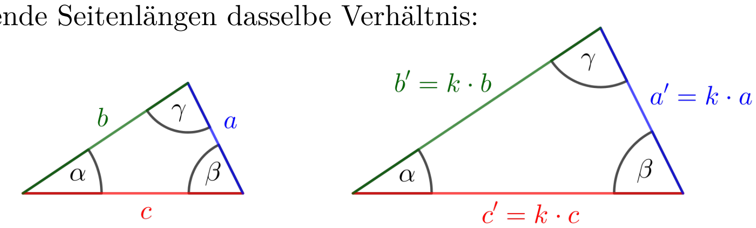
Ähnlichkeit

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen.
In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

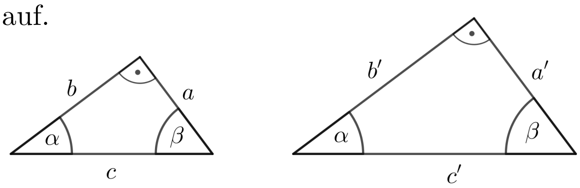
Die Zahl k nennen wir auch **Skalierungsfaktor**.



Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck

Die beiden dargestellten *rechtwinkeligen* Dreiecke haben den gleichen spitzen Winkel α.
Der dritte Winkel β muss dann auch in beiden Dreiecken gleich groß sein. Warum?
Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von β auf.

$$\beta = 90° - \alpha$$



Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich.

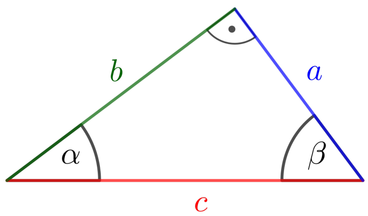
Rechne nach, dass aus $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ auch $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ folgt. $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a} \iff c' \cdot a = a' \cdot c \iff \frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ ✓

Kennt man von einem rechtwinkeligen Dreieck einen spitzen Winkel α,
dann ist also jedes Verhältnis von 2 Seitenlängen *eindeutig* festgelegt.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Die Kathete a liegt *gegenüber* von α. Sie heißt deshalb **Gegenkathete von α**.
Die Kathete b liegt am Winkel α *an*. Sie heißt deshalb **Ankathete von α**.

Die **Winkelfunktionen Sinus**, **Cosinus** und **Tangens** ordnen jedem spitzen Winkel α ein Seitenverhältnis im *rechtwinkeligen* Dreieck mit Winkel α zu:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$ „Sinus von α“

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$ „Cosinus von α“

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$ „Tangens von α“

Zerlegung in rechtwinkelige Dreiecke

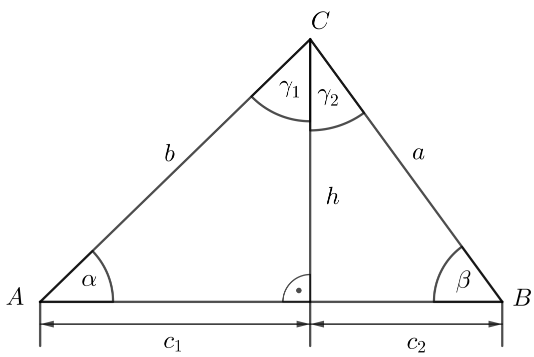
Das Dreieck ABC wird durch eine Höhe in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt.
Trage die richtigen Seitenlängen in die Kästchen ein.

$\sin(\alpha) = \frac{h}{b}$ $\cos(\alpha) = \frac{c_1}{b}$ $\tan(\alpha) = \frac{h}{c_1}$

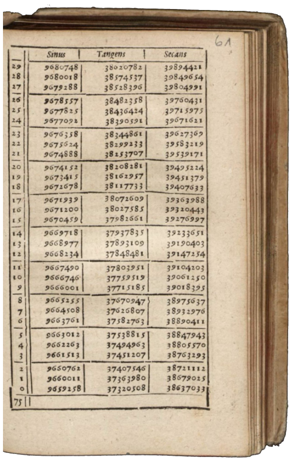
$\sin(\beta) = \frac{h}{a}$ $\cos(\beta) = \frac{c_2}{a}$ $\tan(\beta) = \frac{h}{c_2}$

$\sin(\gamma_1) = \frac{c_1}{b}$ $\cos(\gamma_1) = \frac{h}{b}$ $\tan(\gamma_1) = \frac{c_1}{h}$

$\sin(\gamma_2) = \frac{c_2}{a}$ $\cos(\gamma_2) = \frac{h}{a}$ $\tan(\gamma_2) = \frac{c_2}{h}$



Tabellenbuch aus dem Jahr 1619



Links siehst du eine Seite aus einem Tabellenbuch aus dem Jahr 1619. Auf diese Seite sind die Werte von $\sin(\alpha)$ für einige Winkel α mit $75° \leq \alpha \leq 75{,}5°$ gedruckt.

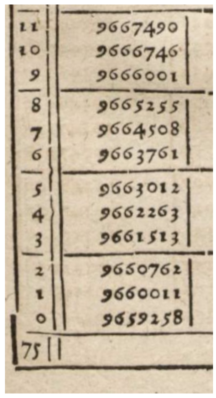
Rechts siehst du einen vergrößerten Ausschnitt der Seite. Berechne mit dem Taschenrechner:

$$\sin(75°) = 0{,}965925...$$

Findest du diesen Wert rechts?

