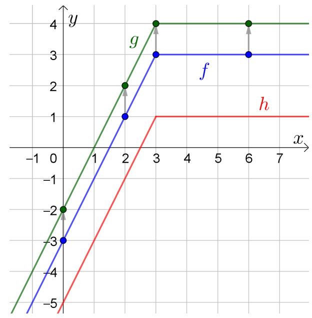
Vertikale Verschiebung

Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

a) Der Funktionsgraph von g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 1 Einheit nach oben.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f(x) + 1$

b) Zeichne rechts den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x) - 2$ ein.



Horizontale Verschiebung

Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = (x+2)^2$ sind dargestellt.

Fülle die Wertetabellen rechts aus.

Was fällt dir auf?

An jeder Stelle x gilt:

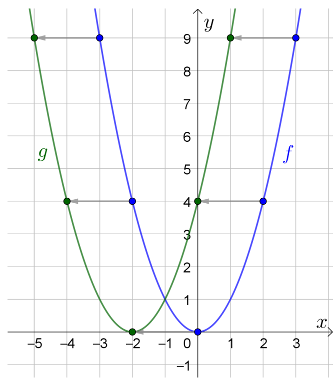
$$g(x) = f\,(x+2)$$

Allgemein bedeutet das:

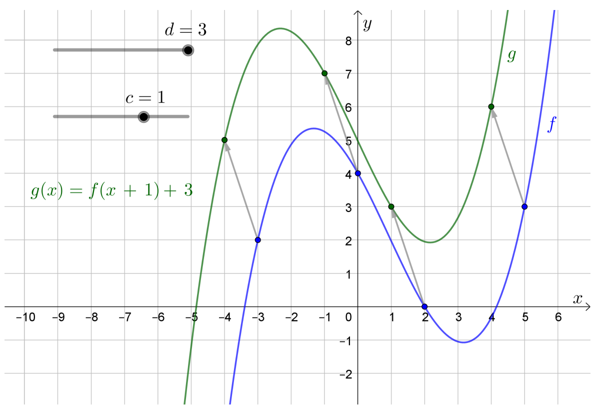
Der Graph von g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 2 Einheiten nach links.

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$g(x)$
-5	9
-4	4
-3	1
-2	0
-1	1
0	4
1	9



Vertikale & Horizontale Verschiebung



$\boldsymbol{x \mapsto f(x) + d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **oben**.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x) - d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **unten**.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x + c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **links**.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x - c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **rechts**.

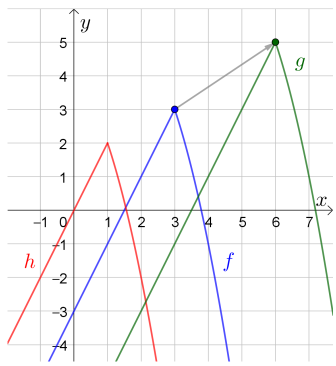
Vertikale & Horizontale Verschiebung

Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

a) Der Funktionsgraph von g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 3 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach oben.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f\,(x - 3) + 2$

b) Zeichne rechts den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x+2) - 1$ ein.



Funktionsgleichung

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl $f(x)$ zu.
Diese Zuordnung kann durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Zum Beispiel:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20$$

Um den Funktionswert $f(☺)$ zu ermitteln, setzen wir auf der rechten Seite der Funktionsgleichung statt jedem x den Ausdruck ☺ (in Klammern) ein. Zum Beispiel:

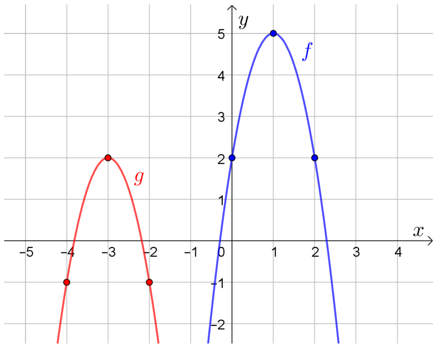
- $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 20 = 12 + 10 + 20 = 42$
- $f(x+1) = 3 \cdot (x+1)^2 - 5 \cdot (x+1) + 20$
- $f(2 \cdot x) = 3 \cdot (2 \cdot x)^2 - 5 \cdot (2 \cdot x) + 20$

