Zehnerpotenzen

Statt $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$ schreiben wir kürzer 10^7.

Allgemein schreiben wir: $10^n = \underbrace{10 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot 10}_{n \text{ Faktoren}} \quad (n \in \mathbb{N}^+)$

Die Zahl 10 heißt **Basis** der **Zehnerpotenz $\mathbf{10^n}$**. Die Zahl n heißt **Exponent**.

Rechenregeln für Zehnerpotenzen

Trage jeweils den richtigen Exponenten in das Kästchen ein.

1) $10^3 \cdot 10^2 = (10 \cdot 10 \cdot 10) \cdot (10 \cdot 10) = 10^{\square}$ Allgemein gilt: $\mathbf{10^x \cdot 10^y = 10^{x+y}}$

2) $\dfrac{10^7}{10^3} = \dfrac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10} = 10^{\square}$ Allgemein gilt: $\mathbf{\dfrac{10^x}{10^y} = 10^{x-y}}$

3) $\left(10^2\right)^3 = 10^2 \cdot 10^2 \cdot 10^2 = 10^{\square}$ Allgemein gilt: $\mathbf{(10^x)^y = 10^{x \cdot y}}$

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten

Welche Zahlen sind 10^0, 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, …? Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

$$10^3 \xleftarrow{\cdot 10} 10^2 \xleftarrow{\cdot 10} 10^1 \xleftarrow{\cdot 10} 10^0 \xleftarrow{\cdot 10} 10^{-1} \xleftarrow{\cdot 10} 10^{-2} \xleftarrow{\cdot 10} 10^{-3}$$

$$10^3 \xrightarrow{: 10} 10^2 \xrightarrow{: 10} 10^1 \xrightarrow{: 10} 10^0 \xrightarrow{: 10} 10^{-1} \xrightarrow{: 10} 10^{-2} \xrightarrow{: 10} 10^{-3}$$

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
1000	100	10	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$
				$\dfrac{1}{\square}$	$\dfrac{1}{\square}$	$\dfrac{1}{\square}$
				$\dfrac{1}{10^{\square}}$	$\dfrac{1}{10^{\square}}$	$\dfrac{1}{10^{\square}}$

Merke: **i)** $10^n = 1\underbrace{0\cdots0}_{n \text{ 0er}}$ **ii)** $10^0 = 1$ **iii)** $10^{-n} = \underbrace{0,0\cdots0}_{n \text{ 0er}}1 = \dfrac{1}{10^n} \quad (n \in \mathbb{N})$

Damit gelten alle Rechenregeln für Zehnerpotenzen auch mit ganzzahligen Exponenten.

Zehnerpotenzen mit ganzzahligen Exponenten

Ordne die Zahlen der Größe nach: $0,\ 10^2,\ 10^{-2},\ -10^2,\ -10^{-2},\ 10^3,\ 10^{-3},\ -10^3,\ -10^{-3}$

$\square < \square < \square < \square < \square < \square < \square < \square < \square$

Rechenregeln für Zehnerpotenzen

Schreibe das Ergebnis als Zehnerpotenz an.

a) $\dfrac{10^4 \cdot 10^2}{10^3} = \square$

b) $\dfrac{10^{-2} \cdot 10^5}{10^{-4}} = \square$

c) $\left(10^{-3}\right)^2 \cdot 10^0 = \square$

d) $10 \cdot \left(10^{-2}\right)^{-4} = \square$

Dezimalsystem

Im **Dezimalsystem** entspricht jeder Stelle eine Zehnerpotenz. Zum Beispiel gilt für die **Dezimalzahl** 4287,023:

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
4	2	8	7 ,	0	2	3

$$4287{,}023 = 4\cdot 1000 + 2\cdot 100 + 8\cdot 10 + 7\cdot 1 + 0\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}01 + 3\cdot 0{,}001 =$$
$$= 4\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 0\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3}$$

Dezimalsystem

Stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a) $3\cdot 10^2 + 2\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-1} + 9\cdot 10^{-3} = \square$

b) $1\cdot 10^{-3} + 1\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^0 + 5\cdot 10^{-4} + 4\cdot 10^{-2} = \square$

Multiplikation mit Zehnerpotenzen

Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein, und stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

$$4287{,}023\cdot 10^2 = (4\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 0\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3})\cdot 10^2 =$$
$$= 4\cdot 10^{\square} + 2\cdot 10^{\square} + 8\cdot 10^{\square} + 7\cdot 10^{\square} + 0\cdot 10^{\square} + 2\cdot 10^{\square} + 3\cdot 10^{\square} =$$
$$= \square$$

Merke: Eine Multiplikation mit 10^n verschiebt das Komma um n Stellen nach *rechts* ($n \in \mathbb{N}$).

$$4287{,}023\cdot 10^{-2} = (4\cdot 10^3 + 2\cdot 10^2 + 8\cdot 10^1 + 7\cdot 10^0 + 0\cdot 10^{-1} + 2\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3})\cdot 10^{-2} =$$
$$= 4\cdot 10^{\square} + 2\cdot 10^{\square} + 8\cdot 10^{\square} + 7\cdot 10^{\square} + 0\cdot 10^{\square} + 2\cdot 10^{\square} + 3\cdot 10^{\square} =$$
$$= \square$$

Merke: Eine Multiplikation mit 10^{-n} verschiebt das Komma um n Stellen nach *links* ($n \in \mathbb{N}$).

Multiplikation mit Zehnerpotenzen

Stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a) $4{,}2\cdot 10^4 = \square$ **b)** $10{,}3\cdot 10^{-5} = \square$ **c)** $-10{,}8\cdot 10^3 = \square$

Besondere Zehnerpotenzen

Trage die richtigen Exponenten in die Kästchen ein.

1 Million $= 1\,000\,000 = 10^{\square}$

1 Milliarde $= 1\,000\,000\,000 = 10^{\square}$

1 Prozent $= 1\,\% = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{\square}$

1 Promille $= 1\,‰ = \frac{1}{1000} = \frac{1}{10^3} = 10^{\square}$

1 part per million $= 1$ ppm $= \frac{1}{1\,000\,000} = \frac{1}{10^6} = 10^{\square}$

Besondere Zehnerpotenzen

Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein, und stelle das Ergebnis als Dezimalzahl dar.

a) 0,08 Millionen $= 0{,}08\cdot 10^{\square} = \square$

b) $42\,\% = 42\cdot 10^{\square} = \square$

c) $0{,}2\,‰ = 0{,}2\cdot 10^{\square} = \square$

d) 5000 ppm $= 5000\cdot 10^{\square} = \square$

Astronomische Einheit

Die mittlere Entfernung zwischen Erde und Sonne beträgt rund 149 597 870 700 m.
Trage den richtigen Exponenten in das Kästchen ein:

$$149\,597\,870\,700\,\text{m} = 1{,}495\,978\,707 \cdot 10^{\square}\,\text{m}$$

Gib die Zahl 149 597 870 700 in deinen Taschenrechner ein, drücke die Taste $\boxed{=}$ und vergleiche.

Gleitkommadarstellungen

Trage jeweils den richtigen Exponenten in das Kästchen ein:

$$8315 = 8315 \cdot 10^{\square} = 831{,}5 \cdot 10^{\square} = 83{,}15 \cdot 10^{\square} = 8{,}135 \cdot 10^{\square} = 0{,}8135 \cdot 10^{\square}$$

Das Komma „gleitet“ beim Multiplizieren mit Zehnerpotenzen zwischen den Stellen.
Wir sprechen deshalb auch von **Gleitkommadarstellungen** der Zahl 8315.

Der Taschenrechner verwendet die Gleitkommadarstellung $a \cdot 10^k$ mit $1 \leq a < 10$ und $k \in \mathbb{Z}$.
Es ist also genau eine Ziffer links vom Komma. Dieser Ziffer ist $\neq 0$. Zum Beispiel: $149\,597\,870\,700 = 1{,}495... \cdot 10^{11}$

Rechnen mit Gleitkommadarstellungen

Berechne das Ergebnis ohne Taschenrechner. Trage dazu die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

a) $50\,000 \cdot 0{,}03 = 5 \cdot 10^{\square} \cdot 3 \cdot 10^{\square} = 15 \cdot 10^{\square} = \square$

b) $0{,}001^4 = \left(10^{\square}\right)^4 = 10^{\square}$

c) $\dfrac{0{,}014 \cdot 30}{0{,}07} = \dfrac{14 \cdot 10^{\square} \cdot 3 \cdot 10^{\square}}{7 \cdot 10^{\square}} = \square \cdot 10^{\square} = \square$

42^{42}

Berechne mit dem Taschenrechner: $42^{42} = \underbrace{42 \cdot 42 \cdot \ldots \cdot 42}_{42 \text{ Faktoren}} = \square$

Die Zahl ist so groß, dass der Taschenrechner nur ein gerundetes Ergebnis angeben kann.
Wie viele Stellen hat das exakte Ergebnis?

Überschlagsrechnung

Trage ohne Taschenrechner die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

Für die Anzahl an Sekunden pro Jahr gilt: $1\,\text{Jahr} = \underbrace{365}_{\approx 4 \cdot 10^2} \cdot \underbrace{24}_{\approx 2 \cdot 10^1} \cdot \underbrace{60 \cdot 60}_{\approx 4 \cdot 10^3}\,\text{s} \approx 3 \cdot 10^{\square}\,\text{s}$

Die Sonne verliert pro Sekunde durch Energieabstrahlung rund 4 Millionen Tonnen an Masse, also:

$$4 \cdot 10^{\square}\,\frac{\text{t}}{\text{s}} = 4 \cdot 10^{\square}\,\frac{\text{kg}}{\text{s}} \approx 1{,}2 \cdot 10^{\square}\,\frac{\text{kg}}{\text{Jahr}}$$

In den nächsten 5 Milliarden Jahren verliert die Sonne durch Energieabstrahlung also rund

$$6 \cdot 10^{\square}\,\text{kg}$$

an Masse. Ihre derzeitige Masse beträgt übrigens rund $2 \cdot 10^{30}$ kg, also mehr als das 1000-fache dieses Masseverlusts.