Eine Winkelminute ($1'$) ist $\frac{1}{60}$ von einem Grad ($1°$).

$$\sin(75°\ 6') = \sin(75{,}1°) = 0{,}966376...$$

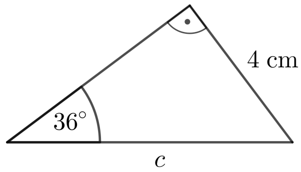


11	9667490
10	9666746
9	9666001
8	9665255
7	9664508
6	9663761
5	9663012
4	9662263
3	9661513
2	9650762
1	9660011
0	9659258
75	

Dein Taschenrechner kann diese Werte mithilfe von Taylor-Reihen berechnen.

Seitenlänge gesucht

Berechne die Seitenlänge c im rechts dargestellten Dreieck.

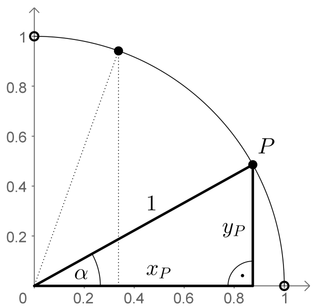


$$\sin(36°) = \frac{4}{c} \iff c \cdot \sin(36°) = 4 \iff$$

$$\iff c = \frac{4}{\sin(36°)} = 6{,}80...\,\text{cm}$$

Arcusfunktionen

Der Kreisbogen mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius 1 ist im Koordinatensystem unten eingezeichnet. Jedem *spitzen* Winkel α entspricht – wie dargestellt – ein Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ auf dem Kreisbogen.



1) Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von y_P auf.

$$y_P = \sin(\alpha)$$

2) Wie groß bzw. wie klein kann $\sin(\alpha)$ für *spitze* Winkel α also sein?

$$0 < \sin(\alpha) < 1$$

Die Zuordnung von Winkel zu Seitenverhältnis kann für *spitze* Winkel umgekehrt werden. Berechne mit dem Taschenrechner:

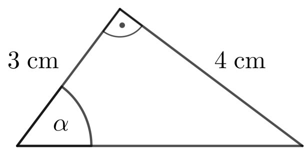
$\sin(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arcsin(0{,}5) = 30°$ „Arcussinus von 0,5“

$\cos(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arccos(0{,}5) = 60°$ „Arcuscosinus von 0,5“

$\tan(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arctan(0{,}5) = 26{,}56...°$ „Arcustangens von 0,5“

Winkel gesucht

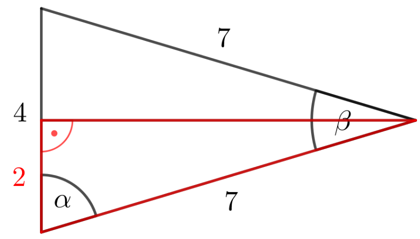
Berechne den Winkel α im rechts dargestellten Dreieck.



$$\tan(\alpha) = \frac{4}{3} \iff \alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53{,}13...°$$

Gleichschenkeliges Dreieck

Berechne die Winkel α und β im rechts dargestellten Dreieck.



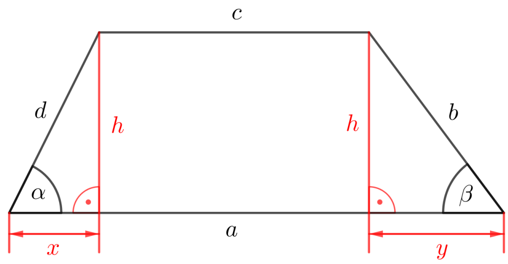
Da das Dreieck gleichschenkelig ist, können wir es in zwei zueinander kongruente rechtwinkelige Dreiecke zerlegen.

$$\cos(\alpha) = \frac{2}{7} \implies \alpha = \arccos\left(\frac{2}{7}\right) = 73{,}39...^\circ$$

$$2 \cdot \alpha + \beta = 180^\circ \implies \beta = 180^\circ - 2 \cdot \alpha = 33{,}20...^\circ$$

Trapez

Im rechts unten dargestellten Trapez gilt: $\alpha = 63^\circ$, $\beta = 53^\circ$, $b = 5\,\text{cm}$, $c = 6\,\text{cm}$
Berechne den Umfang u vom Trapez.



$$\sin(\beta) = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \sin(\beta) = 3{,}99...\,\text{cm}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{d} \implies d = \frac{h}{\sin(\alpha)} = 4{,}48...\,\text{cm}$$

$$x^2 + h^2 = d^2 \implies x = \sqrt{d^2 - h^2} = 2{,}03...\,\text{cm}$$

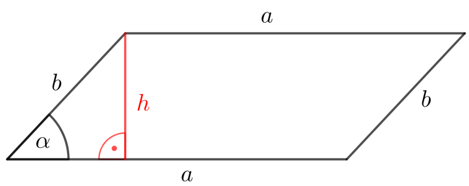
$$y^2 + h^2 = b^2 \implies y = \sqrt{b^2 - h^2} = 3{,}00...\,\text{cm}$$

$$a = c + x + y = 11{,}04...\,\text{cm}$$

$$u = a + b + c + d = 26{,}52...\,\text{cm}$$

Trigonometrische Flächenformel

Rechts ist ein Parallelogramm dargestellt.
Stelle mithilfe von a, b und α eine Formel für seinen Flächeninhalt F auf.



$$F = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Begründung: Für den Flächeninhalt F vom Parallelogramm gilt $F = a \cdot h$.

$$\sin(\alpha) = \frac{h}{b} \implies h = b \cdot \sin(\alpha) \implies F = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

Daraus folgt auch die sogenannte trigonometrische Flächenformel. Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck.