

Vertikale Verschiebung

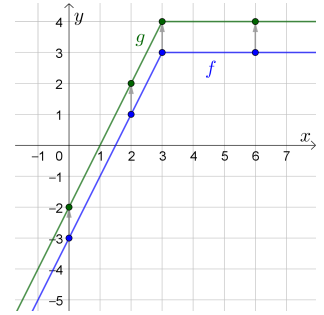


Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

- a) Der Funktionsgraph von g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 1 Einheit nach oben.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f(x) + \boxed{}$

- b) Zeichne rechts den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x) - 2$ ein.



Horizontale Verschiebung



Die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = (x + 2)^2$ sind dargestellt.

Fülle die Wertetabellen rechts aus.

Was fällt dir auf?

An jeder Stelle x gilt:

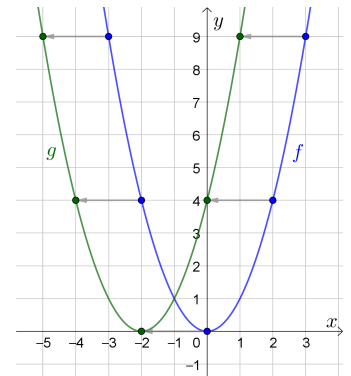
$$g(x) = f(\boxed{})$$

Allgemein bedeutet das:

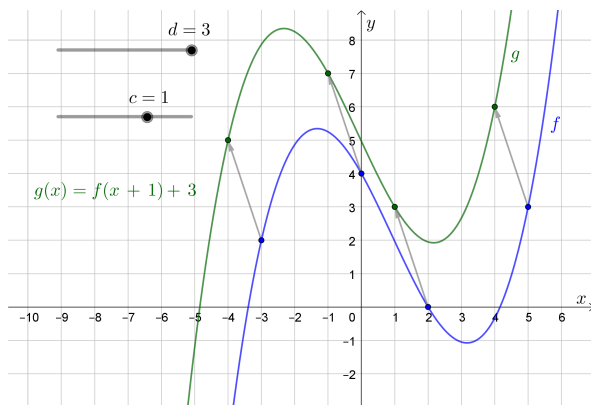
Der Graph von g entsteht durch Verschiebung des Graphen von f um 2 Einheiten nach links.

x	$f(x)$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

x	$g(x)$
-5	
-4	
-3	
-2	
-1	
0	
1	



Vertikale & Horizontale Verschiebung



$x \mapsto f(x) + d$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **oben**.

$x \mapsto f(x) - d$ mit $d > 0$ verschiebt den Graphen von f um d Einheiten nach **unten**.

$x \mapsto f(x + c)$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **links**.

$x \mapsto f(x - c)$ mit $c > 0$ verschiebt den Graphen von f um c Einheiten nach **rechts**.

Vertikale & Horizontale Verschiebung

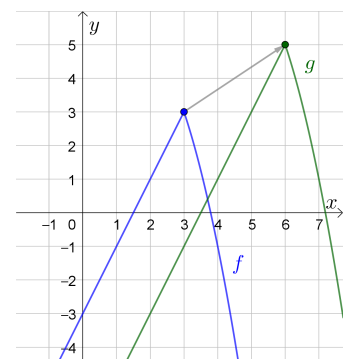


Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

- a) Der Funktionsgraph von g entsteht durch Verschiebung des Funktionsgraphen von f um 3 Einheiten nach rechts und um 2 Einheiten nach oben.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) = f(\boxed{}) + \boxed{}$

- b) Zeichne rechts den Graphen der Funktion h mit $h(x) = f(x + 2) - 1$ ein.



