Sparbuch

Das Kapital auf einem Sparbuch wächst exponentiell.
Zu Beginn ($n = 0$) befinden sich 150 € auf dem Sparbuch. Pro Jahr wächst das Kapital um 2 %.

a) Berechne das Kapital nach 8 Jahren.

b) Mit b_n wird das Kapital nach n Jahren abgekürzt. Stelle eine Formel für b_n auf.

$b_n = \boxed{}$

(b_n) ist also eine geometrische Folge mit Quotient $q = 1{,}02$.

c) Berechne die Verdopplungszeit.

Finanzmathematik

Wir verwenden folgende Begriffe und Abkürzungen aus der Finanzmathematik:

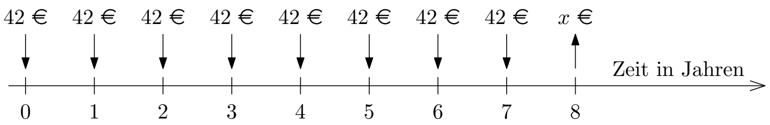
- Die Multiplikation mit der Zahl $q = 1{,}02$ vergrößert das Kapital um 2 % Zinsen.
  Die Zahl $\boldsymbol{q}$ nennen wir deshalb auch **Aufzinsungsfaktor**.
  Den zugehörigen **Zinssatz** 2 % kürzen wir mit $\boldsymbol{i}$ ab.
  „**i**nterest“ ist englisch für Zinsen.
- Die Abkürzung **p. a.** („per annum“) bedeutet übersetzt „pro Jahr“.
  Ist ein Sparbuch mit „2 % p. a.“ verzinst, zahlt die Bank also pro Jahr 2 % Zinsen.
- Die Kapitalertragssteuer (kurz: **KESt**) beträgt in Österreich 25 %.
  Von den Zinsen zahlt die Bank somit 25 % als Steuer an den Staat.
  Die anderen 75 % der Zinsen bleiben der sparenden Person tatsächlich übrig.
- Bewirbt eine Bank ein Sparbuch mit dem Zinssatz „2 % p. a.“, wächst das Kapital wegen der KESt nicht um 2 % pro Jahr, sondern um $2\,\% \cdot 0{,}75 = 1{,}5\,\%$. Dieser tatsächliche Zinssatz nach Berücksichtigung aller Abgaben wird auch **effektiver Zinssatz** genannt.

Zinssatz

Innerhalb von 8 Jahren wächst das Kapital $K = 3000$ € auf einem Sparbuch mit fixem Zinssatz um insgesamt 334 €. Berechne den jährlichen Zinssatz i vor Abzug der KESt.

Zeitachse

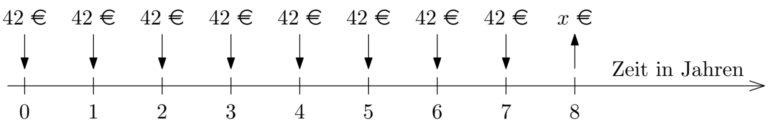
Ein- und Auszahlungen auf ein Konto können wir auf einer **Zeitachse** veranschaulichen, zum Beispiel:



Zum Zeitpunkt 0 zahlst du 42 € ein.
Über die nächsten 7 Jahre zahlst du jährlich weitere 42 € ein.
Nach 8 Jahren lässt du dir x € auszahlen.

Vorschüssige Rente – Endwert

Du eröffnest einen Sparplan mit effektivem Zinssatz 0,8 % p. a. und folgender Zeitachse:



Nach 8 Jahren lässt du dir das vollständige Guthaben x € auszahlen. Das ist der sogenannte **Endwert**.

1) Berechne den Aufzinsungsfaktor $q = \boxed{}$

Um den Endwert zu berechnen, behandeln wir jede Einzahlung wie ein eigenes Sparbuch:

2) Die zum Zeitpunkt 0 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot \boxed{} = b_8$.

Die zum Zeitpunkt 1 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot \boxed{} = b_7$.

Die zum Zeitpunkt 2 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot \boxed{} = b_6$.

$\vdots$ $\vdots$

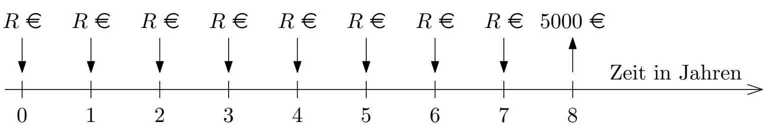
Die zum Zeitpunkt 7 eingezahlten 42 € haben zum Zeitpunkt 8 den Wert $42 \cdot \boxed{} = b_1$.

Beachte, dass die 8 Werte $(b_1; b_2; \ldots; b_8)$ eine geometrische Folge mit Quotient q bilden.

3) Berechne mithilfe der Summenformel für geometrische Folgen den Endwert des Sparplans.

Vorschüssige Rente – Rate

Du eröffnest einen Sparplan mit effektivem Zinssatz 1,3 % p. a. und folgender Zeitachse:



Nach 8 Jahren möchtest du dir den Endwert $E = 5000$ € auszahlen lassen.
Berechne die dafür notwendige jährliche **Rate** $\boldsymbol{R}$.

Jährlicher Zinssatz – Monatlicher Zinssatz

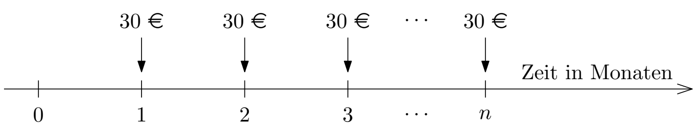
Zwei (großzügige) Banken bieten dir folgende Konditionen für ein Sparbuch an:
Bank A: effektiver Zinssatz 24 % p. a.
Bank B: effektiver Zinssatz 2 % p. m. (pro Monat)

a) Für welche Bank würdest du dich entscheiden?
Berechne den entsprechenden effektiven jährlichen Zinssatz bei Bank B.

b) Welcher effektive monatliche Zinssatz entspricht dem Jahreszinssatz von Bank A?

Nachschüssige Rente – Laufzeit

Du eröffnest einen Sparplan mit dem Zinssatz 1,4 % p. a. vor Abzug der KESt und folgender Zeitachse:

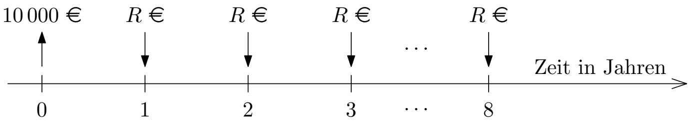


1) Berechne den effektiven monatlichen Aufzinsungsfaktor q.

2) Nach der wievielten Einzahlung hast du erstmals mehr als 3000 € angespart?

Zahlungsplan

Du nimmst einen Kredit über 10 000 € auf, der jährlich effektiv mit 3 % verzinst wird.
Du möchtest jährlich eine fixen Rate R € so bezahlen, dass der Kredit nach 8 Jahren abbezahlt ist:



Die jährliche Rate $\frac{10\,000\text{ €}}{8} = 1250$ € ist *nicht* ausreichend. Warum?

Wir erstellen eine Tabellenkalkulation mit einem Zahlungsplan in Abhängigkeit von der Rate R:

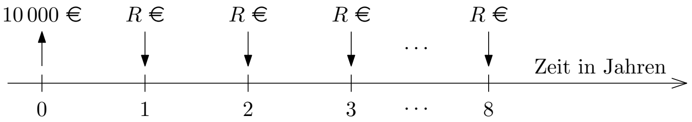
	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1250
3	1	9050			
4	2	8071.5			
5	3	7063.65			
6	4	6025.55			
7	5	4956.32			
8	6	3855.01			
9	7	2720.66			
10	8	1552.28			

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Schulden		Aufzinsungsfaktor	1.03
2	0	10000		Rate	1424.56
3	1	8875.44			
4	2	7717.14			
5	3	6524.1			
6	4	5295.26			
7	5	4029.56			
8	6	2725.88			
9	7	1383.1			
10	8	0.03			

Durch Probieren finden wir die passende Rate $R = 1424{,}56\ldots$ €. Aber wie kann man R berechnen?

Äquivalenzprinzip

Ich borge dir R € und du borgst mir R € mit dem gleichen jährlichen Aufzinsungsfaktor $q = 1{,}03$.
Dann sind wir uns *insgesamt* zu keinem Zeitpunkt etwas schuldig. Wir können uns also die Schulden erlassen.
Mit dem gleichen Prinzip können wir die Rate R in der folgenden Zeitachse berechnen:



Zum Zeitpunkt 1 zahlst du R € an die Bank zurück. Deine Schulden werden damit um R € reduziert. Stattdessen könnte die Bank deine Schulden auch *nicht* reduzieren und dir dafür ein Sparbuch mit R € Kapital und gleichem Zinssatz geben. Damit würdet ihr euch gegenseitig ein gleichartiges Sparbuch geben.

Der Kredit ist nach 8 Jahren abbezahlt, wenn zu diesem Zeitpunkt der Gesamtwert deiner 8 Sparbücher gleich groß ist wie der Wert des (nicht reduzierten) Kredits. Dann könnt ihr euch nämlich die Schulden erlassen.

Für den Gesamtwert der 8 Einzahlungen gilt zum Zeitpunkt 8:

$$R + R \cdot q + R \cdot q^2 + \cdots + R \cdot q^7 = \boxed{}$$

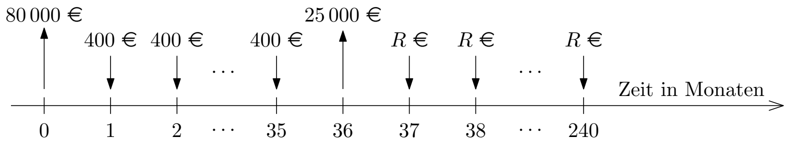
Für den Gesamtwert der einen Auszahlung gilt zum Zeitpunkt 8:

$$10\,000 \cdot q^8 = \boxed{}$$

Berechne diese Rate R.

Ratenanpassung

Für einen Wohnungskauf nimmst du einen Kredit in Höhe von 80 000 € auf.
Der effektive Zinssatz beträgt 3,75 % p. a. und bleibt für die gesamte Laufzeit fix.
Für den Kauf eines Autos nimmst du nach 3 Jahren einen weiteren Kredit in Höhe von 25 000 € mit gleichem Zinssatz auf. Der Zahlungsverlauf ist auf der folgenden Zeitachse dargestellt:



1) Berechne die eingezeichnete Rate R so, dass der Kredit nach genau 20 Jahren abbezahlt ist.

2) Wie viel Euro zahlst du dabei insgesamt an die Bank zurück?

Barwert

Du darfst wählen:

- Entweder du bekommst heute in 5 Jahren garantiert eine Zahlung von $E = 4200$ €.
- Oder du bekommst heute einen Betrag B, den du über 5 Jahre mit dem fixen effektiven Zinssatz 2 % p. a. veranlagen kannst.

Ab welchem Betrag B solltest du dich jedenfalls für die zweite Option entscheiden?

Dem **Endwert E** entspricht der **Barwert B**.
Dem **Aufzinsungsfaktor q** entspricht der **Abzinsungsfaktor $\frac{1}{q}$**.

Ewige Rente

Bei einer privaten Pensionsvorsorge hast du über Jahrzehnte ein Kapital K angespart, das mit dem fixen effektiven Zinssatz $i = 0{,}7\,\%$ p. a. verzinst wird.

Du lässt dir heute und danach jährlich den gleichen Betrag $U = 600$ € auszahlen.
Wenn vor jeder Auszahlung der gleiche Betrag K am Konto ist, spricht man von einer **ewigen Rente**.

1) Wie groß muss K sein, damit du tatsächlich die ewige jährliche Rente $U = 600$ € erhältst?

2) Du zahlst über 40 Jahre insgesamt $40 \cdot 12 = 480$ Mal die monatliche Rate R ein.
Wie groß muss R sein, damit du mit Einzahlung der 480. Rate dieses Kapital K angespart hast?