Trennung der Variablen MmF

Die Differentialgleichungen (DGL)

1) $y'(x) = x^2 \cdot y$, **2)** $y'(x) = 4 \cdot e^x \cdot y^2$ und **3)** $y'(x) = \cos(x) \cdot (42 - y)$

haben alle die Form $\boldsymbol{y'(x) = f(x) \cdot g(y)}$.

Für solche DGL kann die Lösungsmethode **Trennung der Variablen** zielführend sein.

Trennung der Variablen MmF

Wir ermitteln die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0$$

Die Nullfunktion $y(x) = 0$ ist eine sogenannte triviale Lösung dieser DGL.

mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*:

i) $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ — Forme die Differentialgleichung nach $y'(x)$ um.

ii) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \cdot y$ — Stelle $y'(x)$ in der Differential-Schreibweise $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ dar.

iii) $\displaystyle\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x$ — Trenne die Variablen: Bringe dazu nur mithilfe von Multiplikationen und Divisionen alle y-Terme auf die linke Seite, alle x-Terme auf die rechte Seite und integriere. Die Integrationskonstante $c_1 \in \mathbb{R}$ ist nur auf einer Seite notwendig. Mehr Informationen zu diesen Schritten findest du am Ende des Arbeitsblatts.

iv) $\ln(|y|) = \dfrac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$ — Forme die erhaltene Gleichung nach y um. Erinnere dich, dass ☺ $\mapsto e^{☺}$ die Umkehrfunktion von ☺ $\mapsto \ln(☺)$ ist.

v) $|y| = e^{\frac{1}{3}\cdot x^3 + c_1} = c_2 \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}$ — Verwende die Rechenregel $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ für Potenzen. Die positive Konstante e^{c_1} kannst du mit $c_2 = e^{c_1}$ abkürzen.

vi) $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}$ mit $c \in \mathbb{R}$ — Beim Weglassen der Betragsstriche kann sich nur das Vorzeichen ändern. Es gilt also: $c = \begin{cases} c_2, & \text{falls } y > 0 \\ -c_2, & \text{falls } y < 0 \end{cases}$ Der Fall $c = 0$ deckt die triviale Lösung $y(x) = 0$ ab.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0$ ist $y(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}$.

Wir führen die Probe durch:

$$y'(x) = c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3} \cdot \underbrace{\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2}_{\text{Kettenregel}} = x^2 \cdot \underbrace{c \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot x^3}}_{=y(x)} \implies y'(x) - x^2 \cdot y(x) = 0 \checkmark$$

Trennung der Variablen MmF

Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) + 2 \cdot \cos(x) \cdot y(x) = 0$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

Versteckte 1

Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'(x) - y(x) = 0$ mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

Umkehrung der Kettenregel

Für die Funktion f mit $f(x) = e^{4\cdot x+2}$ gilt:

1) $f'(x) = e^{4\cdot x+2} \cdot \boxed{}$

Umgekehrt gilt also:

2) $\int e^{4\cdot x+2}\,\mathrm{d}x = e^{4\cdot x+2} \cdot \boxed{} + c$

Für die Funktion g mit $g(x) = \ln(|4\cdot x+2|)$ gilt:

1) $g'(x) = \dfrac{1}{4\cdot x+2} \cdot \boxed{}$

Umgekehrt gilt also:

2) $\int \dfrac{1}{4\cdot x+2}\,\mathrm{d}x = \ln(|4\cdot x+2|) \cdot \boxed{} + c$

Umkehrung der Kettenregel

Gegeben ist die Differentialgleichung $3\cdot y(x) + y'(x) = 42$.

1) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

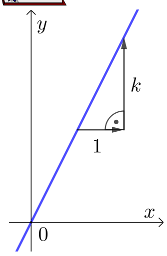
2) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 23$ erfüllt.

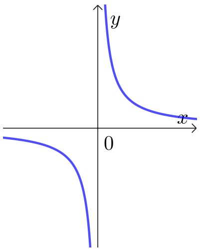
Proportionalität

Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **direkt proportionaler** Zusammenhang, wenn $\boldsymbol{\frac{y}{x} = k}$ bzw. $\boldsymbol{y = k \cdot x}$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt.

Dieser sogenannte **Proportionalitätsfaktor** k hängt also weder von x noch von y ab.

Die Lösungen der Gleichung $y = k \cdot x$ liegen auf einer **Gerade** mit Steigung k.





Zwischen zwei Größen x und y besteht ein **indirekt proportionaler** Zusammenhang, wenn $\boldsymbol{x \cdot y = k}$ bzw. $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$ mit einer Konstante $k \neq 0$ gilt, wobei $x, y \neq 0$.

