

AUFGABENSAMMLUNG – CALCULUS

INHALTSVERZEICHNIS

1. Differentialrechnung	3
2. Optimierungsaufgaben	17
3. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	23
4. Integralrechnung	26



Die folgenden Sätze sind zentral für die gesamte Analysis. Die Ergebnisse sind anschaulich klar. Wir sind auch sicher, dass du schon oft mit diesen Sätzen gearbeitet hast, vielleicht ohne sie beim Namen zu kennen. Es ist uns wichtig, dass du diese Sätze tief verinnerlichst und sauber damit argumentierst.

Zwischenwertsatz

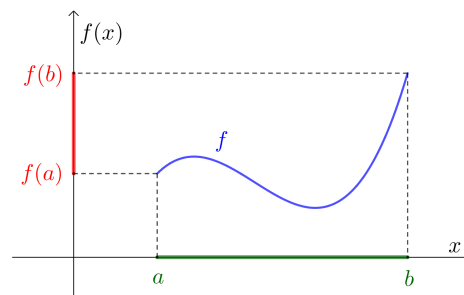


MMF

Zwischenwertsatz:

Sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann nimmt f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an.



Satz vom Minimum und Maximum



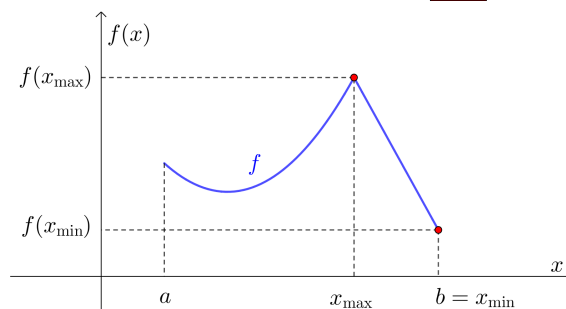
MMF

Satz vom Minimum und Maximum:

Sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Dann gibt es eine Stelle $x_{\min}$ und eine Stelle $x_{\max}$ in $[a; b]$ so, dass für alle x in $[a; b]$ gilt:

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$



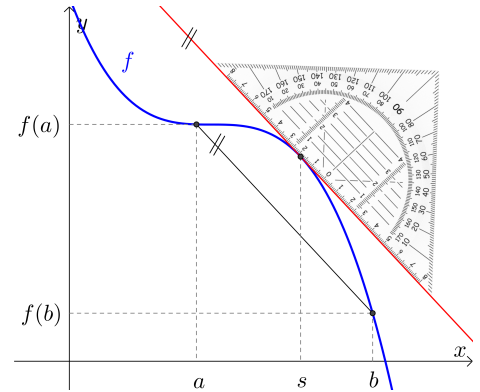
Mittelwertsatz der Differentialrechnung

**Mittelwertsatz der Differentialrechnung:**

Sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion,
die auf $]a; b[$ differenzierbar ist.

Dann gibt es eine Stelle s in $]a; b[$ so, dass gilt:

$$f'(s) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



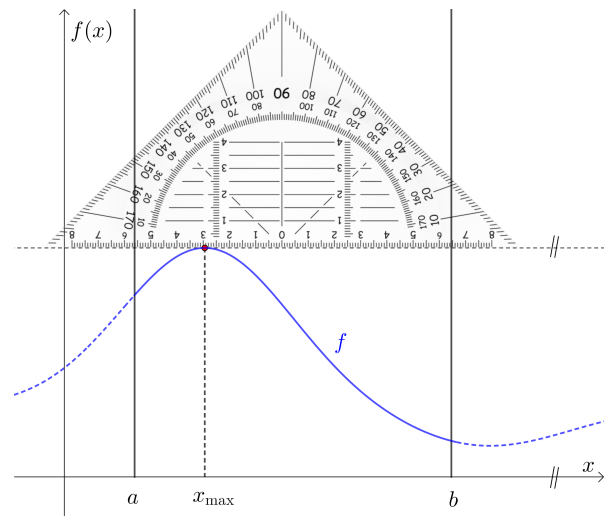
1. Ableitungstest

**1. Ableitungstest (first derivative test):**

Sei $f :]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion
und x_0 in $]a; b[$.

