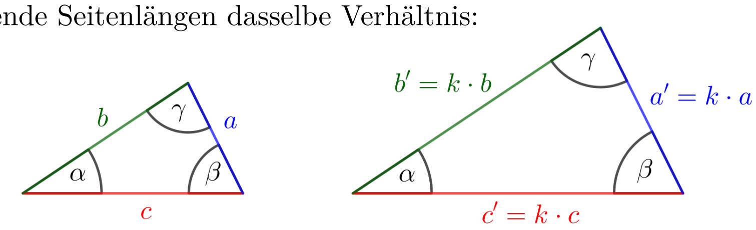
Ähnlichkeit

Zwei Dreiecke sind zueinander ähnlich, wenn ihre Winkel paarweise übereinstimmen.
In den beiden Dreiecken haben entsprechende Seitenlängen dasselbe Verhältnis:

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

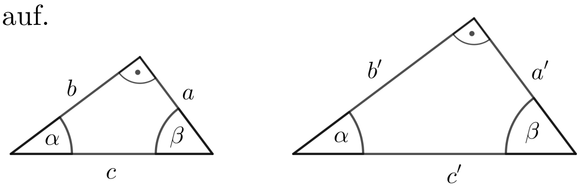
Die Zahl k nennen wir auch **Skalierungsfaktor**.



Seitenverhältnisse im rechtwinkeligen Dreieck

Die beiden dargestellten *rechtwinkeligen* Dreiecke haben den gleichen spitzen Winkel α.
Der dritte Winkel β muss dann auch in beiden Dreiecken gleich groß sein. Warum?
Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von β auf.

$\beta = \square$



Die beiden Dreiecke sind also zueinander ähnlich.

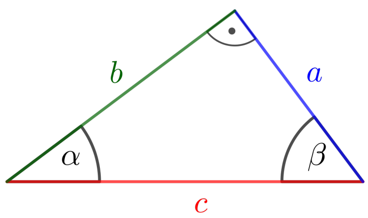
Rechne nach, dass aus $\frac{c'}{c} = \frac{a'}{a}$ auch $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ folgt.

Kennt man von einem rechtwinkeligen Dreieck einen spitzen Winkel α,
dann ist also jedes Verhältnis von 2 Seitenlängen *eindeutig* festgelegt.

Winkelfunktionen im rechtwinkeligen Dreieck

Die Kathete a liegt *gegenüber* von α. Sie heißt deshalb **Gegenkathete von α**.
Die Kathete b liegt am Winkel α *an*. Sie heißt deshalb **Ankathete von α**.

Die **Winkelfunktionen Sinus**, **Cosinus** und **Tangens** ordnen jedem spitzen Winkel α
ein Seitenverhältnis im *rechtwinkeligen* Dreieck mit Winkel α zu:



$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$ „Sinus von α“

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$ „Cosinus von α“

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Ankathete von } \alpha} = \frac{a}{b}$$ „Tangens von α“

Zerlegung in rechtwinkelige Dreiecke

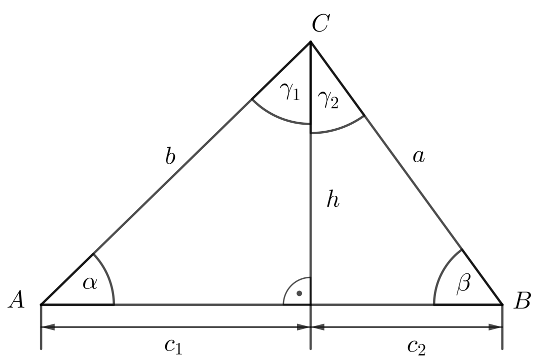
Das Dreieck ABC wird durch eine Höhe in zwei rechtwinkelige Dreiecke zerlegt.
Trage die richtigen Seitenlängen in die Kästchen ein.

$\sin(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\cos(\alpha) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\tan(\alpha) = \frac{\square}{\square}$

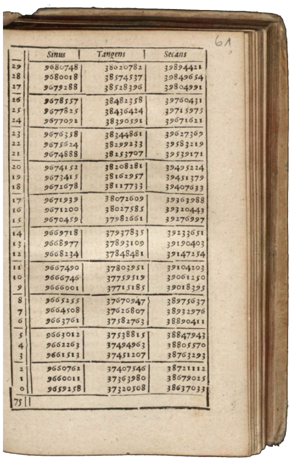
$\sin(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\cos(\beta) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\tan(\beta) = \frac{\square}{\square}$

$\sin(\gamma_1) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\cos(\gamma_1) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\tan(\gamma_1) = \frac{\square}{\square}$

$\sin(\gamma_2) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\cos(\gamma_2) = \frac{\square}{\square}$ $\quad\tan(\gamma_2) = \frac{\square}{\square}$



Tabellenbuch aus dem Jahr 1619



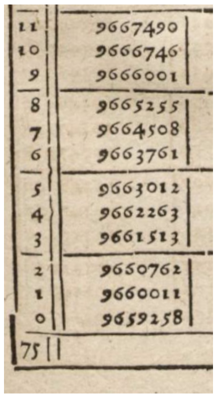
Links siehst du eine Seite aus einem Tabellenbuch aus dem Jahr 1619. Auf diese Seite sind die Werte von $\sin(\alpha)$ für einige Winkel α mit $75° \leq \alpha \leq 75{,}5°$ gedruckt.

