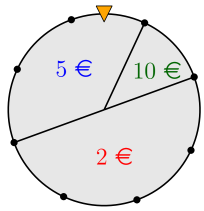
Kenngrößen einer diskreten Zufallsvariablen

Nadja dreht einmal am rechts dargestellten Glücksrad.
Die Zufallsvariable X gibt ihren Gewinn in € an.



1) Trage die Wahrscheinlichkeiten als Brüche in die Tabelle ein.

x_i	2 €	5 €	10 €
$P(X = x_i)$			

2) Berechne den Erwartungswert μ von X.

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(X = x_i) =$$

3) Berechne die Varianz von X.

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i) =$$

4) Berechne die Standardabweichung σ von X.

$$\sigma = \sqrt{V(X)} =$$

Verteilungsfunktion

Für jede Zufallsvariable X gibt es die zugehörige **Verteilungsfunktion F** mit:

$$\boldsymbol{F(x) = P(X \leq x)}$$

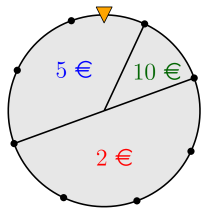
$F(x)$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsvariable X *höchstens* den Wert x annimmt.

Verteilungsfunktion – Glücksrad

Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn bei einer Drehung am rechts dargestellten Glücksrad an.
F ist die Verteilungsfunktion von X.

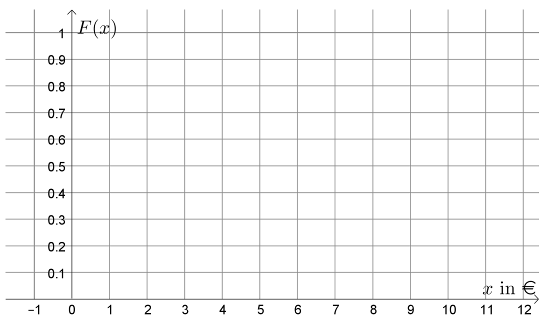
1) Berechne die angegebenen Funktionswerte von F.

$$F(8\text{ €}) = P(X \leq 8\text{ €}) = \boxed{}\ \%$$



$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} \boxed{}\ \% & \text{, wenn } x < 2\text{ €} \\ \boxed{}\ \% & \text{, wenn } 2\text{ €} \leq x < 5\text{ €} \\ \boxed{}\ \% & \text{, wenn } 5\text{ €} \leq x < 10\text{ €} \\ \boxed{}\ \% & \text{, wenn } x \geq 10\text{ €} \end{cases}$$

2) Zeichne den Graphen der Verteilungsfunktion F in das Koordinatensystem ein.



Diese Verteilungsfunktion hat drei Sprungstellen.

Am Funktionsgraphen verwenden wir die Symbole ● und ○.

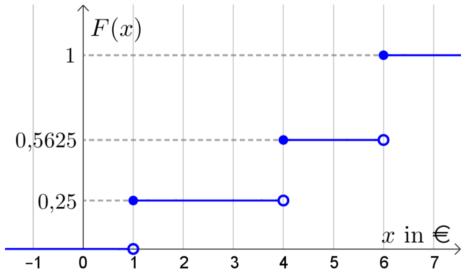
Die y-Koordinate vom ausgefüllten Kreis ist
der Funktionswert an der Sprungstelle.

Verteilungsfunktion – Urne

In einer Urne sind *insgesamt* 32 Kugeln. Jede Kugel ist entweder rot, grün oder blau.
Daniel zieht eine Kugel nach dem Zufallsprinzip aus der Urne.

- Wenn die Kugel rot ist, gewinnt er r €.
- Wenn die Kugel grün ist, gewinnt er g €.
- Wenn die Kugel blau ist, gewinnt er b €.

Für die Gewinnbeträge gilt: $r < g < b$
Die Zufallsvariable X gibt seinen Gewinn in € an.
Der Graph ihrer Verteilungsfunktion F ist rechts oben dargestellt.



1) Ermittle die Gewinnbeträge:

$r =$ ☐ € $\quad g =$ ☐ € $\quad b =$ ☐ €

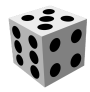
2) Ermittle die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten:

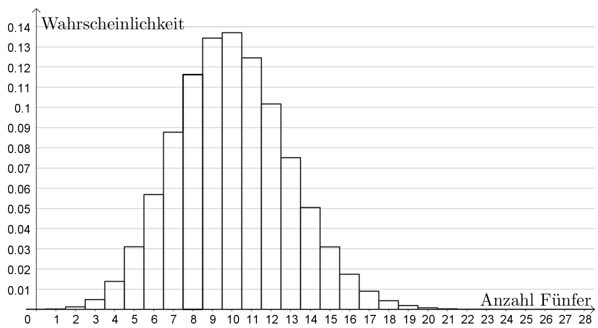
$P(X = r) =$ ☐ % $\quad P(X = g) =$ ☐ % $\quad P(X = b) =$ ☐ %

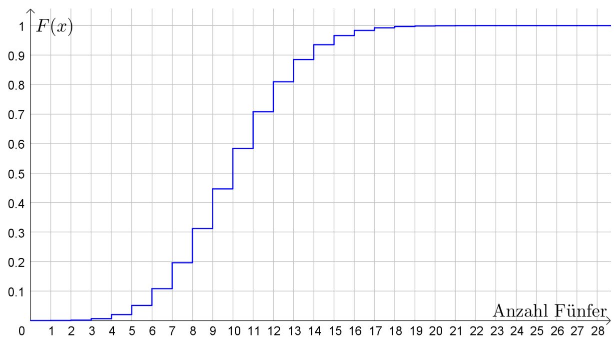
3) Wie viele rote Kugeln, grüne Kugeln bzw. blaue Kugeln befinden sich in der Urne?

Binomialverteilung

Pia würfelt 60 Mal mit einem fairen 6-seitigen Würfel.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der geworfenen Fünfer an.
Links unten sind die Wahrscheinlichkeiten von X in einem Säulendiagramm dargestellt.
Rechts unten ist der Graph der zugehörigen Verteilungsfunktion F dargestellt.







a) Fülle die Kästchen aus, berechne die Wahrscheinlichkeit und veranschauliche sie oben rechts.

$P(X \leq 10) = F(\square) = \square\,\%$

b) Fülle die Kästchen aus, berechne die Wahrscheinlichkeit und veranschauliche sie in beiden Bildern.

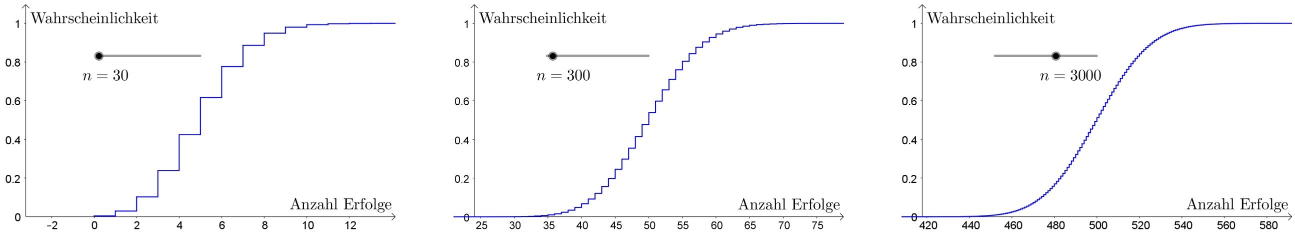
$P(X = 12) = P(X \leq \square) - P(X \leq \square) = F(\square) - F(\square) = \square\,\%$

c) Fülle die Kästchen aus, berechne die Wahrscheinlichkeit und veranschauliche sie oben rechts.

$P(X > 8) = 1 - P(X \leq \square) = 1 - F(\square) = \square\,\%$

Binomialverteilung → Normalverteilung

Die Zufallsvariable X_n ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = \frac{1}{6}$.
Die zugehörige Verteilungsfunktion ist für $n = 30,\ n = 300$ und $n = 3000$ dargestellt:

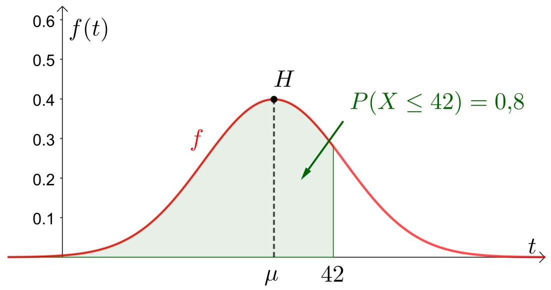


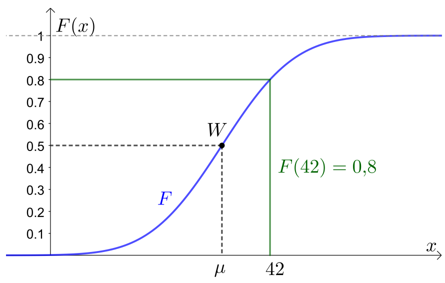
Die treppenförmigen Funktionsgraphen nehmen für größer werdendes n einen „S-förmigen“ Verlauf an.

Normalverteilung

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung $\sigma > 0$.
Zwischen ihrer Dichtefunktion f und ihrer Verteilungsfunktion F besteht folgender Zusammenhang:

$$\boldsymbol{\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = P(X \leq x) = F(x)} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}$$





Aus den Eigenschaften der Dichtefunktion f folgern wir Eigenschaften der Verteilungsfunktion F:

1) Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. F ist also ________________________.

2) Es gilt: $\int_{-\infty}^{\mu} f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{}$ Der Punkt $\left(\boxed{} \mid \boxed{}\right)$ liegt also am Graphen von F.

3) Es gilt: $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{}$ Es gilt also: $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = \boxed{}$

4) Es gilt: $\int_{-\infty}^{-\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \boxed{}$ Es gilt also: $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \boxed{}$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt $\boldsymbol{f(x) = F'(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

5) f hat ein lokales Maximum an der Stelle $x = \boxed{}$.
f' wechselt das Vorzeichen dort von $+$ auf $-$.

F' hat also an der Stelle $x = \boxed{}$ ein lokales Maximum.
F'' wechselt das Vorzeichen dort von $+$ auf $-$.
F hat also die Wendestelle $x = \boxed{}$.

6) Je kleiner σ ist, desto „spitzer“ ist der glockenförmige Verlauf des Funktionsgraphen von f.

Je kleiner σ, desto „steiler“ ist der S-förmige Verlauf des Funktionsgraphen von F.

Wahrscheinlichkeiten veranschaulichen

Bei einem Intelligenztest wird der sogenannte Intelligenzquotient (IQ) als Ergebnis ermittelt.

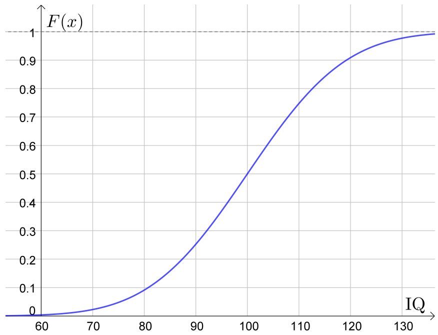
Der IQ ist normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.

Die Tests sind so konstruiert, dass der IQ annähernd dieser Verteilung folgt.

Rechts siehst du den Graphen der Verteilungsfunktion F.

1) Trage unten die richtigen Werte in die Kästchen ein.

2) Veranschauliche rechts die berechneten Wahrscheinlichkeiten.



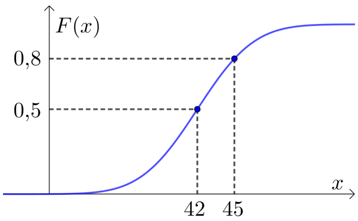
a) $P(\text{IQ} \leq 80) = F(\boxed{}) = \boxed{}\,\%$

b) $P(\text{IQ} > 115) = 1 - P(X \leq \boxed{}) = 1 - F(\boxed{}) = \boxed{}\,\%$

c) $P(90 \leq \text{IQ} \leq 110) = P(X \leq \boxed{}) - P(X < \boxed{}) = F(\boxed{}) - F(\boxed{}) = \boxed{}\,\%$

Verteilungsfunktion einer Normalverteilung → μ und σ ermitteln

Die Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.



Am Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion F sind links 2 Punkte eingezeichnet. Ermittle μ und σ.

Standardnormalverteilungstabelle

Die Zufallsvariable Z ist *standard*normalverteilt. Es gilt also $\mu = \boxed{}$ und $\sigma = \boxed{}$.

Die zugehörige Verteilungsfunktion wird traditionell mit Φ abgekürzt.

In der Tabelle rechts sind Funktionswerte von Φ aufgelistet. Zum Beispiel gilt: $\Phi(0{,}42) \approx 66{,}28\,\%$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633

⋮ ⋮ ⋮

a) Ermittle $P(Z < 1{,}38)$ mithilfe der Tabelle.

b) Ermittle $P(Z > 0{,}07)$ mithilfe der Tabelle.

c) Ermittle $P(0{,}23 \leq Z \leq 1{,}5)$ mithilfe der Tabelle.

d) Ermittle $P(Z \leq -0{,}35)$ mithilfe der Tabelle.