Wenn x_0 eine Extremstelle ist, dann gilt:

$$f'(x_0) = 0$$



Zum Lösen von Optimierungsaufgaben verwendet man den 1. Ableitungstest:

Der 1. Ableitungstest identifiziert alle Kandidaten für Extremstellen im Inneren von $[a; b]$.

Bei Funktionen $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ müssen wir die Randwerte $f(a)$ und $f(b)$ zusätzlich berechnen.

1. DIFFERENTIALRECHNUNG

1.1



Für die Ableitungsfunktion f' der Funktion f gilt:

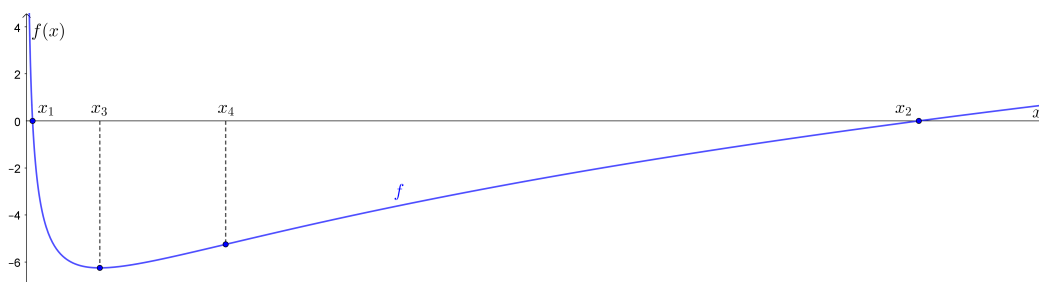
$$f'(x) = e^x \cdot (3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4)$$

- Zerlege das Polynom $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4$ in Linearfaktoren.
- Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- Ermittle das Krümmungsverhalten von f .

1.2



Der Graph der Funktion f mit $f(x) = [\ln(x)]^2 + \ln(x) - 6$ ist unten dargestellt.



- Berechne die Nullstellen x_1 und x_2 . Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_1 = \boxed{} \quad x_2 = \boxed{}$$

- Berechne die Extremstelle x_3 . Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_3 = \boxed{}$$

- Berechne die Wendestelle x_4 . Runde auf 3 Nachkommastellen.

$$x_4 = \boxed{}$$

1.3



Für die Funktion f gilt: $f(x) = a \cdot e^{2 \cdot x} - b \cdot e^x + c$

- Ermittle die Ableitungsfunktionen f' und f'' .

Die Koeffizienten a und b haben das gleiche Vorzeichen.

- Stelle mithilfe von a und b eine Formel für die Nullstelle x_1 von f' auf.
- Stelle mithilfe von a und b eine Formel für die Nullstelle x_2 von f'' auf.
- Begründe, warum die Differenz $x_1 - x_2$ von *keinem* der Koeffizienten a , b bzw. c abhängt.

1.4

Für die Funktion f gilt: $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

- a) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $f'(x) = \tan^2(x) + 1$ gilt.
- b) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $f''(x) = 2 \cdot \tan^3(x) + 2 \cdot \tan(x)$ gilt.
- c) Ermittle reelle Zahlen a , b und c so, dass $f'''(x) = a \cdot \tan^4(x) + b \cdot \tan^2(x) + c$ gilt.
- d) ★ Für die 42. Ableitung von f gilt:

$$f^{(42)}(x) = k_{43} \cdot \tan^{43}(x) + k_{41} \cdot \tan^{41}(x) + k_{39} \cdot \tan^{39}(x) + \cdots + k_1 \cdot \tan^1(x) \quad \text{mit } k_i \in \mathbb{R}$$

Ermittle den Koeffizienten k_{43} .

1.5

Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = (k \cdot x + d) \cdot e^{-x^2} \quad \text{mit } k \neq 0$$

- a) Ermittle die Ableitungsfunktion f' .
- b) Begründe, warum f' jedenfalls zwei verschiedene reelle Nullstellen hat.
- c) Ermittle das Monotonieverhalten von f , wenn $k = 4$ und $d = -2$ gilt.

1.6

Das Krümmungsverhalten der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^4 - k \cdot x^3 + 42 \cdot x - 23$$

hängt vom Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}$ ab.

Ermittle das Krümmungsverhalten von f in Abhängigkeit von k .