Eine **Funktion** $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ordnet jeder reellen Zahl x eine reelle Zahl $f(x)$ zu.
Diese Zuordnung kann durch eine Funktionsgleichung beschrieben werden. Zum Beispiel:

$$f(x) = 3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 20$$

Um den Funktionswert $f(\odot)$ zu ermitteln, setzen wir auf der rechten Seite der Funktionsgleichung statt jedem x den Ausdruck \odot (in Klammern) ein. Zum Beispiel:

- $f(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 20 = 12 + 10 + 20 = 42$
- $f(x + 1) = 3 \cdot (x + 1)^2 - 5 \cdot (x + 1) + 20$
- $f(2 \cdot x) = 3 \cdot (2 \cdot x)^2 - 5 \cdot (2 \cdot x) + 20$

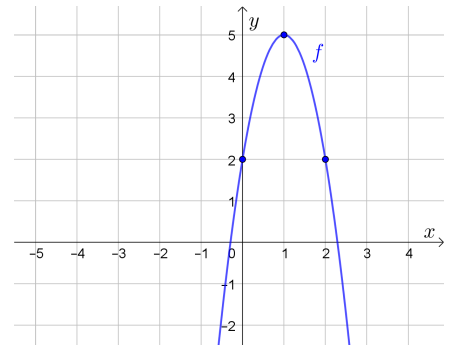
Für die **quadratische Funktion** f gilt: $f(x) = -3 \cdot x^2 + 6 \cdot x + 2$

Für die quadratische Funktion g gilt an jeder Stelle x :

$$g(x) = f(x + 4) - 3$$

- a) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von g .
- b) Ermittle die **Polynomform** von g , das heißt:
Berechne a , b und c so, dass $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ gilt.
Setze dafür die folgende Rechnung fort.

$$g(x) = f(x + 4) - 3 =$$



Rechts unten sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.

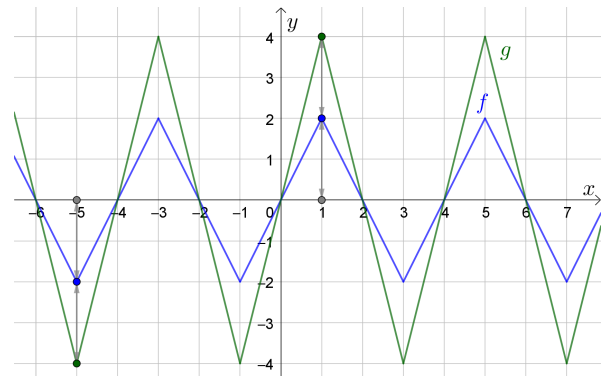
- a) An jeder Stelle ist der Funktionswert von g doppelt so groß wie der Funktionswert von f .

Es gilt also: $g(x) =$

- b) An jeder Stelle ist der Funktionswert von h halb so groß wie der Funktionswert von f .

Es gilt also: $h(x) =$

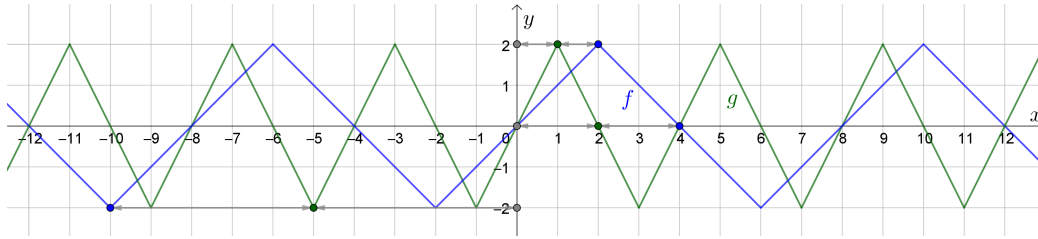
Zeichne rechts den Graphen von h ein.



Der Graph von g entsteht durch *Streckung* des Graphen von f in *vertikaler* Richtung mit dem Faktor 2.
Der Graph von h entsteht durch *Stauchung* des Graphen von f in *vertikaler* Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$.
In beiden Fällen sprechen wir von *Skalierungen* des Graphen von f in *vertikaler* Richtung.



Unten sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.



