



Erinnere dich, dass **Äquivalenzumformungen** die Lösungen einer Gleichung *nicht* verändern:

Addition des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$3 \cdot x - 6 = 0 \quad \text{und} \quad 3 \cdot x = 6$$

die gleiche Lösung .

Multiplikation mit dem gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$\frac{x}{4} = -2 \quad \text{und} \quad x = 4 \cdot (-2)$$

die gleiche Lösung .

Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$x^2 + 3 = 12 \quad \text{und} \quad x^2 = 9$$

die gleichen Lösungen und .

Division durch den gleichen Term $\neq 0$ auf beiden Seiten der Gleichung ist eine Äquivalenzumformung.

Zum Beispiel haben die Gleichungen

$$4 \cdot x = 8 \quad \text{und} \quad x = \frac{8}{4}$$

die gleiche Lösung .

Quadrieren ist *keine* Äquivalenzumformung



Das Quadrieren beider Seiten einer Gleichung ist *keine* Äquivalenzumformung.

Nach dem Quadrieren kann eine Gleichung nämlich mehr Lösungen als zuvor haben, zum Beispiel:

Die Gleichung $x = -3$ hat nur eine Lösung, nämlich .

Die quadrierte Gleichung $x^2 = 9$ hat zwei Lösungen, nämlich und .

Die **Lösungen der quadrierten Gleichung** sind nur **Lösungskandidaten** der ursprünglichen Gleichung.

Mit einer Probe können wir feststellen, welche Lösungskandidaten auch tatsächlich **Lösungen** sind.

Wurzelgleichungen lösen



Wir lösen die Wurzelgleichung $2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42$ über der Grundmenge \mathbb{R} .

- 1) Zuerst isolieren wir den Wurzelausdruck mit Äquivalenzumformungen auf einer Seite:

$$2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} + 32 = 42 \iff 2 \cdot \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 10 \iff \sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5$$

- 2) Dann quadrieren wir beide Seiten und lösen die quadrierte Gleichung:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot x} = 5 \implies 3 - 2 \cdot x = 25 \iff 3 - 25 = 2 \cdot x \iff x = -11$$

Das Symbol \implies bedeutet hier: „Jede Lösung der linken Gleichung ist auch eine Lösung der rechten Gleichung.“

Das Symbol \iff bedeutet hier zusätzlich: „Auch jede Lösung der rechten Gleichung ist eine Lösung der linken Gleichung.“

Der einzige Lösungskandidat dieser Wurzelgleichung ist also -11 .

- 3) Mit einer Probe testen wir, ob -11 tatsächlich eine Lösung der Wurzelgleichung ist.

Dazu setzen wir den Lösungskandidaten -11 in eine Gleichung *vor* dem Quadrieren ein:

$$\sqrt{3 - 2 \cdot (-11)} = \sqrt{25} = 5 \checkmark$$

Bis zum Quadrieren haben wir nur Äquivalenzumformungen durchgeführt.

Die Zahl -11 ist bei diesem Beispiel also auch eine Lösung der ursprünglichen Wurzelgleichung.

Für die Lösungsmenge L dieser Gleichung gilt damit: $L = \{-11\}$



Bei Wurzelgleichungen muss nicht jeder Lösungskandidat auch eine Lösung sein.

a) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$5 + \sqrt{11 - x} = 3$$

	=			- 5
	=			(\dots)^2
	=			+ x - 4

Wenn die Probe verschiedene Ergebnisse auf den beiden Seiten liefert, dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der **Lösungskandidat** *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

b) Führe die angegebenen Rechenschritte durch:

$$\sqrt{18 - 5 \cdot x} = \sqrt{2 \cdot x - 10}$$

	=			(\dots)^2
	=			+ 5 \cdot x + 10
	=			: 7

Wenn die Probe einen **undefinierten** Wurzelausdruck (z.B. $\sqrt{-4}$) liefert, dann ist der Lösungskandidat *keine* Lösung der Wurzelgleichung.

Zeige, dass bei diesem Beispiel der **Lösungskandidat** *keine* Lösung der Wurzelgleichung ist.

Wir nennen Lösungskandidaten, die *keine* Lösungen sind, auch **Scheinlösungen**.



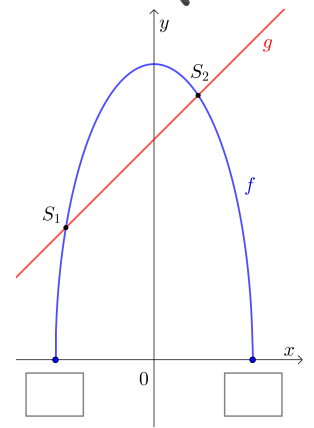
Löse die Gleichung $\frac{-2 \cdot \sqrt{6 + 2 \cdot x}}{3} = 4$ über der Grundmenge \mathbb{R} .

Die Graphen der Funktionen f und g mit

$$f(x) = 3 \cdot \sqrt{5 - x^2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = x + 5$$

sind rechts dargestellt.

- 1) Berechne die **Nullstellen** von f , und trage sie rechts in die Kästchen ein.
- 2) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2 .



Trapez

Rechts ist ein rechtwinkeliges **Trapez** (nicht maßstabsgetreu) dargestellt.

Für die Seitenlängen x und y gilt: $x + y = 12$

Berechne die Seitenlängen x und y .