Funktionsgleichung nach Verschiebungen

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$

Für die quadratische Funktion g gilt an jeder Stelle x:

$$g(x) = f(x+4) - 3$$



a) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von g.

b) Ermittle die Polynomform von g, das heißt:
Berechne a, b und c so, dass $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ gilt.
Setze dafür die folgende Rechnung fort.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+4) - 3 = -3 \cdot (x+4)^2 + 6 \cdot (x+4) + 2 - 3 = \\ &= -3 \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 16) + 6 \cdot x + 24 - 1 = \\ &= -3 \cdot x^2 - 24 \cdot x - 48 + 6 \cdot x + 23 = \\ &= -3 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 25 \end{aligned}$$

Vertikale Skalierung

Rechts unten sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

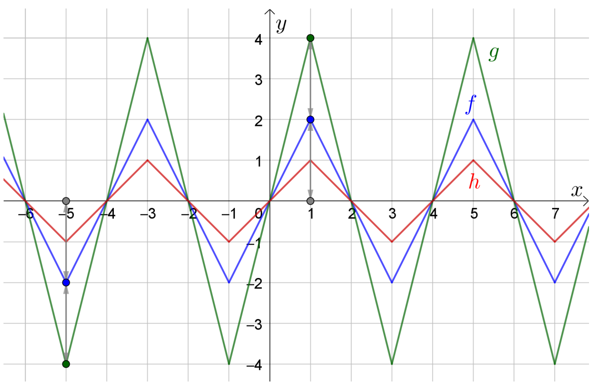
a) An jeder Stelle ist der Funktionswert von g doppelt so groß wie der Funktionswert von f.

Es gilt also: $g(x) = 2 \cdot f(x)$

b) An jeder Stelle ist der Funktionswert von h halb so groß wie der Funktionswert von f.

Es gilt also: $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$

Zeichne rechts den Graphen von h ein.



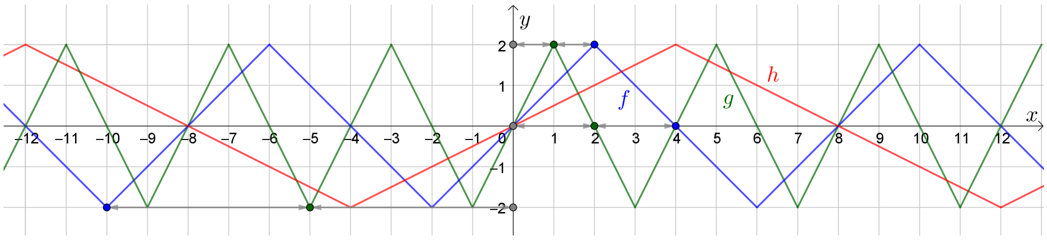
Der Graph von g entsteht durch *Streckung* des Graphen von f in *vertikaler* Richtung mit dem Faktor 2.

Der Graph von h entsteht durch *Stauchung* des Graphen von f in *vertikaler* Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.

In beiden Fällen sprechen wir von *Skalierungen* des Graphen von f in *vertikaler* Richtung.

Horizontale Skalierung

Unten sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.



a) Der Graph von g entsteht durch *Stauchung* des Graphen von f in *horizontaler* Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Das bedeutet zum Beispiel:

Der Punkt $(4 \mid 0)$ am Graphen von f entspricht dem Punkt $(2 \mid 0)$ am Graphen von g. $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

Der Hochpunkt $(2 \mid 2)$ von f entspricht dem Hochpunkt $(1 \mid 2)$ von g. $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

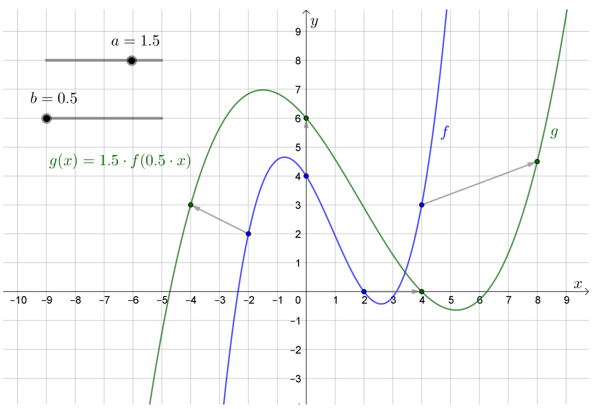
Der Tiefpunkt $(-10 \mid -2)$ von f entspricht dem Tiefpunkt $(-5 \mid -2)$ von g. $-10 \cdot \frac{1}{2} = -5$

Allgemein gilt: $f(☺) = g\left(\frac{☺}{2}\right)$ bzw. $g(x) = f(2 \cdot x)$ Dabei ist 2 der Kehrwert vom Skalierungsfaktor $\frac{1}{2}$.

b) Der Graph der Funktion h entsteht durch *Streckung* des Graphen von f in *horizontaler* Richtung mit dem Faktor 2. An jeder Stelle x gilt dann: $h(x) = f(\frac{1}{2} \cdot x)$
Zeichne oben den Graphen der Funktion h ein.

In beiden Fällen sprechen wir von *Skalierungen* des Graphen von f in *horizontaler* Richtung.

Vertikale & Horizontale Skalierung



$\boldsymbol{x \mapsto a \cdot f(x)}$ mit $\boldsymbol{a > 1}$ **streckt** den Graphen von f in **vertikaler** Richtung mit dem Faktor a.

$\boldsymbol{x \mapsto a \cdot f(x)}$ mit $\boldsymbol{0 < a < 1}$ **staucht** den Graphen von f in **vertikaler** Richtung mit dem Faktor a.

$\boldsymbol{x \mapsto f(b \cdot x)}$ mit $\boldsymbol{b > 1}$ **staucht** den Graphen von f in **horizontaler** Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$.

$\boldsymbol{x \mapsto f(b \cdot x)}$ mit $\boldsymbol{0 < b < 1}$ **streckt** den Graphen von f in **horizontaler** Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$.

Vertikale & Horizontale Skalierung

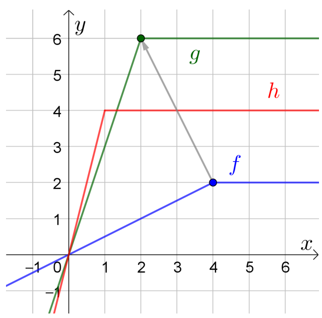
a) Der Graph der Funktion g entsteht durch Skalierung des Graphen der Funktion f in horizontaler Richtung und in vertikaler Richtung.

An jeder Stelle x gilt also:

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$$

Der rechts dargestellte Knickpunkt von f entspricht dabei dem dargestellten Knickpunkt von g.

Ermittle a und b aus der Abbildung: $a = 3$ $b = 2$



b) Zeichne den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 2 \cdot f(4 \cdot x)$ rechts ein.

Funktionsgleichung nach Skalierungen

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2$

An jeder Stelle x gilt für die quadratische Funktion g:

$$g(x) = \frac{1}{5} \cdot f(2 \cdot x)$$

Ermittle eine Funktionsgleichung von g in Polynomform: $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

$$g(x) = \frac{1}{5} \cdot f(2 \cdot x) = \frac{1}{5} \cdot \left[3 \cdot (2 \cdot x)^2 - 4 \cdot (2 \cdot x) + 2\right] =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \left[12 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 2\right] = 2{,}4 \cdot x^2 - 1{,}6 \cdot x + 0{,}4$$

Auf die Reihenfolge kommt es an.

Wenn wir in dieselbe Richtung verschieben *und* skalieren, dann kommt es auf die Reihenfolge an.
Zum Beispiel: $f_1(x) = x$

a) Der Graph von f_1 wird zuerst in vertikaler Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt:

$$f_2(x) = 3 \cdot f_1(x) = 3 \cdot x$$

Danach wird der Graph von f_2 um 2 Einheiten nach oben verschoben:

$$f_3(x) = f_2(x) + 2 = 3 \cdot x + 2$$

b) Diesmal wird der Graph von f_1 zuerst um 2 Einheiten nach oben verschoben:

$$f_2(x) = f_1(x) + 2 = x + 2$$

Danach wird der Graph von f_2 in vertikaler Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt:

$$f_3(x) = 3 \cdot f_2(x) = 3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 6$$

Zuerst strecken und dann verschieben liefert also ein anderes Ergebnis als zuerst verschieben und dann strecken.

Verschiebungen & Skalierungen

Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin(4 \cdot x - 3) + 5$ entsteht schrittweise durch Verschiebungen und Skalierungen aus dem Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.
Gib unten in jedem Schritt an, welche Transformation durchgeführt wird.

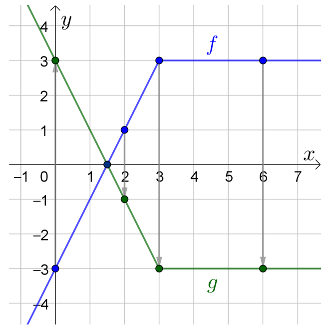
Verschiebung $\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	um … Einheiten	Funktion	Skalierung $\leftrightarrow$	$\updownarrow$	mit dem Faktor …
					$\sin(x)$			
☐	☐	☐	☐		$2 \cdot \sin(x)$	☐	☒	2
☐	☐	☒	☐	5	$2 \cdot \sin(x) + 5$	☐	☐	
☐	☒	☐	☐	3	$2 \cdot \sin(x - 3) + 5$	☐	☐	
☐	☐	☐	☐		$2 \cdot \sin(4 \cdot x - 3) + 5$	☒	☐	1/4

Spiegelung an der horizontalen Achse

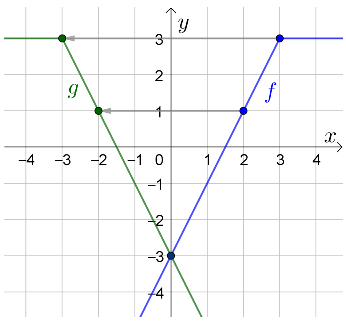
Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.
Der Funktionsgraph von g entsteht durch Spiegelung des Funktionsgraphen von f an der horizontalen Achse.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = -f(x)$

Wenn man auch negative Skalierungsfaktoren zulässt, dann ist das eine Skalierung in vertikaler Richtung mit dem Faktor -1.



Spiegelung an der vertikalen Achse



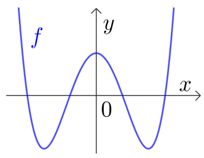
Links sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.
Der Funktionsgraph von g entsteht durch Spiegelung des Funktionsgraphen von f an der vertikalen Achse.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f(-x)$

Wenn man auch negative Skalierungsfaktoren zulässt, dann ist das eine Skalierung in horizontaler Richtung mit dem Faktor -1.

Genau dann, wenn der Funktionsgraph von f symmetrisch zur vertikalen Achse ist, stimmen die Graphen von f und g überein und es gilt: $f(-x) = g(x) = f(x)$

In diesem Fall nennt man f eine gerade Funktion.



Funktionsterme → Transformationen

Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 5 - 4 \cdot x^2$ entsteht schrittweise durch Transformationen aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Gib unten in jedem Schritt an, welche Transformation durchgeführt wird.

Verschiebung					Skalierung			Spiegelung	
←	→	↑	↓	um … Einheiten	↔	↕	mit dem Faktor …	↔	↕
☐	☐	☐	☐		☐	☐		☐	☒
☐	☐	☒	☐	5	☐	☐		☐	☐
☐	☐	☐	☐		☒	☐	1/2	☐	☐

x^2

$-x^2$

$5 - x^2$

$5 - (2 \cdot x)^2$

Transformationen → Funktionsterme

Der Graph der Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ wird – wie in nachstehender Tabelle angegeben – dreimal transformiert. Ermittle jeweils einen Funktionsterm nach jeder Transformation.

