

Das Kapital auf einem Sparbuch wächst exponentiell.

Zu Beginn ($n = 0$) befinden sich 150 € auf dem Sparbuch. Pro Jahr wächst das Kapital um 2%.

a) Berechne das Kapital nach 8 Jahren.

$$150 \cdot \underbrace{1,02 \cdot 1,02 \cdot \dots \cdot 1,02}_{8 \text{ Faktoren}} = 150 \cdot 1,02^8 \approx 175,75 \text{ €}.$$

b) Mit b_n wird das Kapital nach n Jahren abgekürzt. Stelle eine Formel für b_n auf.

$$b_n = 150 \cdot 1,02^n \quad (b_n) \text{ ist also eine } \text{geometrische Folge} \text{ mit Quotient } q = 1,02.$$

c) Berechne die Verdopplungszeit.

$$150 \cdot 1,02^n = 300 \quad \Leftrightarrow \quad 1,02^n = 2 \quad \Leftrightarrow \quad n = \frac{\lg(2)}{\lg(1,02)} = 35,0... \text{ Jahre}$$

Wir verwenden folgende Begriffe und Abkürzungen aus der Finanzmathematik:

- Die Multiplikation mit der Zahl $q = 1,02$ vergrößert das Kapital um 2% Zinsen. Die Zahl q nennen wir deshalb auch **Aufzinsungsfaktor**. Den zugehörigen **Zinssatz** 2% kürzen wir mit i ab. „interest“ ist englisch für Zinsen.
- Die Abkürzung **p. a.** („per annum“) bedeutet übersetzt „pro Jahr“. Ist ein Sparbuch mit „2% p. a.“ verzinst, zahlt die Bank also pro Jahr 2% Zinsen.
- Die Kapitalertragssteuer (kurz: **KESt**) beträgt in Österreich 25%. Von den Zinsen zahlt die Bank somit 25% als Steuer an den Staat. Die anderen 75% der Zinsen bleiben der spendenden Person tatsächlich übrig.
- Bewirbt eine Bank ein Sparbuch mit dem Zinssatz „2% p. a.“, wächst das Kapital wegen der KESt nicht um 2% pro Jahr, sondern um $2\% \cdot 0,75 = 1,5\%$. Dieser tatsächliche Zinssatz nach Berücksichtigung aller Abgaben wird auch **effektiver Zinssatz** genannt.

Innerhalb von 8 Jahren wächst das Kapital $K = 3000$ € auf einem Sparbuch mit fixem Zinssatz um insgesamt 334 €. Berechne den jährlichen Zinssatz i vor Abzug der KESt.

Aufzinsungsfaktor q berechnen:

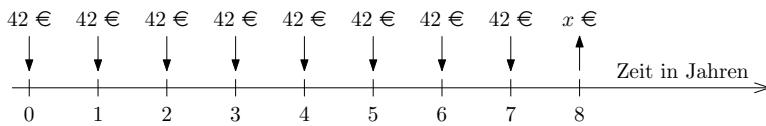
$$3000 \cdot q^8 = 3334 \quad \Rightarrow \quad q = \sqrt[8]{\frac{3334}{3000}} = 1,01328... = 101,328... \%$$

\Rightarrow effektiver Zinssatz pro Jahr: 1,328...%


Zinssatz i vor Abzug der KESt berechnen:

$$i \cdot 0,75 = 1,328... \% \quad \Rightarrow \quad i = \frac{1,328... \%}{0,75} = 1,771... \%$$

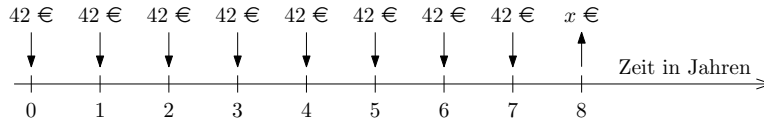
Ein- und Auszahlungen auf ein Konto können wir auf einer **Zeitachse** veranschaulichen, zum Beispiel:



Zum Zeitpunkt 0 zahlst du 42 € ein.
Über die nächsten 7 Jahre zahlst du jährlich weitere 42 € ein.
Nach 8 Jahren lässt du dir x € auszahlen.

Vorschüssige Rente – Endwert 

Du eröffnest einen Sparplan mit effektivem Zinssatz 0,8% p. a. und folgender Zeitachse:



Nach 8 Jahren lässt du dir das vollständige Guthaben x € auszahlen. Das ist der sogenannte **Endwert**.