Hinweis: Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

1.7

Für die Funktion f gilt: $f(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$ mit $r > 0$ und $-r < x < r$

- a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f' .

Für die Krümmung κ einer zweimal differenzierbaren Funktion f an der Stelle x gilt allgemein:

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

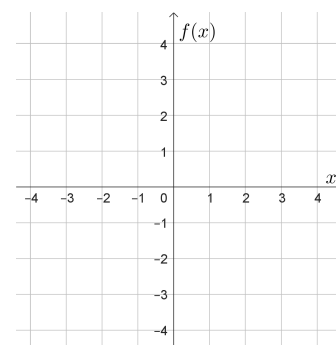
- b) Zeige, dass für diese Funktion f gilt:

$$[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}} = \frac{r^3}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- c) ★ Zeige, dass für diese Funktion f gilt:

$$f''(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

- d) Zeige, dass die Krümmung $\kappa(x)$ für diese Funktion f *nicht* von x abhängt.
- e) Skizziere rechts oben den Funktionsgraphen von f , wenn $r = 2$ gilt.



1.8

MmF

Die Funktion g mit

$$g(x) = \ln(-x^2 + 3 \cdot x + 10)$$

ist *nicht* für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

- Ermittle die größtmögliche Definitionsmenge von g .
- Ermittle das Monotonieverhalten von g .
- Ermittle das Krümmungsverhalten von g .

1.9

MmF

Gegeben sind die differenzierbaren Funktionen p und f mit:

$$p(x) = f(x) \cdot e^{f(x)}$$

- Zeige, dass $p'(x) = f'(x) \cdot e^{f(x)} \cdot (1 + f(x))$ gilt.
Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.
- Ermittle das Monotonieverhalten der Funktion p mit:

$$p(x) = (x^2 - 2 \cdot x - 9) \cdot e^{x^2 - 2 \cdot x - 9}$$

1.10

MmF

Das Monotonieverhalten der Funktion f mit

$$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot k \cdot x^2 + 42$$

hängt vom Wert des Parameters $k \in \mathbb{R}$ ab.

Ermittle das Monotonieverhalten von f in Abhängigkeit von k .

Hinweis: Es gibt 3 Fälle zu unterscheiden.

1.11

MmF

Sei $k \in \mathbb{R}$ ein Parameter und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot k \cdot x.$$

- Angenommen, $k < 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- Angenommen, $k \geq 0$. Ermittle das Monotonieverhalten von f .
- ★ Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^3 = 3 \cdot k \cdot x + 16$$

jeweils genau **a)** eine Lösung **b)** zwei Lösungen **c)** drei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$?

1.12

MmF

Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten der Funktion f . Skizziere den Graphen der Funktion.

- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (1 - x^2)^2$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$
- $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 3}$

1.13



Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten der Funktion f .

Skizziere den Graphen der Funktion für spezielle Werte der Parameter.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^2 + 3 \cdot b^2}$ mit $a, b > 0$

b) $f: \mathbb{R} \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x-b}$ mit $a > b$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + a^2}$ mit $a > 0$

1.14



Ermittle die Null- und Extremstellen der Polynomfunktion f .

a) $f(x) = x^4 - 8 \cdot x^2 + 7$

c) $f(x) = x^4 + 2 \cdot x^2 + 2$

b) $f(x) = -x^4 + 6 \cdot x^2 + 27$

d) $f(x) = x^6 - 26 \cdot x^3 - 27$

1.15



Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion f .

Skizziere den Graphen der Funktion.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x^2 + 1) \cdot e^{-x}$

c) $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \ln(x)$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot e^{-x^2/2}$ 

d) $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x \cdot \ln x$

1.16



Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten der Funktion.

Skizziere den Graphen der Funktion.

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2/2}$

c) $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 \cdot \ln^2(x)$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^4 \cdot e^{-x}$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 - 2 \cdot x + 2}{x^2 + 2 \cdot x + 2}$

1.17



Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten der Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{a \cdot x} - e^{b \cdot x} \quad \text{mit } a > b > 0$$

Skizziere den Graphen der Funktion für spezielle Werte der Parameter.

