



Die **Differentialgleichungen** (DGL)

$$1) y'(x) = x^2 \cdot y, \quad 2) y'(x) = 4 \cdot e^x \cdot y^2 \quad \text{und} \quad 3) y'(x) = \cos(x) \cdot (42 - y)$$

haben alle die Form $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$.

Für solche DGL kann die Lösungsmethode **Trennung der Variablen** zielführend sein.



Wir ermitteln die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0 \quad \text{Die Nullfunktion } y(x) = 0 \text{ ist eine sogenannte triviale Lösung dieser DGL.}$$

mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*:

i) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ Forme die Differentialgleichung nach $y'(x)$ um.

ii) $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$ Stelle $y'(x)$ in der **Differential-Schreibweise** $\frac{dy}{dx}$ dar.

iii) $\int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx$ Trenne die Variablen: Bringe dazu nur mithilfe von Multiplikationen und Divisionen alle y -Terme auf die linke Seite, alle x -Terme auf die rechte Seite und **integriere**. Die Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$ ist nur auf einer Seite notwendig. Mehr Informationen zu diesen Schritten findest du am Ende des Arbeitsblatts.

iv) $\ln(|y|) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$ Forme die erhaltene Gleichung nach y um.
Erinnere dich, dass $\odot \mapsto e^{\odot}$ die **Umkehrfunktion** von $\odot \mapsto \ln(\odot)$ ist.

v) $|y| = e^{\frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1} = c_2 \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}$ Verwende die **Rechenregel** $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ für Potenzen.
 Die positive Konstante e^{c_1} kannst du mit $c_2 = e^{c_1}$ abkürzen.

Beim Weglassen der **Betragsstriche** kann sich nur das Vorzeichen ändern.

vi) $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}$ mit $c \in \mathbb{R}$ Es gilt also: $c = \begin{cases} c_2, & \text{falls } y > 0 \\ -c_2, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$

Der Fall $c = 0$ deckt die triviale Lösung $y(x) = 0$ ab.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0$ ist $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}$.

Wir führen die Probe durch:

$$y'(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2}_{\text{Kettenregel}} = x^2 \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{1}{3} \cdot x^3}}_{=y(x)} \implies y'(x) = x^2 \cdot y(x) \implies y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0 \checkmark$$



Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) = 0$

mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.



Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - y(x) = 0$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

Umkehrung der Kettenregel



Für die Funktion f mit $f(x) = e^{4x+2}$ gilt:

1) $f'(x) = e^{4x+2} \cdot \boxed{}$

Umgekehrt gilt also:

2) $\int e^{4x+2} dx = e^{4x+2} \cdot \boxed{} + c$

Für die Funktion g mit $g(x) = \ln(|4 \cdot x + 2|)$ gilt:

1) $g'(x) = \frac{1}{4 \cdot x + 2} \cdot \boxed{}$

Umgekehrt gilt also:

2) $\int \frac{1}{4 \cdot x + 2} dx = \ln(|4 \cdot x + 2|) \cdot \boxed{} + c$

Umkehrung der Kettenregel



Gegeben ist die Differentialgleichung $3 \cdot y(x) + y'(x) = 42$.

- 1) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 2) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 23$ erfüllt.

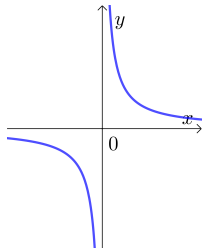
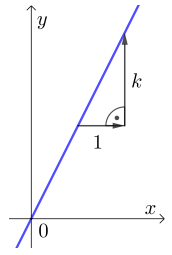


Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **direkt proportionaler** Zusammenhang,

wenn $\frac{y}{x} = k$ bzw. $y = k \cdot x$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt.

Dieser sogenannte **Proportionalitätsfaktor** k hängt also weder von x noch von y ab.

Die **Lösungen** der Gleichung $y = k \cdot x$ liegen auf einer **Gerade** mit **Steigung** k .



Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **indirekt proportionaler** Zusammenhang,

wenn $x \cdot y = k$ bzw. $y = \frac{k}{x}$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt, wobei $x, y \neq 0$.

Die **Lösungen** der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ liegen auf einer **Hyperbel**.