1) Berechne den Aufzinsungsfaktor $q =$

Um den Endwert zu berechnen, behandeln wir jede Einzahlung wie ein eigenes Sparbuch:

2) Die zum Zeitpunkt 0 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q^8 = b_8$.

Die zum Zeitpunkt 1 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q^7 = b_7$.

Die zum Zeitpunkt 2 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q^6 = b_6$.


⋮ ⋮

Die zum Zeitpunkt 7 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot q = b_1$.

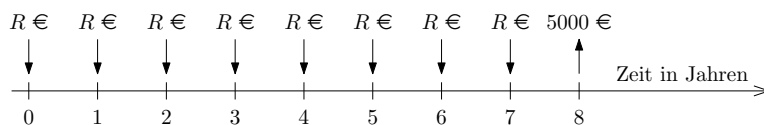
Beachte, dass die 8 Werte $(b_1; b_2; \dots; b_8)$ eine geometrische Folge mit Quotient q bilden.

3) Berechne mithilfe der [Summenformel für geometrische Folgen](#) den Endwert des Sparplans.

$$s_8 = b_1 + b_2 + \dots + b_8 = b_1 \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 348,32... \text{ €}$$

Vorschüssige Rente – Rate 

Du eröffnest einen Sparplan mit effektivem Zinssatz 1,3% p. a. und folgender Zeitachse:



Nach 8 Jahren möchtest du dir den Endwert $E = 5000 \text{ €}$ auszahlen lassen.
Berechne die dafür notwendige jährliche **Rate R**.

Aufzinsungsfaktor: $q = 101,3\% = 1,013$

Gesamtwert zum Zeitpunkt 8:

$$R \cdot q + R \cdot q^2 + \dots + R \cdot q^8 = R \cdot q \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = R \cdot 8,482...$$

Gleichung lösen:

$$R \cdot 8,482... = 5000 \iff R = \frac{5000}{8,482...} = 589,45... \text{ €}$$

Jährlicher Zinssatz – Monatlicher Zinssatz



Zwei (großzügige) Banken bieten dir folgende Konditionen für ein Sparbuch an:

Bank A: effektiver Zinssatz 24 % p. a.

Bank B: effektiver Zinssatz 2 % p. m. (pro Monat)

a) Für welche Bank würdest du dich entscheiden?

Berechne den entsprechenden effektiven jährlichen Zinssatz bei Bank B.

$$1,02^{12} = 1,2682... = 126,82... \% \implies \text{jährlicher Zinssatz bei Bank B: } 26,82... \%$$

Bei Bank B erhält man also mehr Zinsen pro Jahr. („Zinseszinsen“)

b) Welcher effektive monatliche Zinssatz entspricht dem Jahreszinssatz von Bank A?

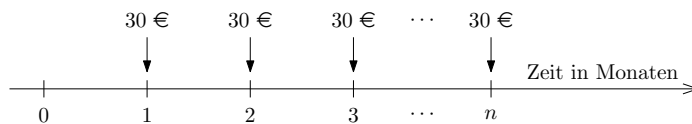
$$q^{12} = 1,24 \implies q = \sqrt[12]{1,24} = 1,01808... = 101,808... \%$$

Monatlicher effektiver Zinssatz 1,808... % \longleftrightarrow Jährlicher effektiver Zinssatz 24 %

Nachschüssige Rente – Laufzeit



Du eröffnest einen Sparplan mit dem Zinssatz 1,4 % p. a. vor Abzug der KEST und folgender Zeitachse:



1) Berechne den effektiven monatlichen Aufzinsungsfaktor q .

2) Nach der wievielten Einzahlung hast du erstmals mehr als 3000 € angespart?

1) Effektiver jährlicher Zinssatz: $1,4 \% \cdot 0,75 = 1,05 \%$

Effektiver jährlicher Aufzinsungsfaktor: $101,05 \% = 1,0105$

Effektiver monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q = \sqrt[12]{1,0105} = 1,000870...$

2) Gesamtwert nach der n -ten Einzahlung:

$$\underbrace{30 + 30 \cdot q + 30 \cdot q^2 + \dots + 30 \cdot q^{n-1}}_{n \text{ Einzahlungen}} = 30 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

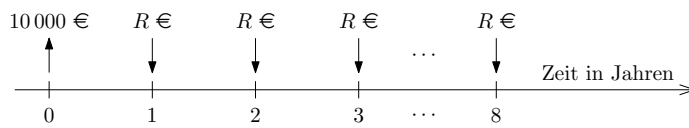
Gleichung lösen:

$$30 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = 3000 \iff \frac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \iff q^n = \underbrace{100 \cdot (q - 1) + 1}_{=1,087...} \iff$$

$$\iff n = \frac{\lg(1,087...)}{\lg(q)} = 95,92... \text{ Monate}$$

Nach der 96. Einzahlung sind erstmals mehr als 3000 € angespart.

Du nimmst einen Kredit über 10 000 € auf, der jährlich effektiv mit 3% verzinst wird.
 Du möchtest jährlich eine fixen Rate $R \text{ €}$ so bezahlen, dass der Kredit nach 8 Jahren abbezahlt ist:



Die jährliche Rate $\frac{10000 \text{ €}}{8} = 1250 \text{ €}$ ist *nicht* ausreichend. Warum?

$R = 1250 \text{ €}$ wäre die richtige Rate ohne Verzinsung.
 Aufgrund der Zinsen ist eine größere Rate notwendig.

Wir erstellen eine Tabellenkalkulation mit einem Zahlungsplan in Abhängigkeit von der Rate R :

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1250
3	1	9050			
4	2	8071.5			
5	3	7063.65			
6	4	6025.55			
7	5	4956.32			
8	6	3855.01			
9	7	2720.66			
10	8	1552.28			

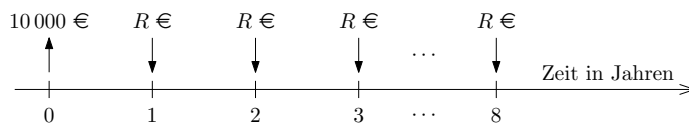
	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1424.56
3	1	8875.44			
4	2	7717.14			
5	3	6524.1			
6	4	5295.26			
7	5	4029.56			
8	6	2725.88			
9	7	1383.1			
10	8	0.03			

Durch Probieren finden wir die passende Rate $R = 1424,56... \text{ €}$.

Aber wie kann man R berechnen?

Äquivalenzprinzip  **MmF**

Ich borge dir $R \text{ €}$ und du borgst mir $R \text{ €}$ mit dem gleichen jährlichen Aufzinsungsfaktor $q = 1,03$.
 Dann sind wir uns *insgesamt* zu keinem Zeitpunkt etwas schuldig. Wir können uns also die Schulden erlassen.
 Mit dem gleichen Prinzip können wir die Rate R in der folgenden Zeitachse berechnen:



Zum Zeitpunkt 1 zahlst du $R \text{ €}$ an die Bank zurück. Deine Schulden werden damit um $R \text{ €}$ reduziert.
 Stattdessen könnte die Bank deine Schulden auch *nicht* reduzieren und dir dafür ein Sparbuch mit $R \text{ €}$ Kapital und gleichem Zinssatz geben. Damit würdet ihr euch gegenseitig ein gleichartiges Sparbuch geben.

Der Kredit ist nach 8 Jahren abbezahlt, wenn zu diesem Zeitpunkt der Gesamtwert deiner 8 Sparbücher gleich groß ist wie der Wert des (nicht reduzierten) Kredits. Dann könnt ihr euch nämlich die Schulden erlassen.

Für den Gesamtwert der 8 Einzahlungen gilt zum Zeitpunkt 8:

$$R + R \cdot q + R \cdot q^2 + \dots + R \cdot q^7 = R \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1}$$

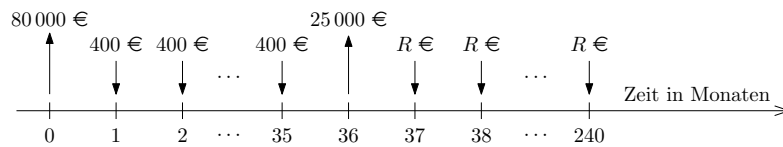
Für den Gesamtwert der einen Auszahlung gilt zum Zeitpunkt 8:

$$10\,000 \cdot q^8 = 12\,667,70... \text{ €}$$

Berechne diese Rate R .

$$R \cdot \frac{q^8 - 1}{q - 1} = 12\,667,70... \iff R = \frac{12\,667,70... \cdot (q - 1)}{q^8 - 1} = 1424,56... \text{ €}$$

Für einen Wohnungskauf nimmst du einen Kredit in Höhe von 80 000 € auf. Der effektive Zinssatz beträgt 3,75 % p. a. und bleibt für die gesamte Laufzeit fix. Für den Kauf eines Autos nimmst du nach 3 Jahren einen weiteren Kredit in Höhe von 25 000 € mit gleichem Zinssatz auf. Der Zahlungsverlauf ist auf der folgenden Zeitachse dargestellt:



- 1) Berechne die eingezeichnete Rate R so, dass der Kredit nach genau 20 Jahren abbezahlt ist.
- 2) Wie viel Euro zahlst du dabei insgesamt an die Bank zurück?

