die momentane Änderungsrate der Koffeinmenge in Davids Körper ist direkt proportional zur aktuell vorhandenen Koffeinmenge in seinem Körper.

1) Stelle eine Differentialgleichung für N auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k. Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.

2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

3) Die Halbwertszeit von Koffein beträgt in Davids Körper 4 Stunden. Stelle eine Funktionsgleichung von N auf.

1) $\underbrace{N'(t)}_{<0} = k \cdot \underbrace{N(t)}_{>0}$

Damit das Vorzeichen auf beiden Seiten der DGL gleich ist, muss $k < 0$ gelten.

2)
$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = k \cdot N$$
$$\int \frac{1}{N}\,\mathrm{d}N = \int k\,\mathrm{d}t$$
$$\ln(N) = k \cdot t + c_1$$

Wegen $N > 0$ sind die Betragsstriche nicht notwendig.

$$N(t) = e^{k \cdot t + c_1} = c \cdot e^{k \cdot t}$$

$N(0) = 80 \iff c \cdot e^0 = 80 \iff c = 80$

$\implies N(t) = 80 \cdot e^{k \cdot t}$

3) Nach einer Halbwertszeit sind nur mehr 40 mg Koffein in Davids Körper.

$$N(240) = 40 \iff 80 \cdot e^{240 \cdot k} = 40 \iff e^{240 \cdot k} = 0{,}5 \iff 240 \cdot k = \ln(0{,}5) \iff$$
$$\iff k = \frac{\ln(0{,}5)}{240} = -0{,}002\,888\ldots$$

$\implies N(t) = 80 \cdot e^{-0{,}002\,888\ldots \cdot t}$

Newtonsches Abkühlungsgesetz

Stefania stellt ein Getränk in einen Kühlschrank mit konstanter Umgebungstemperatur $T_U = 7\,°\text{C}$.
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Getränketemperatur 26 °C.
Die Funktion T gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Getränketemperatur an.

$t\ldots$ Zeit in Stunden
$T(t)\ldots$ Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt t

Die momentane Änderungsrate der Getränketemperatur ist direkt proportional zur Differenz zwischen der aktuellen Getränketemperatur und der Umgebungstemperatur.

1) Stelle eine Differentialgleichung für T auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k.
Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.

2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

3) Nach 2 Stunden misst Stefania die Getränketemperatur 18 °C.
Sie möchte das Getränk bei der Temperatur 10 °C trinken. Wie lange muss Stefania noch warten?

1) $\underbrace{T'(t)}_{<0} = k \cdot \underbrace{[T(t) - 7]}_{>0}$

Damit das Vorzeichen auf beiden Seiten der DGL gleich ist, muss $k < 0$ gelten.

2)
$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} &= k \cdot [T - 7] \\ \int \frac{1}{T-7}\,\mathrm{d}T &= \int k\,\mathrm{d}t \\ \ln(T-7) &= k \cdot t + c_1 \\ T - 7 &= e^{k\cdot t + c_1} = c \cdot e^{k\cdot t} \\ T(t) &= 7 + c \cdot e^{k\cdot t} \end{aligned}$$

Wegen $T > 7$ sind die Betragsstriche nicht notwendig.

$T(0) = 26 \iff 7 + c \cdot e^0 = 26 \iff c = 19$

$\implies T(t) = 7 + 19 \cdot e^{k\cdot t}$

3) Aus $T(2) = 18$ folgt:

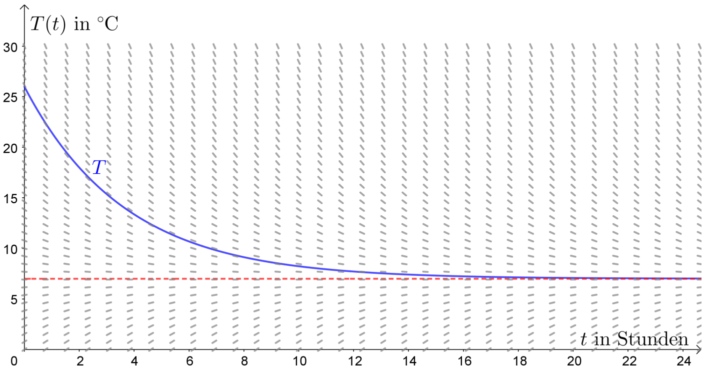
$$7 + 19 \cdot e^{2\cdot k} = 18 \iff e^{2\cdot k} = \frac{11}{19} \iff 2 \cdot k = \ln\left(\frac{11}{19}\right) \iff k = \frac{\ln\left(\frac{11}{19}\right)}{2} = -0{,}2732\ldots$$

Wir lösen die Gleichung $T(t) = 10$:

$$7 + 19 \cdot e^{k\cdot t} = 10 \iff e^{k\cdot t} = \frac{3}{19} \iff k \cdot t = \ln\left(\frac{3}{19}\right) \iff t = \frac{\ln\left(\frac{3}{19}\right)}{k} = 6{,}754\ldots\,\text{h}$$

Stefania muss also noch 4,754... Stunden warten.

Das Richtungsfeld und die spezielle Lösung der DGL sind unten dargestellt.



Pflanzenwachstum

Die Funktion h modelliert die Höhe einer wachsenden Pflanze in den ersten Monaten nach der Keimung.

$t\ldots$ Zeit in Monaten seit der Keimung ($t > 0$)
$h(t)\ldots$ Pflanzenhöhe in cm zum Zeitpunkt t

Die Funktion h ist eine Lösung der folgenden Differentialgleichung: $h'(t) = k \cdot \dfrac{h(t)}{t^3}$

1) Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.

2) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

3) Begründe, ob $h(t)$ in diesem Modell für $t \to \infty$ unbeschränkt wächst.

1) $\underbrace{h'(t)}_{>0} = k \cdot \underbrace{\dfrac{h(t)}{t^3}}_{>0}$

Damit das Vorzeichen auf beiden Seiten der DGL gleich ist, muss $k > 0$ gelten.

2)
$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = k \cdot \frac{h}{t^3} = k \cdot h \cdot t^{-3}$$
$$\int \frac{1}{h}\,\mathrm{d}h = \int k \cdot t^{-3}\,\mathrm{d}t$$
$$\ln(h) = k \cdot t^{-2} \cdot \frac{1}{-2} + c_1 = -\frac{k}{2 \cdot t^2} + c_1$$
Wegen $h > 0$ sind die Betragsstriche nicht notwendig.
$$h(t) = e^{-\frac{k}{2\cdot t^2} + c_1} = c \cdot e^{-\frac{k}{2\cdot t^2}}$$

3) Für $t \to \infty$ gilt $-\dfrac{k}{2 \cdot t^2} \to 0$ und damit $h(t) \to c \cdot e^0 = c$.

Das Wachstum ist in diesem Modell also nach oben beschränkt durch c.

Trennung der Variablen / Umkehrung der Kettenregel

Wir haben die Differentialgleichung $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ rezeptartig durch *Trennung der Variablen* gelöst.
Die ersten Lösungsschritte davon stehen nochmal links unten.
Rechts daneben steht ein alternativer Lösungsweg, der ohne Operieren mit Differentialen auskommt:

i)	$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$	$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$	$\mid : y(x)$
ii)	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \cdot y$	$\dfrac{y'(x)}{y(x)} = x^2$	$\mid \int \cdots \,\mathrm{d}x$ Gleiche Funktionen haben die gleichen Stammfunktionen.
iii)	$\int \dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x$	$\int \dfrac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x$	
iv)	$\ln(\lvert y\rvert) = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$	$\ln(\lvert y(x)\rvert) = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$	Umkehrung der Kettenregel

Hinter dem *Trennen der Variablen* steckt also die Umkehrung der Kettenregel.