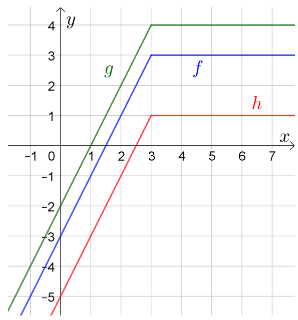
Vertikale Verschiebung

Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

a) Der Funktionsgraph von g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 1 Einheit nach oben.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f(x) + 1$

b) Zeichne rechts den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x) - 2$ ein.



Horizontale Verschiebung

Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = (x+2)^2$ sind dargestellt.

Fülle die Wertetabellen rechts aus.

Was fällt dir auf?

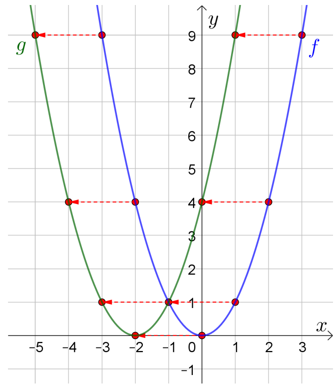
Es gilt: $g(x) = f\,(x+2)$

Allgemein bedeutet das:

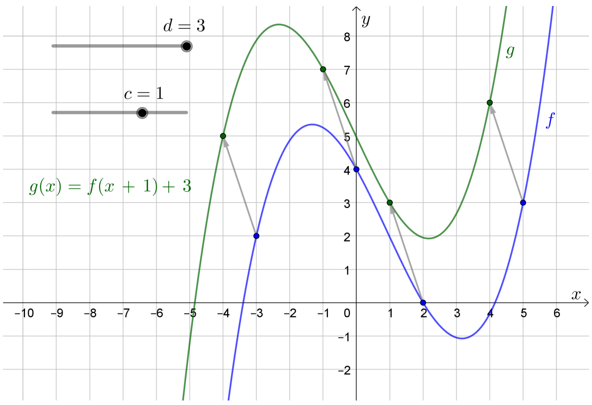
Der Graph von g durch Verschiebung des Graphen von f um 2 Einheiten nach links.

x	$f(x)$
-3	9
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

x	$g(x)$
-5	9
-4	4
-3	1
-2	0
-1	1
0	4
1	9



Vertikale & Horizontale Verschiebung



$\boldsymbol{x \mapsto f(x) + d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **oben**.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x) - d}$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **unten**.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x + c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **links**.

$\boldsymbol{x \mapsto f(x - c)}$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **rechts**.

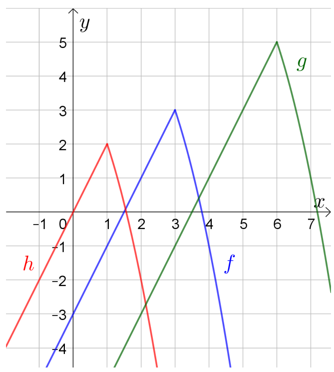
Vertikale & Horizontale Verschiebung

Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

a) Der Funktionsgraph von g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 3 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach oben.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f\,(x-3)\ +2$

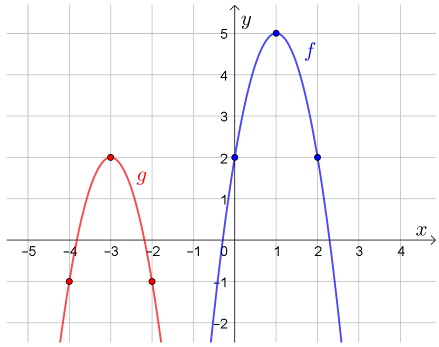
b) Zeichne rechts den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x+2) - 1$ ein.



Verschiebung quadratischer Funktionen

Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$

Der Graph der quadratischen Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 4 Einheiten nach links und um 3 Einheiten nach unten.