Rechts siehst du einen vergrößerten Ausschnitt der Seite. Berechne mit dem Taschenrechner:

$\sin(75°) = \boxed{}$ Findest du diesen Wert rechts?

Eine Winkelminute $(1')$ ist $\frac{1}{60}$ von einem Grad $(1°)$.

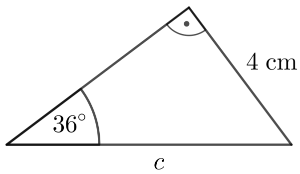
$$\sin(75°\ 6') = \sin\left(\boxed{}°\right) = \boxed{}$$



Dein Taschenrechner kann diese Werte mithilfe von Taylor-Reihen berechnen.

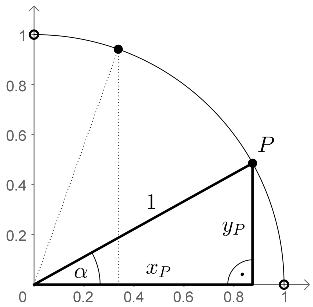
Seitenlänge gesucht

Berechne die Seitenlänge c im rechts dargestellten Dreieck.



Arcusfunktionen

Der Kreisbogen mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius 1 ist im Koordinatensystem unten eingezeichnet. Jedem *spitzen* Winkel α entspricht – wie dargestellt – ein Punkt $P = (x_P \mid y_P)$ auf dem Kreisbogen.



1) Stelle mithilfe von α eine Formel zur Berechnung von y_P auf.

$$y_P = \boxed{}$$

2) Wie groß bzw. wie klein kann $\sin(\alpha)$ für *spitze* Winkel α also sein?

$$\boxed{} < \sin(\alpha) < \boxed{}$$

Die Zuordnung von Winkel zu Seitenverhältnis kann für *spitze* Winkel umgekehrt werden.
Berechne mit dem Taschenrechner:

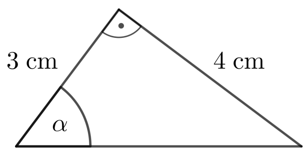
$\sin(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arcsin(0{,}5) = \boxed{}$ „Arcussinus von 0,5“

$\cos(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arccos(0{,}5) = \boxed{}$ „Arcuscosinus von 0,5“

$\tan(\alpha) = 0{,}5 \iff \alpha = \arctan(0{,}5) = \boxed{}$ „Arcustangens von 0,5“

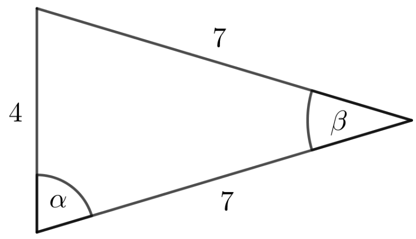
Winkel gesucht

Berechne den Winkel α im rechts dargestellten Dreieck.



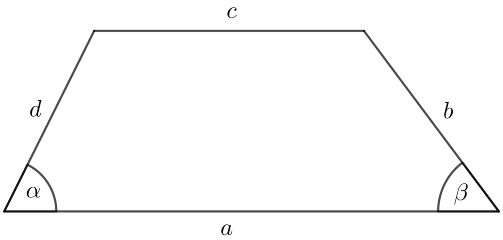
Gleichschenkeliges Dreieck

Berechne die Winkel α und β im rechts dargestellten Dreieck.



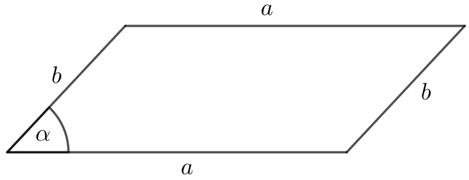
Trapez

Im rechts unten dargestellten Trapez gilt: $\alpha = 63°,\ \beta = 53°,\ b = 5\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}$
Berechne den Umfang u vom Trapez.



Trigonometrische Flächenformel

Rechts ist ein Parallelogramm dargestellt.
Stelle mithilfe von a, b und α eine Formel für seinen Flächeninhalt F auf.



$F =$ ☐

Begründung:

Daraus folgt auch die sogenannte trigonometrische Flächenformel. Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Allgemeines Dreieck.