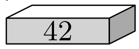
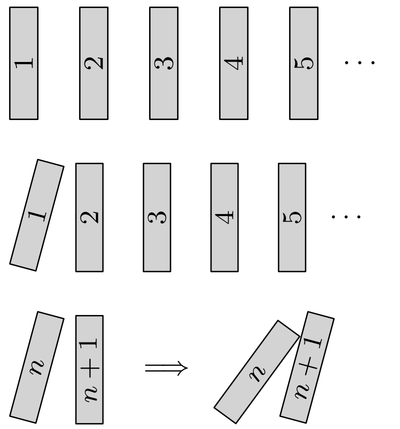
Dominoeffekt

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ haben wir einen Dominostein, der mit n beschriftet ist.



Wir stellen die Dominosteine in aufsteigender Reihenfolge auf.
Angenommen, wir haben die folgenden beiden Informationen:



1) Der Dominostein mit der Zahl 1 fällt um.

2) Für jede Zahl $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gilt:
Wenn der Dominostein mit der Zahl n umfällt,
dann fällt auch der Dominostein mit der Zahl $n + 1$ um.

Erkläre, warum dann der Dominostein mit der Zahl 42 sicher umfällt.

Schließlich fällt jeder Dominostein um.

Der erste Stein fällt um.
Deshalb fällt der zweite Stein um. $n = 1$
Deshalb fällt der dritte Stein um. $n = 2$
$\vdots$
Deshalb fällt der Stein mit der Zahl 41 um. $n = 40$
Deshalb fällt der Stein mit der Zahl 42 um. $n = 41$

Vollständige Induktion

Die **vollständige Induktion** ist eine Beweistechnik, die auf diesem Dominoeffekt aufbaut.
Wir wollen zum Beispiel beweisen, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Zum Beispiel: $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4}_{=10} = \underbrace{\frac{4 \cdot 5}{2}}_{=10}$ ✓

für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Dazu überprüfen wir Folgendes:

1) Induktionsanfang: Die Formel gilt für $n = 1$. Der erste Dominostein fällt um.

2) Induktionsschritt: Wenn die Formel für n gilt, dann gilt auch die Formel für $n + 1$. $n \geq 1$

Wenn der Dominostein mit der Zahl n umfällt, dann fällt auch der nächste Dominostein mit der Zahl $n + 1$ um.

1) Überprüfe den **Induktionsanfang** für $n = 1$:

$$1 \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{1 \cdot 2}{2}}_{=1} \checkmark$$

2) Überprüfe den **Induktionsschritt** $n \to n + 1$:

Du darfst also verwenden, dass $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n \cdot (n+1)}{2}$ gilt. **„Induktionsvoraussetzung“**

Daraus musst du folgern, dass auch $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \dfrac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ gilt.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \underbrace{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}_{=\frac{n+2}{2}} = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2} \checkmark$$

Die Formel gilt also für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$

Summe der ersten n ungeraden Zahlen

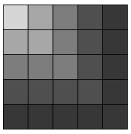
Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1+3+5+\cdots+(2\cdot n-1)}_{n \text{ Summanden}} = n^2$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Zum Beispiel: $\underbrace{1+3+5+7+9}_{=25} = \underbrace{5^2}_{=25}$ ✓

Alternativer geometrischer Beweis:



1) Induktionsanfang $n=1$:

$$1 \stackrel{?}{=} 1^2 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$1+3+5+\cdots+(2\cdot n-1)+(2\cdot n+1) = n^2+2\cdot n+1 = (n+1)^2 \checkmark$$

Summe der ersten n Quadratzahlen

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+\frac{1}{2})}{3}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

1) Induktionsanfang $n=1$:

$$1^2 \stackrel{?}{=} \underbrace{\frac{1\cdot 2\cdot 1{,}5}{3}}_{=1} \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \to n+1$:

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(n+\frac{1}{2})}{3}+(n+1)^2 = (n+1)\cdot\left[\frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})}{3}+n+1\right]$$

Zu zeigen ist also, dass $\frac{n\cdot(n+\frac{1}{2})}{3}+n+1 = \frac{(n+2)\cdot(n+\frac{3}{2})}{3}$ gilt.