David trinkt einen Energy-Drink. Um 17 Uhr sind insgesamt 80 mg Koffein in seinem Körper.

Die Funktion N gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der vorhandenen Koffeinmenge an.

t ... Zeit in Minuten ($t = 0$ ist 17 Uhr.)

$N(t)$... Koffeinmenge in Davids Körper in mg zum Zeitpunkt t

Die **momentane Änderungsrate** der Koffeinmenge in Davids Körper ist direkt proportional zur aktuell vorhandenen Koffeinmenge in seinem Körper.

- 1) Stelle eine Differentialgleichung für N auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k . Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.
- 2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 3) Die Halbwertszeit von Koffein beträgt in Davids Körper 4 Stunden. Stelle eine Funktionsgleichung von N auf.

Stefania stellt ein Getränk in einen Kühlschrank mit konstanter Umgebungstemperatur $T_U = 7^\circ\text{C}$.
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Getränketemperatur 26°C .

Die Funktion T gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Getränketemperatur an.

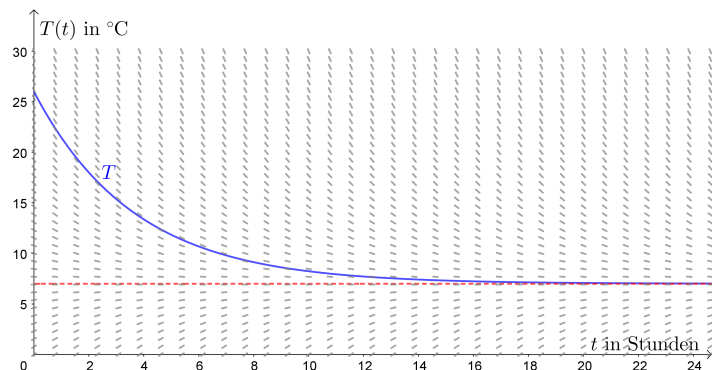
$t \dots$ Zeit in Stunden

$T(t) \dots$ Getränketemperatur in $^\circ\text{C}$ zum Zeitpunkt t

Die momentane Änderungsrate der Getränketemperatur ist direkt proportional zur Differenz zwischen der aktuellen Getränketemperatur und der Umgebungstemperatur.

- 1) Stelle eine Differentialgleichung für T auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k .
Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.
- 2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 3) Nach 2 Stunden misst Stefania die Getränketemperatur 18°C .
Sie möchte das Getränk bei der Temperatur 10°C trinken. Wie lange muss Stefania noch warten?

Das Richtungsfeld und die spezielle Lösung der DGL sind unten dargestellt.



Die Funktion h modelliert die Höhe einer wachsenden Pflanze in den ersten Monaten nach der Keimung.

$t \dots$ Zeit in Monaten seit der Keimung ($t > 0$)

$h(t) \dots$ Pflanzenhöhe in cm zum Zeitpunkt t

Die Funktion h ist eine Lösung der folgenden Differentialgleichung: $h'(t) = k \cdot \frac{h(t)}{t^3}$

- 1) Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.
- 2) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
- 3) Begründe, ob $h(t)$ in diesem Modell für $t \rightarrow \infty$ unbeschränkt wächst.

Trennung der Variablen / Umkehrung der Kettenregel

Wir haben die Differentialgleichung $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ rezeptartig durch *Trennung der Variablen* gelöst.

Die ersten Lösungsschritte davon stehen nochmal links unten.

Rechts daneben steht ein alternativer Lösungsweg, der ohne Operieren mit **Differentialen** auskommt:

- | | | |
|--|---|---------------------------|
| i) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ | $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ | : $y(x)$ |
| ii) $\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot y$ | $\frac{y'(x)}{y(x)} = x^2$ | $\int \dots dx$ |
| Gleiche Funktionen haben die gleichen Stammfunktionen . | | |
| iii) $\int \frac{1}{y} dy = \int x^2 dx$ | $\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int x^2 dx$ | |
| iv) $\ln(y) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$ | $\ln(y(x)) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$ | Umkehrung der Kettenregel |

Hinter dem *Trennen der Variablen* steckt also die Umkehrung der Kettenregel.