1) Jährlicher Aufzinsungsfaktor: $103,75\% = 1,0375$

Monatlicher Aufzinsungsfaktor: $q = \sqrt[12]{1,0375} = 1,003\,072\dots$

Gesamtwert der beiden Auszahlungen zum Zeitpunkt 240 Monate:

$$80\,000 \cdot q^{240} + 25\,000 \cdot q^{204} = 213\,797,44\dots \text{ €}$$

Gesamtwert der ersten 35 Einzahlungen zum Zeitpunkt 240 Monate:

$$400 \cdot q^{239} + 400 \cdot q^{238} + \dots + 400 \cdot q^{205} = 400 \cdot q^{205} \cdot \frac{q^{35} - 1}{q - 1} = 27\,676,83\dots \text{ €}$$

Gesamtwert der $240 - 36 = 204$ Ratenzahlungen zum Zeitpunkt 240 Monate:

$$R \cdot q^{203} + R \cdot q^{202} + \dots + R \cdot q + R = R \cdot \frac{q^{204} - 1}{q - 1}$$

Gleichung lösen:

$$27\,676,83\dots + R \cdot \frac{q^{204} - 1}{q - 1} = 213\,797,44\dots$$

$$R = 186\,120,60\dots \cdot \frac{q - 1}{q^{204} - 1} \approx 657,46 \text{ €}$$

2) $400 \cdot 35 + R \cdot 204 \approx 148\,121,17 \text{ €}$



Du darfst wählen:

- Entweder du bekommst heute in 5 Jahren garantiert eine Zahlung von $E = 4200 \text{ €}$.
- Oder du bekommst heute einen Betrag B , den du über 5 Jahre mit dem fixen effektiven Zinssatz 2% p. a. veranlagen kannst.

Ab welchem Betrag B solltest du dich jedenfalls für die zweite Option entscheiden?

$$E = B \cdot 1,02^5 \iff B = \frac{E}{1,02^5} = 3804,06... \text{ €}$$

Dem **Endwert** E entspricht der **Barwert** B .

Dem **Aufzinsungsfaktor** q entspricht der **Abzinsungsfaktor** $\frac{1}{q}$.



Bei einer privaten Pensionsvorsorge hast du über Jahrzehnte ein Kapital K angespart, das mit dem fixen effektiven Zinssatz $i = 0,7\%$ p. a. verzinst wird.

Du lässt dir heute und danach jährlich den gleichen Betrag $U = 600 \text{ €}$ auszahlen.

Wenn vor jeder Auszahlung der gleiche Betrag K am Konto ist, spricht man von einer **ewigen Rente**.

- 1) Wie groß muss K sein, damit du tatsächlich die ewige jährliche Rente $U = 600 \text{ €}$ erhältst?
- 2) Du zahlst über 40 Jahre insgesamt $40 \cdot 12 = 480$ Mal die monatliche Rate R ein.
Wie groß muss R sein, damit du mit Einzahlung der 480. Rate dieses Kapital K angespart hast?

- 1) **Jährlicher Aufzinsungsfaktor:** $q = 100,7\% = 1,007$

Kontostand unmittelbar vor der zweiten Auszahlung: $(K - U) \cdot q$

Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} (K - U) \cdot q = K &\iff K \cdot q - U \cdot q = K \iff \\ &\iff K \cdot q - K = U \iff K = \frac{U}{q - 1} = 85\,714,28... \text{ €} \end{aligned}$$

- 2) **Monatlicher Aufzinsungsfaktor:** $q_M = \sqrt[12]{q} = 1,000\,581...$

Gesamtwert der Einzahlungen nach Einzahlung der 480. Rate:

$$R \cdot q_M^{479} + R \cdot q_M^{478} + \dots + R \cdot q_M + R = R \cdot \frac{q_M^{480} - 1}{q_M - 1} = R \cdot 553,49...$$

Gleichung lösen:

$$R \cdot 553,49... = K \iff R = \frac{K}{553,49...} = 154,86... \text{ €}$$