$$\iff \quad n\cdot\left(n+\frac{1}{2}\right)+3\cdot n+3 = (n+2)\cdot\left(n+\frac{3}{2}\right) \quad \iff$$

$$\iff \quad n^2+\underbrace{\frac{n}{2}+3\cdot n}_{=\frac{7\cdot n}{2}}+3 = n^2+\underbrace{\frac{3\cdot n}{2}+2\cdot n}_{=\frac{7\cdot n}{2}}+3 \checkmark$$

Rekursive Darstellung → Explizite Darstellung

Die Folge $\langle a_n \rangle$ ist rekursiv definiert:

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 2, \qquad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$a_n = \frac{4^n - 4}{6}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Es gilt also:

$a_2 = 4 \cdot a_1 + 2 = 2$
$a_3 = 4 \cdot a_2 + 2 = 10$
$a_4 = 4 \cdot a_3 + 2 = 42$
$\vdots$

1) Induktionsanfang $n = 1$:

$$\underbrace{a_1}_{=0} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{4^1 - 4}{6}}_{=0} \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 2 = 4 \cdot \frac{4^n - 4}{6} + 2 = \frac{4^{n+1} - 16}{6} + \frac{12}{6} = \frac{4^{n+1} - 4}{6} \checkmark$$

Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge $\langle f_n \rangle$ ist rekursiv definiert:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

Es gilt also:

$f_3 = f_2 + f_1 = 2$
$f_4 = f_3 + f_2 = 3$
$f_5 = f_4 + f_3 = 5$
$\vdots$

Der Induktionsanfang ist in dieser Aufgabe also bei $n = 2$.

1) Induktionsanfang $n = 2$:

$$\underbrace{f_3 \cdot f_1 - f_2^2}_{=2 \cdot 1 - 1^2 = 1} \overset{?}{=} \underbrace{(-1)^2}_{=1} \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned} f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= (f_{n+1} + f_n) \cdot f_n - f_{n+1} \cdot (f_n + f_{n-1}) = \\ &= \cancel{f_{n+1} \cdot f_n} + f_n^2 - \cancel{f_{n+1} \cdot f_n} - f_{n+1} \cdot f_{n-1} = \\ &= f_n^2 - f_{n+1} \cdot f_{n-1} = \\ &= (-1) \cdot (f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2) = \\ &= (-1) \cdot (-1)^n = (-1)^{n+1} \checkmark \end{aligned}$$

Ungleichung

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$3^n \geq n^3$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt.

Hinweis: Überlege im Induktionsschritt, warum für $n \geq 3$ die Ungleichungen $3 \cdot n^2 \leq n^3$ und $3 \cdot n + 1 \leq n^3$ gelten.

1) Induktionsanfang $n = 3$:

$$3^3 \overset{?}{\geq} 3^3 \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$$

Es gilt $3 \cdot n^2 \leq n^3$, weil $3 \leq n$.
Es gilt $3 \cdot n + 1 \leq 4 \cdot n \leq n^3$, weil $4 \leq n^2$.

$$\implies (n+1)^3 \leq n^3 + n^3 + n^3 = 3 \cdot n^3 \leq 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$$

Bernoulli-Ungleichung

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die **Bernoulli-Ungleichung**

$$\boldsymbol{(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x}, \qquad x \geq -1$$

für alle Zahlen $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ gilt.

1) Induktionsanfang $n = 0$:

$$\underbrace{(1+x)^0}_{=1} \overset{?}{\geq} \underbrace{1 + 0 \cdot x}_{=1} \checkmark$$

2) Induktionsschritt $n \to n + 1$:

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x) \cdot (1+x)^n \geq \\ &\geq (1+x) \cdot (1 + n \cdot x) = \\ &= 1 + n \cdot x + x + \underbrace{n \cdot x^2}_{\geq 0} \geq \\ &\geq 1 + (n+1) \cdot x \checkmark\end{aligned}$$

An welcher Stelle im Beweis verwendest du die Voraussetzung $x \geq -1$?