Verschiebung					Skalierung			Spiegelung	
←	→	↑	↓	um … Einheiten	↔	↕	mit dem Faktor …	↔	↕
☐	☐	☐	☐		☐	☐		☒	☐
☐	☐	☐	☐		☐	☒	4	☐	☐
☐	☒	☐	☐	2	☐	☐		☐	☐

e^x

e^{-x}

$4 \cdot e^{-x}$

$4 \cdot e^{-(x-2)}$

Verschiebungen & Skalierungen

Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x \cdot e^{-2\cdot x}$ wird schrittweise verschoben und skaliert. Trage nach jedem Schritt einen Term der neuen Funktion in das Kästchen ein.

i) Der Graph von f_1 wird um 7 Einheiten nach links verschoben:

$$f_2(x) = f_1(x+7) = (x+7)\cdot e^{-2\cdot(x+7)} = (x+7)\cdot e^{-2\cdot x-14}$$

ii) Der Graph von f_2 wird in vertikaler Richtung mit dem Faktor 6 gestreckt:

$$f_3(x) = 6\cdot f_2(x) = 6\cdot(x+7)\cdot e^{-2\cdot x-14} = (6\cdot x+42)\cdot e^{-2\cdot x-14}$$

iii) Der Graph von f_3 wird in horizontaler Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt:

$$f_4(x) = f_3(\tfrac{1}{2}\cdot x) = (3\cdot x+42)\cdot e^{-x-14}$$

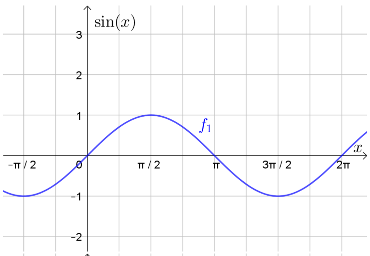
Allgemeine Sinusfunktion

Der Graph der allgemeinen Sinusfunktion g mit $g(x) = A\cdot\sin(\omega\cdot x+\varphi)+c$ entsteht schrittweise durch Transformationen aus der Sinusfunktion f mit $f(x)=\sin(x)$. Gib unten in jedem Schritt, welche Transformation durchgeführt wird.

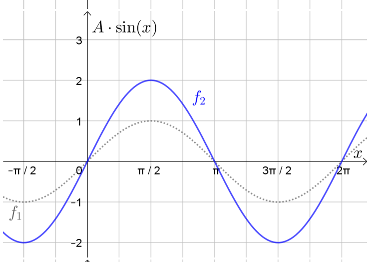
	Verschiebung			Skalierung	
	← → ↑ ↓	um … Einheiten		↔ ↕	mit dem Faktor …
			$\sin(x)$		
$A>0$	☐ ☐ ☐ ☐		$A\cdot\sin(x)$	☐ ☒	A
$\omega>0$	☐ ☐ ☐ ☐		$A\cdot\sin(\omega\cdot x)$	☒ ☐	$\frac{1}{\omega}$
$\varphi>0$	☒ ☐ ☐ ☐	$\frac{\varphi}{\omega}$	$A\cdot\sin(\omega\cdot(x+\frac{\varphi}{\omega}))$	☐ ☐	
$c>0$	☐ ☐ ☒ ☐	c	$A\cdot\sin(\omega\cdot x+\varphi)+c$	☐ ☐	

Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung der dargestellten Funktionsgraphen von f_2, f_3, f_4 und f_5.

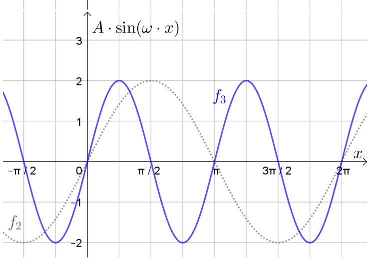
1)



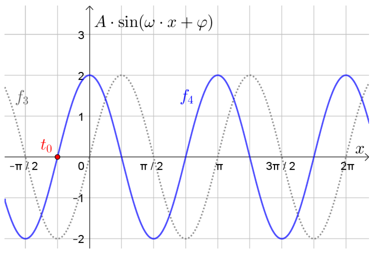
2)



