Äquivalenzumformungen

Erinnere dich, dass **Äquivalenzumformungen** die Lösungen einer Gleichung *nicht* verändern:

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$3 \cdot x - 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot x = 6$$

die gleiche Lösung 2.

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$x^2 + 3 = 12 \quad \text{und} \quad x^2 = 9$$

die gleichen Lösungen -3 und 3.

Multiplikation mit dem gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$\frac{x}{4} = -2 \quad \text{und} \quad x = 4 \cdot (-2)$$

die gleiche Lösung -8.

Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.
Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$4 \cdot x = 8 \quad \text{und} \quad x = \frac{8}{4}$$

die gleiche Lösung 2.

Quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung

Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung.
Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben, zum Beispiel:
Die Gleichung $x = -3$ hat nur eine Lösung, nämlich -3.
Die quadrierte Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen, nämlich -3 und 3.

Die Lösungen der quadradrierten Gleichung sind nur Lösungskandidaten der ursprünglichen Gleichung.

Mit einer Probe können wir feststellen, welche Lösungskandidaten auch tatsächlich Lösungen sind.

Wurzelgleichungen lösen

Wir lösen die Wurzelgleichung $2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

1) Zuerst isolieren wir den Wurzelausdruck mit Äquivalenzumformungen auf einer Seite:

$$2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42 \iff 2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 10 \iff \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5$$

2) Dann quadrieren wir beide Seiten und lösen die quadrierte Gleichung:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5 \implies 3 - 2 \cdot x = 25 \iff 3 - 25 = 2 \cdot x \iff x = -11$$

Das Symbol $\implies$ bedeutet hier: „Jede Lösung der linken Gleichung ist auch eine Lösung der rechten Gleichung."
Das Symbol $\iff$ bedeutet hier zusätzlich: „Auch jede Lösung der rechten Gleichung ist eine Lösung der linken Gleichung."

Der einzige Lösungskandidat dieser Wurzelgleichung ist also -11.

3) Mit einer Probe testen wir, ob -11 tatsächlich eine Lösung der Wurzelgleichung ist.
Dazu setzen wir den Lösungskandidaten -11 in eine Gleichung *vor* dem Quadrieren ein:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot (-11)} = \sqrt{25} = 5 \checkmark$$

Bis zum Quadrieren haben wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt.
Die Zahl -11 ist bei diesem Beispiel also auch eine Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung.
Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt damit: $L = \{-11\}$

Scheinlösungen MmF

Bei Wurzelgleichungen muss nicht jeder Lösungskandidat auch eine Lösung sein.

a) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$\begin{aligned} 5+\sqrt{11-x} &= 3 && \mid -5 \\ \sqrt{11-x} &= -2 && \mid (\ldots)^2 \\ 11-x &= 4 && \mid +x-4 \\ 7 &= x \end{aligned}$$

Wenn die Probe verschiedene Ergebnisse auf den beiden Seiten liefert,
dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

Linke Seite: $\sqrt{11-7}=\sqrt{4}=2$ Rechte Seite: -2 ✗

b) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$\begin{aligned} \sqrt{18-5\cdot x} &= \sqrt{2\cdot x-10} && \mid (\ldots)^2 \\ 18-5\cdot x &= 2\cdot x-10 && \mid +5\cdot x+10 \\ 28 &= 7\cdot x && \mid :7 \\ 4 &= x \end{aligned}$$

Wenn die Probe einen undefinierten Wurzelausdruck (z.B. $\sqrt{-4}$) liefert,
dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

Linke Seite: $\sqrt{18-20}=\sqrt{-2}$ Rechte Seite: $\sqrt{18-20}=\sqrt{-2}$ ✗

Wir nennen Lösungskandidaten, die *keine* Lösungen sind, auch **Scheinlösungen**.

Scheinlösungen MmF

Löse die Gleichung $\dfrac{-2\cdot\sqrt{6+2\cdot x}}{3}=4$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{-2\cdot\sqrt{6+2\cdot x}}{3} &= 4 && \mid \cdot 3 \\ -2\cdot\sqrt{6+2\cdot x} &= 12 && \mid (\ldots)^2 \\ 4\cdot(6+2\cdot x) &= 144 \\ 24+8\cdot x &= 144 && \mid -24 \\ 8\cdot x &= 120 && \mid :8 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Probe: $-2\cdot\sqrt{6+2\cdot 15}=-2\cdot\sqrt{36}=-12\neq 12$ ✗

Die Gleichung hat also keine Lösung: $L=\{\}$

Halbe Ellipse – Gerade

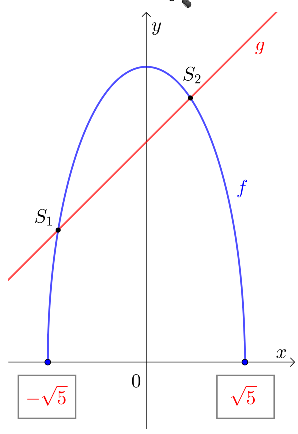
Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{5 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = x + 5$$

sind rechts dargestellt.

1) Berechne die Nullstellen von f, und trage sie rechts in die Kästchen ein.

2) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.



1) $f(x) = 0 \iff 5 - x^2 = 0 \iff x^2 = 5 \iff x = \pm\sqrt{5} = \pm 2{,}236...$

2) Die beiden Schnittstellen sind die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sqrt{5 - x^2} &= x + 5 && \mid (\ldots)^2 \\ 9 \cdot (5 - x^2) &= (x+5)^2 \\ 45 - 9 \cdot x^2 &= x^2 + 10 \cdot x + 25 && \mid +9 \cdot x^2 - 45 \\ 0 &= 10 \cdot x^2 + 10 \cdot x - 20 \\ 0 &= x^2 + x - 2 \end{aligned}$$

Kleine Lösungsformel: $p = 1,\ q = -2$

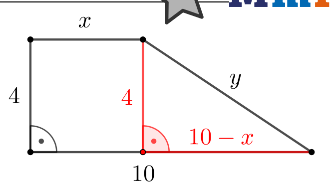
$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2} \implies x_1 = -2,\ x_2 = 1$$

$f(-2) = g(-2) = 3 \implies S_1 = (-2 \mid 3)$

$f(1) = g(1) = 6 \implies S_2 = (1 \mid 6)$

Trapez

Rechts ist ein rechtwinkeliges Trapez (nicht maßstabsgetreu) dargestellt.
Für die Seitenlängen x und y gilt: $x + y = 12$
Berechne die Seitenlängen x und y.



Aus dem Satz von Pythagoras folgt:

$$(10 - x)^2 + 4^2 = y^2 \overset{y>0}{\implies} y = \sqrt{(10-x)^2 + 4^2} = \sqrt{100 - 20 \cdot x + x^2 + 16} = \sqrt{x^2 - 20 \cdot x + 116}$$

Wir setzen in die Gleichung $x + y = 12$ ein, und lösen die Wurzelgleichung:

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 20 \cdot x + 116} &= 12 \\ \sqrt{x^2 - 20 \cdot x + 116} &= 12 - x \\ x^2 - 20 \cdot x + 116 &= (12 - x)^2 \\ x^2 - 20 \cdot x + 116 &= 144 - 24 \cdot x + x^2 \\ 4 \cdot x &= 28 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Probe: $\sqrt{49 - 140 + 116} = \sqrt{25} = 5 = 12 - 7$ ✓
Für die Seitenlängen x und y gilt also: $x = 7,\ y = 12 - x = 5$