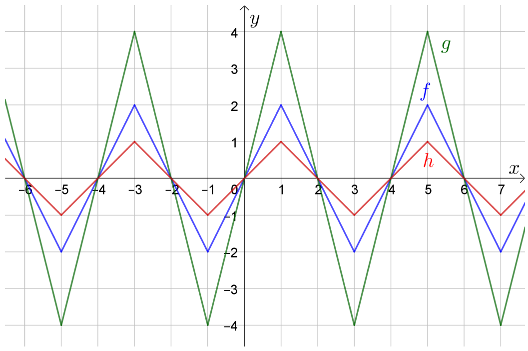
a) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von g.

b) Ermittle die Polynomform von g, das heißt:
Berechne a, b und c so, dass $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ gilt.

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+4) - 3 = \\ &= -3 \cdot (x+4)^2 + 6 \cdot (x+4) + 2 - 3 = \\ &= -3 \cdot (x^2 + 8 \cdot x + 16) + 6 \cdot x + 24 - 1 = \\ &= -3 \cdot x^2 - 24 \cdot x - 48 + 6 \cdot x + 23 = \\ &= -3 \cdot x^2 - 18 \cdot x - 25 \qquad (a = -3,\ b = -18,\ c = -25) \end{aligned}$$

Vertikale Skalierung

Rechts unten sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.



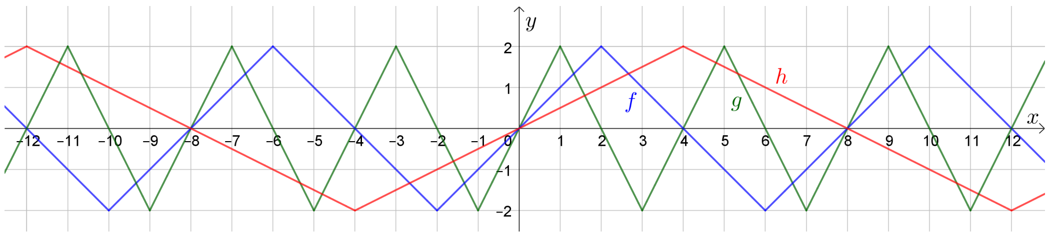
a) An jeder Stelle ist der Funktionswert von g doppelt so groß wie der Funktionswert von f.
Es gilt also: $g(x) = 2 \cdot f(x)$

b) An jeder Stelle ist der Funktionswert von h halb so groß wie der Funktionswert von f.
Es gilt also: $h(x) = \frac{1}{2} \cdot f(x)$

Zeichne rechts den Graphen von h ein.

Horizontale Skalierung

Unten sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.



a) Der Graph der Funktion g entsteht durch *Stauchung* des Graphen von f in horizontaler Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Das bedeutet zum Beispiel:

Der Punkt $(4 \mid 0)$ am Graphen von f entspricht dem Punkt $(2 \mid 0)$ am Graphen von g. $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

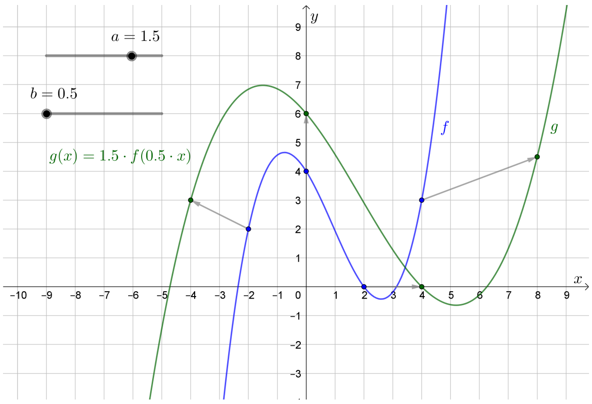
Der Hochpunkt $(2 \mid 2)$ von f entspricht dem Hochpunkt $(1 \mid 2)$ von g. $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

Der Tiefpunkt $(-10 \mid -2)$ von f entspricht dem Tiefpunkt $(-5 \mid -2)$ von g. $-10 \cdot \frac{1}{2} = -5$

Allgemein gilt: $f(☺) = g\left(\frac{☺}{2}\right)$ bzw. $g(x) = f(2 \cdot x)$

b) Der Graph der Funktion h entsteht durch *Streckung* des Graphen von f in horizontaler Richtung mit dem Faktor 2. An jeder Stelle x gilt also: $h(x) = f(\frac{1}{2} \cdot x)$
Zeichne oben den Graphen der Funktion h ein.

Vertikale & Horizontale Skalierung



$\boldsymbol{x \mapsto a \cdot f(x)}$ mit $a > 1$ **streckt** den Graphen von f in **vertikaler** Richtung mit dem Faktor a.

$\boldsymbol{x \mapsto a \cdot f(x)}$ mit $0 < a < 1$ **staucht** den Graphen von f in **vertikaler** Richtung mit dem Faktor a.

$\boldsymbol{x \mapsto f(b \cdot x)}$ mit $b > 1$ **staucht** den Graphen von f in **horizontaler** Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$.

$\boldsymbol{x \mapsto f(b \cdot x)}$ mit $0 < b < 1$ **streckt** den Graphen von f in **horizontaler** Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$.

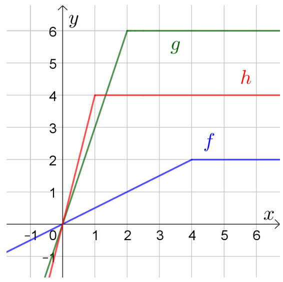
Vertikale & Horizontale Skalierung

a) Der Graph der Funktion g entsteht durch Skalierung des Graphen der Funktion f in horizontaler Richtung und in vertikaler Richtung:

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$$

Ermittle die Parameterwerte aus der Grafik: $a = 3 \quad b = 2$

b) Zeichne den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 2 \cdot f(4 \cdot x)$ ein.



Verschiebungen & Skalierungen

Die Funktion $x \mapsto 2 \cdot \sin(4 \cdot x - 3) + 5$ entsteht schrittweise aus der Funktion $x \mapsto \sin(x)$.
Entscheide in jedem Schritt, ob eine Verschiebung oder eine Skalierung durchgeführt wird:

Verschiebung			Skalierung	
← → ↑ ↓	um … Einheiten		↔ ↕	mit dem Faktor …
		$\sin(x)$		
☐ ☐ ☐ ☐		$2 \cdot \sin(x)$	☐ ☒	2
☐ ☐ ☒ ☐	5	$2 \cdot \sin(x) + 5$	☐ ☐	
☐ ☒ ☐ ☐	3	$2 \cdot \sin(x - 3) + 5$	☐ ☐	
☐ ☐ ☐ ☐		$2 \cdot \sin(4 \cdot x - 3) + 5$	☒ ☐	1/4

Verschiebungen & Skalierungen

Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x \cdot e^{-2 \cdot x}$ wird schrittweise verschoben und skaliert.
Trage nach jedem Schritt einen Term der neuen Funktion in das Kästchen ein.

i) Der Graph von f_1 wird um 7 Einheiten nach links verschoben:

$$f_2(x) = f_1(x+7) = (x+7) \cdot e^{-2 \cdot (x+7)} = (x+7) \cdot e^{-2 \cdot x - 14}$$

ii) Der Graph von f_2 wird mit dem Faktor 6 in vertikaler Richtung gestreckt:

$$f_3(x) = 6 \cdot f_2(x) = 6 \cdot (x+7) \cdot e^{-2 \cdot x - 14} = (6 \cdot x + 42) \cdot e^{-2 \cdot x - 14}$$

iii) Der Graph von f_3 wird mit dem Faktor 2 in horizontaler Richtung gestreckt:

$$f_4(x) = f_3(\tfrac{1}{2} \cdot x) = (3 \cdot x + 42) \cdot e^{-x - 14}$$

Auf die Reihenfolge kommt es an.