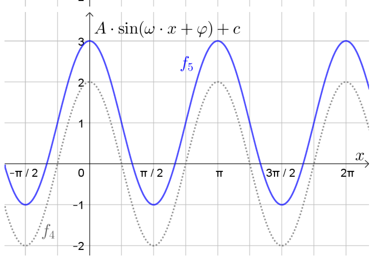
3)



4)



5)



$f_1(x) = \sin(x)$

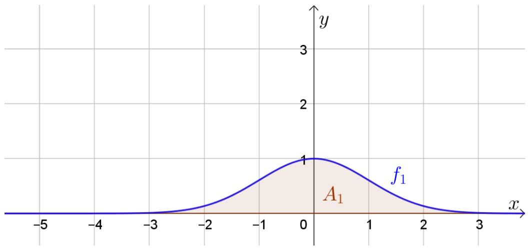
$f_2(x) = 2\cdot\sin(x)$

$f_3(x) = 2\cdot\sin(2\cdot x)$

$f_4(x) = 2\cdot\sin(2\cdot(x+\frac{\pi}{4}))$

$f_5(x) = 2\cdot\sin(2\cdot x+\frac{\pi}{2})+1$

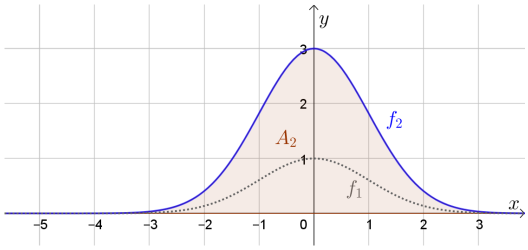
Glockenkurven



Links ist der Graph der Funktion f_1 mit

$$f_1(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

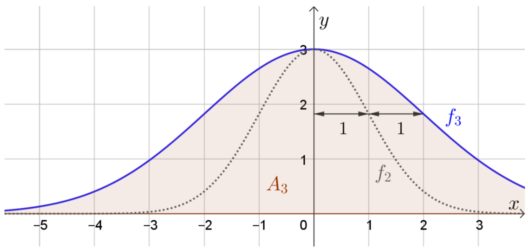
dargestellt. Man kann zeigen, dass er mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A_1 = \sqrt{2\cdot\pi}$ einschließt.



Der Graph von f_2 entsteht durch Skalierung des Graphen von f_1 in vertikaler Richtung. Es gilt:

$$f_2(x) = 3\cdot f_1(x) = 3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

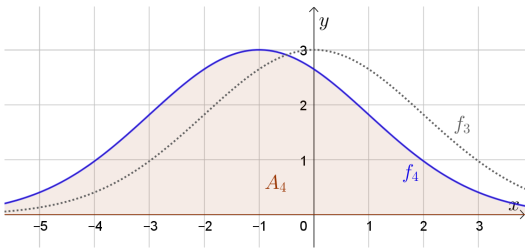
$$\Longrightarrow \quad A_2 = 3\cdot A_1 = 3\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$$



Der Graph von f_3 entsteht durch Skalierung des Graphen von f_2 in horizontaler Richtung. Es gilt:

$$f_3(x) = f_2\left(\frac{x}{2}\right) = 3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad A_3 = 2\cdot A_2 = 6\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$$



Der Graph von f_4 entsteht durch Verschiebung des Graphen von f_3 in horizontaler Richtung. Es gilt:

$$f_4(x) = f_3(x+1) = 3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

$$\Longrightarrow \quad A_4 = A_3 = 6\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$$

Die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (\sigma > 0)$$

ist eine wichtige Funktion in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Beschreibe, wie du ihren Graphen aus dem Graphen von $f_1(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$ schrittweise erhalten kannst.
Welchen Flächeninhalt schließt der Graph von f also mit der x-Achse ein?

Zum Beispiel:

$f_2(x) = f_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$	Skalierung ($\leftrightarrow$) mit dem Faktor σ	$A_2 = \sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$
$f_3(x) = f_2(x-\mu) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	Verschiebung ($\rightarrow$) um μ	$A_3 = \sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot f_3(x)$	Skalierung ($\updownarrow$) mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}$	$A = 1$

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at