- a) Der Graph von g entsteht durch *Stauchung* des Graphen von f in *horizontaler* Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$. Das bedeutet zum Beispiel:

Der Punkt $(4 | 0)$ am Graphen von f entspricht dem Punkt $(2 | 0)$ am Graphen von g . $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$

Der **Hochpunkt** $(2 | 2)$ von f entspricht dem Hochpunkt $(1 | 2)$ von g . $2 \cdot \frac{1}{2} = 1$

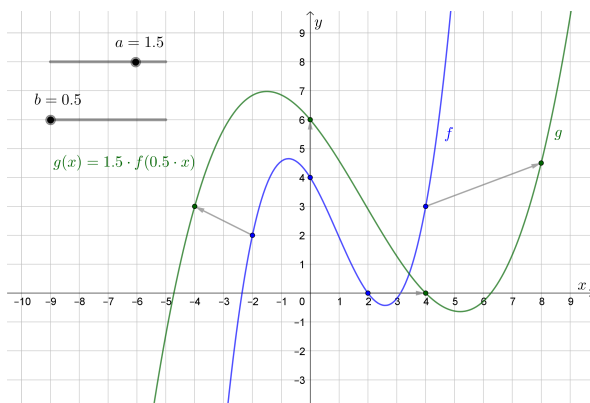
Der **Tiefpunkt** $(-10 | -2)$ von f entspricht dem Tiefpunkt $(-5 | -2)$ von g . $-10 \cdot \frac{1}{2} = -5$

Allgemein gilt: $f(\odot) = g\left(\frac{\odot}{2}\right)$ bzw. $g(x) = f\left(2 \cdot x\right)$ Dabei ist 2 der **Kehrwert** vom Skalierungsfaktor $\frac{1}{2}$.

- b) Der Graph der Funktion h entsteht durch *Streckung* des Graphen von f in *horizontaler* Richtung mit dem Faktor 2. An jeder Stelle x gilt dann: $h(x) = f\left(\frac{1}{2} \cdot x\right)$

Zeichne oben den Graphen der Funktion h ein.

In beiden Fällen sprechen wir von *Skalierungen* des Graphen von f in *horizontaler* Richtung.



$x \mapsto a \cdot f(x)$ mit $a > 1$ **streckt** den Graphen von f in **vertikaler** Richtung mit dem Faktor a .

$x \mapsto a \cdot f(x)$ mit $0 < a < 1$ **staucht** den Graphen von f in **vertikaler** Richtung mit dem Faktor a .

$x \mapsto f(b \cdot x)$ mit $b > 1$ **staucht** den Graphen von f in **horizontaler** Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$.

$x \mapsto f(b \cdot x)$ mit $0 < b < 1$ **streckt** den Graphen von f in **horizontaler** Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$.



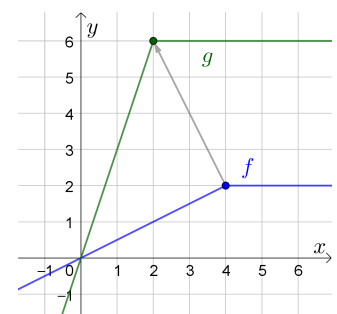
- a) Der Graph der Funktion g entsteht durch Skalierung des Graphen der Funktion f in horizontaler Richtung und in vertikaler Richtung.

An jeder Stelle x gilt also:

$$g(x) = a \cdot f(b \cdot x)$$

Der rechts dargestellte Knickpunkt von f entspricht dabei dem dargestellten Knickpunkt von g .

Ermittle a und b aus der Abbildung: $a = \boxed{}$ $b = \boxed{}$



- b) Zeichne den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 2 \cdot f(4 \cdot x)$ rechts ein.



Für die quadratische Funktion f gilt: $f(x) = 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 2$

An jeder Stelle x gilt für die quadratische Funktion g :

$$g(x) = \frac{1}{5} \cdot f(2 \cdot x)$$

Ermittle eine Funktionsgleichung von g in Polynomform: $g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Auf die Reihenfolge kommt es an.



Wenn wir in dieselbe Richtung verschieben *und* skalieren, dann kommt es auf die Reihenfolge an.

Zum Beispiel: $f_1(x) = x$

a) Der Graph von f_1 wird zuerst in vertikaler Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt:

$$f_2(x) = \text{[dotted box]}$$

Danach wird der Graph von f_2 um 2 Einheiten nach oben verschoben:

$$f_3(x) = \text{[dotted box]}$$

b) Diesmal wird der Graph von f_1 zuerst um 2 Einheiten nach oben verschoben:

$$f_2(x) = \text{[dotted box]}$$

Danach wird der Graph von f_2 in vertikaler Richtung mit dem Faktor 3 gestreckt:

$$f_3(x) = \text{[dotted box]}$$

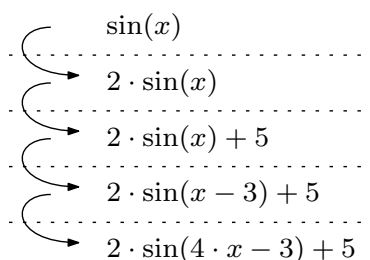
Zuerst strecken und dann verschieben liefert also ein anderes Ergebnis als zuerst verschieben und dann strecken.

Verschiebungen & Skalierungen



Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 2 \cdot \sin(4 \cdot x - 3) + 5$ entsteht schrittweise durch Verschiebungen und Skalierungen aus dem Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$. Entscheide unten in jedem Schritt, welche Transformation durchgeführt wird.

Verschiebung				
←	→	↑	↓	um ... Einheiten
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

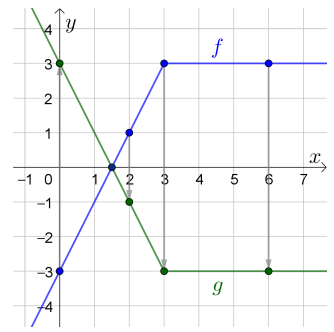


Skalierung		
↔	↕	mit dem Faktor ...
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

Spiegelung an der horizontalen Achse



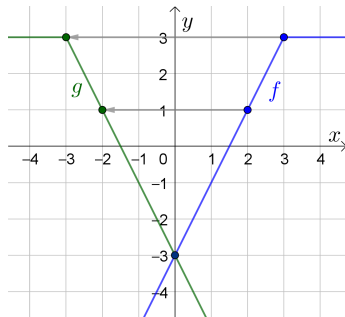
Rechts sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.
Der Funktionsgraph von g entsteht durch Spiegelung des Funktionsgraphen von f an der horizontalen Achse.



An jeder Stelle x gilt also: $g(x) =$

Wenn man auch negative Skalierungsfaktoren zulässt, dann ist das eine Skalierung in vertikaler Richtung mit dem Faktor -1 .

Spiegelung an der vertikalen Achse

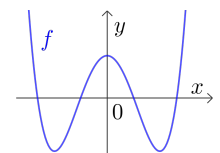


Links sind die Graphen der Funktionen f und g dargestellt.
Der Funktionsgraph von g entsteht durch Spiegelung des Funktionsgraphen von f an der vertikalen Achse.

An jeder Stelle x gilt also: $g(x) =$

Wenn man auch negative Skalierungsfaktoren zulässt, dann ist das eine Skalierung in horizontaler Richtung mit dem Faktor -1 .

Genau dann, wenn der Funktionsgraph von f symmetrisch zur vertikalen Achse ist, stimmen die Graphen von f und g überein und es gilt: $f(-x) = g(x) = f(x)$



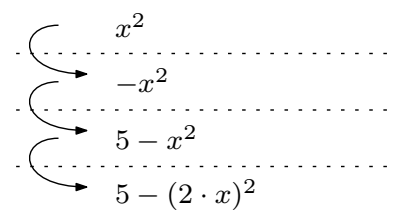
In diesem Fall nennt man f eine **gerade Funktion**.

Funktionsterme \rightarrow Transformationen



Der Graph der Funktion g mit $g(x) = 5 - 4 \cdot x^2$ entsteht schrittweise durch Transformationen aus dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$.
Entscheide unten in jedem Schritt, welche Transformation durchgeführt wird.

Verschiebung					Skalierung		Spiegelung	
\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow	um ... Einheiten	\leftrightarrow	\updownarrow	\leftrightarrow	\updownarrow
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

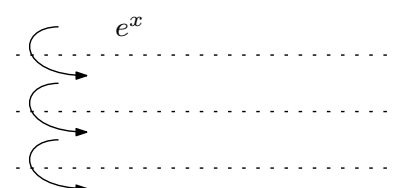


Transformationen \rightarrow Funktionsterme



Der Graph der **Exponentialfunktion** f mit $f(x) = e^x$ wird – wie in nachstehender Tabelle angegeben – dreimal transformiert. Ermittle jeweils einen Funktionsterm nach jeder Transformation.

Verschiebung					Skalierung		Spiegelung	
\leftarrow	\rightarrow	\uparrow	\downarrow	um ... Einheiten	\leftrightarrow	\updownarrow	\leftrightarrow	\updownarrow
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	4	<input type="checkbox"/>
<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	2	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		<input type="checkbox"/>





Die Funktion f_1 mit $f_1(x) = x \cdot e^{-2 \cdot x}$ wird schrittweise verschoben und skaliert.

Trage nach jedem Schritt einen Term der neuen Funktion in das Kästchen ein.

i) Der Graph von f_1 wird um 7 Einheiten nach links verschoben:

$f_2(x) =$

ii) Der Graph von f_2 wird in vertikaler Richtung mit dem Faktor 6 gestreckt:

$f_3(x) =$

iii) Der Graph von f_3 wird in horizontaler Richtung mit dem Faktor 2 gestreckt:

$f_4(x) =$

Allgemeine Sinusfunktion

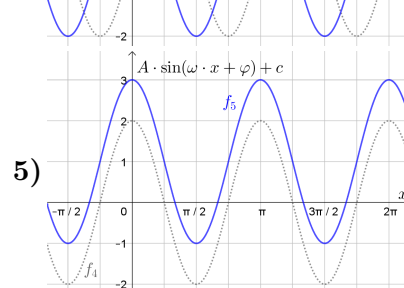
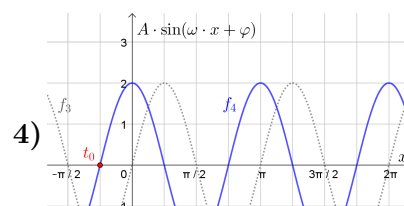
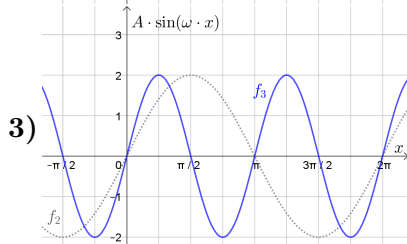
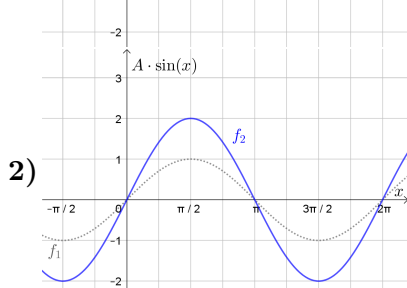
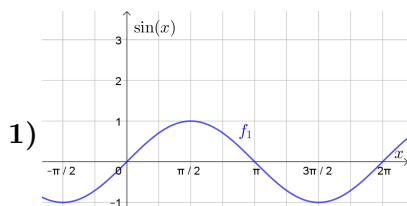


Der Graph der **allgemeinen Sinusfunktion** g mit $g(x) = A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$ entsteht schrittweise durch Transformationen aus der Sinusfunktion f mit $f(x) = \sin(x)$.