Wenn wir in dieselbe Richtung verschieben *und* skalieren, dann kommt es auf die Reihenfolge an.
Zum Beispiel: $f_1(x) = x$

a) Der Graph von f_1 wird zuerst mit dem Faktor 3 in vertikaler Richtung gestreckt:

$$f_2(x) = 3 \cdot f_1(x) = 3 \cdot x$$

Danach wird der Graph von f_2 um 2 Einheiten nach oben verschoben:

$$f_3(x) = f_2(x) + 2 = 3 \cdot x + 2$$

b) Diesmal wird der Graph von f_1 zuerst um 2 Einheiten nach oben verschoben:

$$f_2(x) = f_1(x) + 2 = x + 2$$

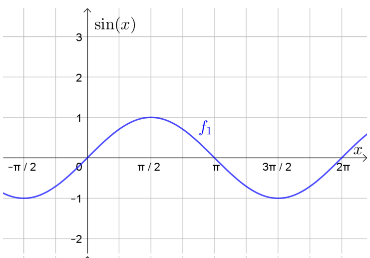
Danach wird der Graph von f_2 mit dem Faktor 3 in vertikaler Richtung gestreckt:

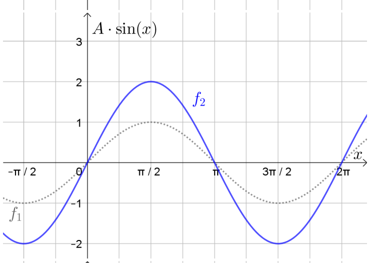
$$f_3(x) = 3 \cdot f_2(x) = 3 \cdot (x + 2) = 3 \cdot x + 6$$

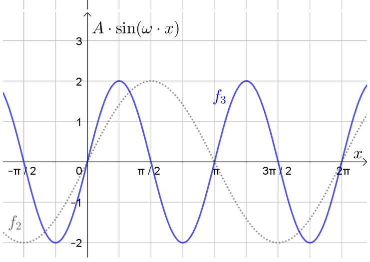
Allgemeine Sinusfunktion

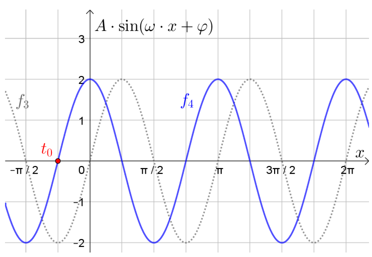
Die Funktion $x \mapsto A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$ entsteht schrittweise aus der Funktion $x \mapsto \sin(x)$.

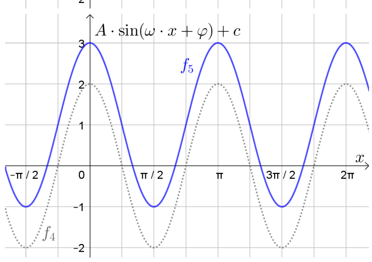
	Verschiebung						Skalierung		
	$\leftarrow$	$\rightarrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	um ... Einheiten	$\sin(x)$	$\leftrightarrow$	$\updownarrow$	mit dem Faktor ...
$A > 0$	☐	☐	☐	☐		$\to A \cdot \sin(x)$	☐	☒	A
$\omega > 0$	☐	☐	☐	☐		$\to A \cdot \sin(\omega \cdot x)$	☒	☐	$\frac{1}{\omega}$
$\varphi > 0$	☒	☐	☐	☐	$\frac{\varphi}{\omega}$	$\to A \cdot \sin(\omega \cdot (x + \frac{\varphi}{\omega}))$	☐	☐	
$c > 0$	☐	☐	☒	☐	c	$\to A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$	☐	☐	

1) 

2) 

3) 

4) 

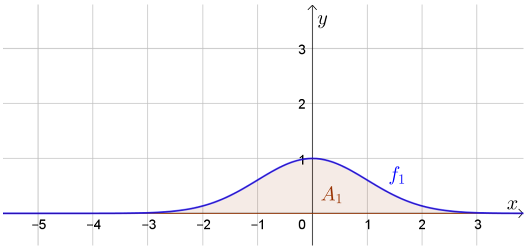
5) 

$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) = 2 \cdot \sin(x)$ $\qquad$ $f_4(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot (x + \frac{\pi}{4}))$

$f_3(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot x)$ $\qquad$ $f_5(x) = 2 \cdot \sin(2 \cdot x + \frac{\pi}{2}) + 1$

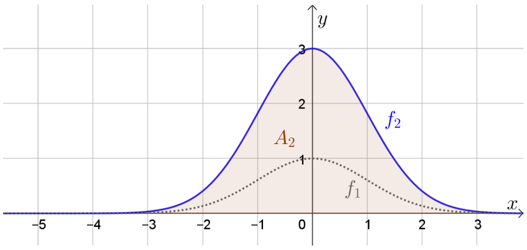
Glockenkurven



Links ist der Graph der Funktion f_1 mit

$$f_1(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

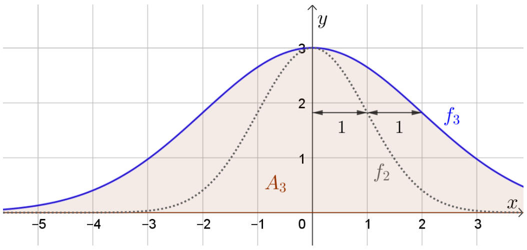
dargestellt. Man kann zeigen, dass er mit der x-Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A_1 = \sqrt{2\cdot\pi}$ einschließt.



Der Graph von f_2 entsteht durch Skalierung des Graphen von f_1 in vertikaler Richtung. Es gilt:

$$f_2(x) = 3\cdot f_1(x) = 3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$$

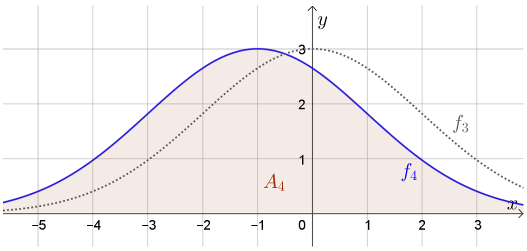
$$\implies A_2 = 3\cdot A_1 = 3\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$$



Der Graph von f_3 entsteht durch Skalierung des Graphen von f_2 in horizontaler Richtung. Es gilt:

$$f_3(x) = f_2\left(\tfrac{x}{2}\right) = 3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

$$\implies A_3 = 2\cdot A_2 = 6\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$$



Der Graph von f_4 entsteht durch Verschiebung des Graphen von f_3 in horizontaler Richtung. Es gilt:

$$f_4(x) = f_3(x+1) = 3\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}$$

$$\implies A_4 = A_3 = 6\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$$

Die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad (\sigma > 0)$$

ist eine wichtige Funktion in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Beschreibe, wie du ihren Graphen aus dem Graphen von $f_1(x) = e^{-\frac{1}{2}\cdot x^2}$ schrittweise erhalten kannst.
Welchen Flächeninhalt schließt der Graph von f also mit der x-Achse ein?

Zum Beispiel:

$f_2(x) = f_1\left(\frac{x}{\sigma}\right) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$	Skalierung ($\leftrightarrow$) mit dem Faktor σ	$A_2 = \sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$
$f_3(x) = f_2(x-\mu) = e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$	Verschiebung ($\rightarrow$) um μ	$A_3 = \sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}$
$f(x) = \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}\cdot f_3(x)$	Skalierung ($\updownarrow$) mit dem Faktor $\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\cdot\pi}}$	$A = 1$