Die Lösungen der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ liegen auf einer **Hyperbel**.

Abbau von Koffein

David trinkt einen Energy-Drink. Um 17 Uhr sind insgesamt 80 mg Koffein in seinem Körper.
Die Funktion N gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der vorhandenen Koffeinmenge an.

t ... Zeit in Minuten ($t = 0$ ist 17 Uhr.)
$N(t)$ ... Koffeinmenge in Davids Körper in mg

Die momentane Änderungsrate der Koffeinmenge in Davids Körper ist direkt proportional zur aktuell vorhandenen Koffeinmenge in seinem Körper.

1) Stelle eine Differentialgleichung für N auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k.
Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.

2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

3) Die Halbwertszeit von Koffein beträgt in Davids Körper 4 Stunden.
Stelle eine Funktionsgleichung von N auf.

Newtonsches Abkühlungsgesetz

Stefania stellt ein Getränk in einen Kühlschrank mit konstanter Umgebungstemperatur $T_U = 7\,°\text{C}$.
Zu Beginn ($t = 0$) beträgt die Getränketemperatur $26\,°\text{C}$.
Die Funktion T gibt den Zusammenhang zwischen der Zeit und der Getränketemperatur an.

$t \ldots$ Zeit in Stunden
$T(t) \ldots$ Getränketemperatur in °C

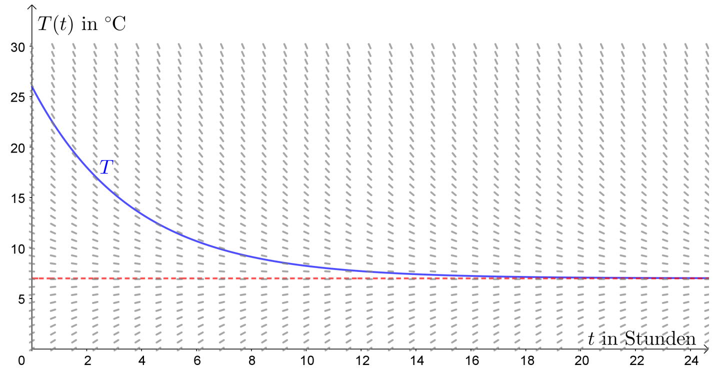
Die momentane Änderungsrate der Getränketemperatur ist direkt proportional zur Differenz zwischen der aktuellen Getränketemperatur und der Umgebungstemperatur.

1) Stelle eine Differentialgleichung für T auf. Bezeichne den Proportionalitätsfaktor mit k.
Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.

2) Ermittle die spezielle Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

3) Nach 2 Stunden misst Stefania die Getränketemperatur $18\,°\text{C}$.
Sie möchte das Getränk bei der Temperatur $10\,°\text{C}$ trinken. Wie lange muss Stefania noch warten?

Das Richtungsfeld und die spezielle Lösung der DGL sind unten dargestellt.



Pflanzenwachstum

Die Funktion h modelliert die Höhe einer wachsenden Pflanze in den ersten Monaten nach der Keimung.

$t\ldots$ Zeit in Monaten seit der Keimung $(t > 0)$
$h(t)\ldots$ Pflanzenhöhe in cm

Die Funktion h ist eine Lösung der folgenden Differentialgleichung: $h'(t) = k \cdot \dfrac{h(t)}{t^3}$

1) Begründe anhand der Differentialgleichung, ob k positiv oder negativ sein muss.

2) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

3) Begründe, ob $h(t)$ in diesem Modell für $t \to \infty$ unbeschränkt wächst.

Trennung der Variablen / Umkehrung der Kettenregel

Wir haben die Differentialgleichung $y'(x) = x^2 \cdot y(x)$ rezeptartig durch *Trennung der Variablen* gelöst.
Die ersten Lösungsschritte davon stehen nochmal links unten.
Rechts daneben steht ein alternativer Lösungsweg, der ohne Operieren mit Differentialen auskommt:

i)	$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$	$y'(x) = x^2 \cdot y(x)$	$\mid : y(x)$
ii)	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 \cdot y$	$\dfrac{y'(x)}{y(x)} = x^2$	$\mid \int \cdots \,\mathrm{d}x$ Gleiche Funktionen haben die gleichen Stammfunktionen.
iii)	$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int x^2\,\mathrm{d}x$	$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x$	
iv)	$\ln(\lvert y\rvert) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$	$\ln(\lvert y(x)\rvert) = \frac{1}{3} \cdot x^3 + c_1$	Umkehrung der Kettenregel

Hinter dem *Trennen der Variablen* steckt die Umkehrung der Kettenregel.