Entscheide unten in jedem Schritt, welche Transformation durchgeführt wird.

	Verschiebung						Skalierung		
	←	→	↑	↓	um ... Einheiten		↔	↕	mit dem Faktor ...
$A > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		$\sin(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$\omega > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		$A \cdot \sin(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$\varphi > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		$A \cdot \sin(\omega \cdot x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
$c > 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>		$A \cdot \sin(\omega \cdot (x + \frac{\varphi}{\omega}))$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	
						$A \cdot \sin(\omega \cdot x + \varphi) + c$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	

Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung der dargestellten Funktionsgraphen von f_2, f_3, f_4 und f_5 .



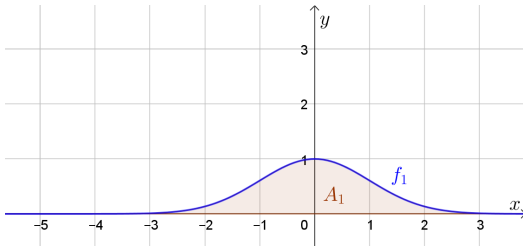
$f_1(x) = \sin(x)$

$f_2(x) =$

$f_4(x) =$

$f_3(x) =$

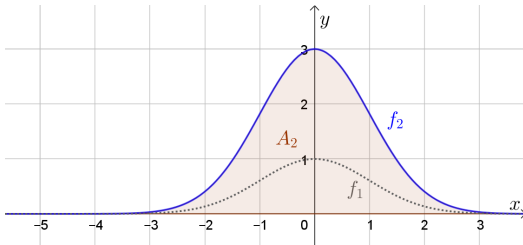
$f_5(x) =$



Links ist der Graph der Funktion f_1 mit

$$f_1(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$$

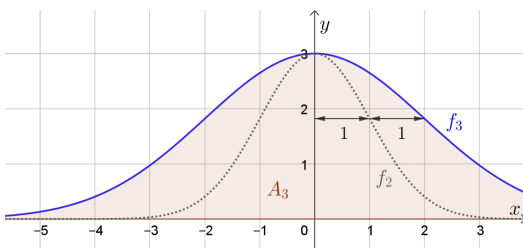
dargestellt. Man kann zeigen, dass er mit der x -Achse eine Fläche mit dem Inhalt $A_1 = \sqrt{2 \cdot \pi}$ einschließt.



Der Graph von f_2 entsteht durch Skalierung des Graphen von f_1 in vertikaler Richtung. Es gilt:

$$f_2(x) = \text{[dotted box]}$$

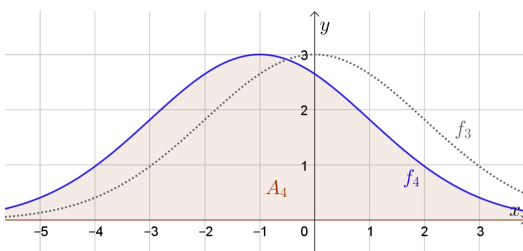
$$\Rightarrow A_2 = \text{[dotted box]}$$



Der Graph von f_3 entsteht durch Skalierung des Graphen von f_2 in horizontaler Richtung. Es gilt:

$$f_3(x) = \text{[dotted box]}$$

$$\Rightarrow A_3 = \text{[dotted box]}$$



Der Graph von f_4 entsteht durch Verschiebung des Graphen von f_3 in horizontaler Richtung. Es gilt:

$$f_4(x) = \text{[dotted box]}$$

$$\Rightarrow A_4 = \text{[dotted box]}$$

Die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (\sigma > 0)$$

ist eine wichtige Funktion in der **Wahrscheinlichkeitsrechnung**.

Beschreibe, wie du ihren Graphen aus dem Graphen von $f_1(x) = e^{-\frac{1}{2} \cdot x^2}$ schrittweise erhalten kannst. Welchen Flächeninhalt schließt der Graph von f also mit der x -Achse ein?

