



Erinnere dich, dass **Äquivalenzumformungen** die Lösungen einer Gleichung *nicht* verändern:

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$3 \cdot x - 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot x = 6$$

die gleiche Lösung **2**.

Multiplikation mit dem gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$\frac{x}{4} = -2 \quad \text{und} \quad x = 4 \cdot (-2)$$

die gleiche Lösung **-8**.

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$x^2 + 3 = 12 \quad \text{und} \quad x^2 = 9$$

die gleichen Lösungen **-3** und **3**.

Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$4 \cdot x = 8 \quad \text{und} \quad x = \frac{8}{4}$$

die gleiche Lösung **2**.

Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung



Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung.

Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben, zum Beispiel:

Die Gleichung $x = -3$ hat nur eine Lösung, nämlich **-3**.

Die quadrierte Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen, nämlich **-3** und **3**.

Die **Lösungen der quadrierten Gleichung** sind nur **Lösungskandidaten** der ursprünglichen Gleichung.

Mit einer Probe können wir feststellen, welche Lösungskandidaten auch tatsächlich **Lösungen** sind.

Wurzelgleichungen lösen



Wir lösen die Wurzelgleichung $2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42$ über der Grundmenge \mathbb{R} .

1) Zuerst isolieren wir den Wurzelausdruck mit Äquivalenzumformungen auf einer Seite:

$$2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42 \iff 2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 10 \iff \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5$$

2) Dann quadrieren wir beide Seiten und lösen die quadrierte Gleichung:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5 \implies 3 - 2 \cdot x = 25 \iff 3 - 25 = 2 \cdot x \iff x = -11$$

Das Symbol \implies bedeutet hier: „Jede Lösung der linken Gleichung ist auch eine Lösung der rechten Gleichung.“

Das Symbol \iff bedeutet hier zusätzlich: „Auch jede Lösung der rechten Gleichung ist eine Lösung der linken Gleichung.“

Der einzige Lösungskandidat dieser Wurzelgleichung ist also **-11**.

3) Mit einer Probe testen wir, ob **-11** tatsächlich eine Lösung der Wurzelgleichung ist.

Dazu setzen wir den Lösungskandidaten **-11** in eine Gleichung *vor* dem Quadrieren ein:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot (-11)} = \sqrt{25} = 5 \checkmark$$

Bis zum Quadrieren haben wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt.

Die Zahl **-11** ist bei diesem Beispiel also auch eine Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung.

Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt damit: $L = \{-11\}$

Bei Wurzelgleichungen muss nicht jeder Lösungskandidat auch eine Lösung sein.

a) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$\begin{array}{r|l}
 5 + \sqrt{11-x} = 3 & | -5 \\
 \sqrt{11-x} = -2 & | (\dots)^2 \\
 11-x = 4 & | +x-4 \\
 7 = x &
 \end{array}$$

Wenn die Probe verschiedene Ergebnisse auf den beiden Seiten liefert, dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der **Lösungskandidat** *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

Linke Seite: $\sqrt{11-7} = \sqrt{4} = 2$

Rechte Seite: $-2 \quad \times$

b) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$\begin{array}{r|l}
 \sqrt{18-5 \cdot x} = \sqrt{2 \cdot x - 10} & | (\dots)^2 \\
 18-5 \cdot x = 2 \cdot x - 10 & | +5 \cdot x + 10 \\
 28 = 7 \cdot x & | :7 \\
 4 = x &
 \end{array}$$

Wenn die Probe einen **undefinierten** Wurzel Ausdruck (z.B. $\sqrt{-4}$) liefert, dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der **Lösungskandidat** *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

Linke Seite: $\sqrt{18-20} = \sqrt{-2}$

Rechte Seite: $\sqrt{18-20} = \sqrt{-2} \quad \times$

Wir nennen Lösungskandidaten, die *keine* Lösungen sind, auch **Scheinlösungen**.

Löse die Gleichung $\frac{-2 \cdot \sqrt{6+2 \cdot x}}{3} = 4$ über der Grundmenge \mathbb{R} .

$$\begin{array}{r|l}
 \frac{-2 \cdot \sqrt{6+2 \cdot x}}{3} = 4 & | \cdot 3 \\
 -2 \cdot \sqrt{6+2 \cdot x} = 12 & | (\dots)^2 \\
 4 \cdot (6+2 \cdot x) = 144 & \\
 24+8 \cdot x = 144 & | -24 \\
 8 \cdot x = 120 & | :8 \\
 x = 15 &
 \end{array}$$

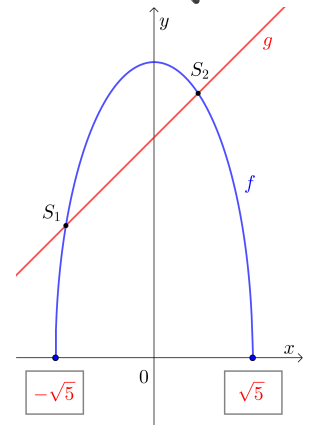
Probe: $-2 \cdot \sqrt{6+2 \cdot 15} = -2 \cdot \sqrt{36} = -12 \neq 12 \quad \times$

Die Gleichung hat also keine Lösung: $L = \{\}$

Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{5 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = x + 5$$

sind rechts dargestellt.



- 1) Berechne die Nullstellen von f , und trage sie rechts in die Kästchen ein.
- 2) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2 .

1) $f(x) = 0 \iff 5 - x^2 = 0 \iff x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5} = \pm 2,236\dots$

2) Die beiden Schnittstellen sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{5 - x^2} &= x + 5 && | (\dots)^2 \\ 9 \cdot (5 - x^2) &= (x + 5)^2 \\ 45 - 9 \cdot x^2 &= x^2 + 10 \cdot x + 25 && | + 9 \cdot x^2 - 45 \\ 0 &= 10 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 20 \\ 0 &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

Kleine Lösungsformel: $p = 1, q = -2$

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \implies x_1 = -2, x_2 = 1$$

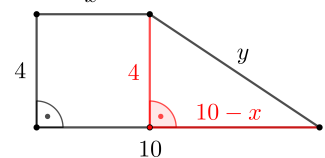
$$f(-2) = g(-2) = 3 \implies S_1 = (-2 | 3)$$

$$f(1) = g(1) = 6 \implies S_2 = (1 | 6)$$

Rechts ist ein rechtwinkeliges Trapez (nicht maßstabsgetreu) dargestellt.

Für die Seitenlängen x und y gilt: $x + y = 12$

Berechne die Seitenlängen x und y .



Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$(10 - x)^2 + 4^2 = y^2 \xrightarrow{y>0} y = \sqrt{(10 - x)^2 + 4^2} = \sqrt{100 - 20 \cdot x + x^2 + 16} = \sqrt{x^2 - 20 \cdot x + 116}$$

Wir setzen in die Gleichung $x + y = 12$ ein, und lösen die Wurzelgleichung:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 20 \cdot x + 116} &= 12 \\ \sqrt{x^2 - 20 \cdot x + 116} &= 12 - x \\ x^2 - 20 \cdot x + 116 &= (12 - x)^2 \\ x^2 - 20 \cdot x + 116 &= 144 - 24 \cdot x + x^2 \\ 4 \cdot x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{49 - 140 + 116} = \sqrt{25} = 5 = 12 - 7 \checkmark$

Für die Seitenlängen x und y gilt also: $x = 7, y = 12 - x = 5$

