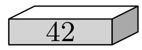
Dominoeffekt

Zu jeder natürlichen Zahl $n \geq 1$ haben wir einen Dominostein, der mit n beschriftet ist.



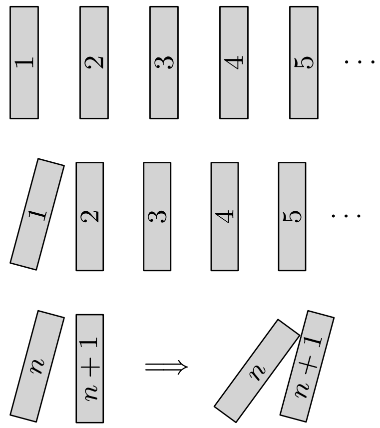
Wir stellen die Dominosteine in aufsteigender Reihenfolge auf.
Angenommen, wir haben die folgenden beiden Informationen:

1) Der Dominostein mit der Zahl 1 fällt um.

2) Für jede Zahl $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$ gilt:
Wenn der Dominostein mit der Zahl n umfällt,
dann fällt auch der Dominostein mit der Zahl $n + 1$ um.

Erkläre, warum dann der Dominostein mit der Zahl 42 sicher umfällt.

Schließlich fällt jeder Dominostein um.



Vollständige Induktion

Die **vollständige Induktion** ist eine Beweistechnik, die auf diesem Dominoeffekt aufbaut.
Wenn wir zum Beispiel beweisen wollen, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \cdots + n}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

Zum Beispiel: $\underbrace{1 + 2 + 3 + 4}_{=10} = \underbrace{\frac{4 \cdot 5}{2}}_{=10}$ ✓

für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt, dann überprüfen wir Folgendes:

1) Induktionsanfang: Die Formel gilt für $n = 1$. — Der erste Dominostein fällt um.

2) Induktionsschritt: Wenn die Formel für n gilt, dann gilt auch die Formel für $n + 1$. — $n \geq 1$

Wenn der Dominostein mit der Zahl n umfällt, dann fällt auch der nächste Dominostein mit der Zahl $n + 1$ um.

1) Überprüfe den **Induktionsanfang** für $n = 1$:

2) Überprüfe den **Induktionsschritt** $n \to n + 1$ für $n \geq 1$:

Du darfst also verwenden, dass $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ gilt.

Das ist die sogenannte **Induktionsvoraussetzung**.

Daraus musst du folgern, dass auch $1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1) \cdot (n+2)}{2}$ gilt.

Damit ist bewiesen, dass die Formel für alle natürlichen Zahlen $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt.

Summe der ersten n ungeraden Zahlen

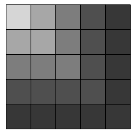
Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2 \cdot n - 1)}_{n \text{ Summanden}} = n^2$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Zum Beispiel: $\underbrace{1 + 3 + 5 + 7 + 9}_{=25} = \underbrace{5^2}_{=25}$ ✓

Alternativer geometrischer Beweis:



Summe der ersten n Quadratzahlen

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Formel

$$\underbrace{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}_{n \text{ Summanden}} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n + \frac{1}{2})}{3}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Rekursive Darstellung → Explizite Darstellung

Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist rekursiv definiert:

$$a_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 4 \cdot a_n + 2, \qquad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$a_n = \frac{4^n - 4}{6}$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt.

Es gilt also:

$a_2 = 4 \cdot a_1 + 2 = 2$
$a_3 = 4 \cdot a_2 + 2 = 10$
$a_4 = 4 \cdot a_3 + 2 = 42$
$\vdots$

Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge $(f_n)_{n\geq 1}$ ist rekursiv definiert:

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1 \quad \text{und} \quad f_{n+2} = f_{n+1} + f_n, \qquad n \geq 1$$

Zeige mit vollständiger Induktion, dass

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt.

Es gilt also:

$f_3 = f_2 + f_1 = 2$
$f_4 = f_3 + f_2 = 3$
$f_5 = f_4 + f_3 = 5$
$\vdots$

Der Induktionsanfang ist in dieser Aufgabe also bei $n = 2$.

Ungleichung

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die Ungleichung

$$3^n \geq n^3$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt.

Hinweis: Überlege im Induktionsschritt, warum für $n \geq 3$ die Ungleichungen $3 \cdot n^2 \leq n^3$ und $3 \cdot n + 1 \leq n^3$ gelten.

Bernoulli-Ungleichung

Zeige mit vollständiger Induktion, dass die **Bernoulli-Ungleichung**

$$\boldsymbol{(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x}, \qquad x \geq -1$$

für alle natürlichen Zahlen $n \geq 0$ gilt.

An welcher Stelle im Beweis verwendest du die Voraussetzung $x \geq -1$?