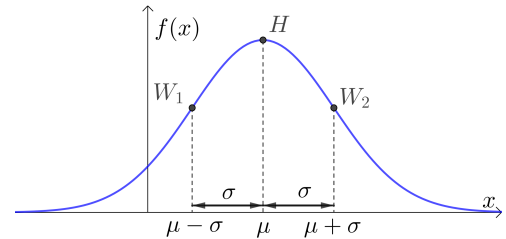
1.18

MmF

Seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > 0$. Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

spielt als Dichtefunktion der Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ in der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr wichtige Rolle.



- Zeige ohne Differentialrechnung, dass f an der Stelle μ ein globales Maximum hat.
- Zeige, dass die Wendestellen von f bei $\mu \pm \sigma$ liegen.
- Zeige, dass die beiden Wendetangenten ihre Nullstelle bei $\mu + 2 \cdot \sigma$ bzw. $\mu - 2 \cdot \sigma$ haben.

1.19

MmF

Gegeben ist die Funktion $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x$.

- Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten der Funktion f . Skizziere den Graphen von f .
Hinweis: $\ominus = e^{\ln(\ominus)}$
- Für welche Zahlen $y \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $f(x) = y$ keine / genau eine / mehr als eine Lösung über der Grundmenge der positiven reellen Zahlen?
- Löse die Gleichung $x^x + 108 \cdot x^{-x} = 31$ über der Grundmenge der positiven reellen Zahlen.

1.20

MmF

Berechne den Funktionswert von f an den Stellen $x_0 \pm 0,1$ und $x_0 \pm 0,01$ näherungsweise durch lineare Approximation an der Stelle x_0 . Vergleiche deine Ergebnisse anschließend mit dem jeweils exakten Funktionswert (TR) an diesen Stellen.

- | | |
|-------------------------------|------------------------------|
| a) $f(x) = x^2, x_0 = 2$ | c) $f(x) = \ln(x), x_0 = 1$ |
| b) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 4$ | d) $f(x) = \sin(x), x_0 = 0$ |

1.21

MmF

Berechne die Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 von Hand ohne Ableitungsregeln.

- | | | |
|--|--------------------------------------|--|
| a) $f(x) = x^4, x_0 = -1$ | c) $f(x) = \sqrt[3]{x}, x_0 = 8$ | Hinweis: $a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + a \cdot b + b^2)$ |
| b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x_0 = 2$ | d) $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, x_0 = 3$ | Hinweis: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$ |

1.22



Ermittle jeweils folgenden Grenzwert: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2 \cdot h}$

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2, x_0 = 1$

c) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x^2 + 16}, x_0 = 3$

b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, x_0 = 1$

d) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos(x), x_0 = 0$

Du vermutest vielleicht schon einen Zusammenhang mit deinem Ergebnis und der Ableitung $f'(x_0)$.

Wie lautet der Zusammenhang?

★ Begründe allgemein, warum dieser Zusammenhang mit der Ableitung gilt.

1.23



Gegeben ist die zweimal differenzierbare Funktion f .

Berechne die erste Ableitung und die zweite Ableitung der aus f gebildeten Funktion g .

a) $g(x) = e^{f(x)}$

c) $g(x) = 1/f(x), \quad \text{falls } f(x) \neq 0$

b) $g(x) = [f(x)]^2$

d) $g(x) = \ln(f(x)), \quad \text{falls } f(x) > 0$

1.24



Gegeben ist die Polynomfunktion p . Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = p(x) \cdot e^x$$

Zeige, dass es eine Polynomfunktion q gibt, für die gilt:

$$f'(x) = q(x) \cdot e^x$$

Was ist der Zusammenhang zwischen den Polynomen p und q ?

1.25



Gegeben ist die Polynomfunktion p . Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = p(x) \cdot e^{-x^2}$$

Zeige, dass es eine Polynomfunktion q gibt, für das gilt:

$$f'(x) = q(x) \cdot e^{-x^2}$$

Was ist der Zusammenhang zwischen den Polynomen p und q ?

1.26



Berechne den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x-h) - 2 \cdot f(x) + f(x+h)}{h^2}$$

für die Funktion f mit a) $f(x) = x$. b) $f(x) = x^2$. c) $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

1.27

MmF

Zeige, dass die gegebene Funktion $f : [0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ihren größten Wert an der Stelle 1 annimmt.

a) $f(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}$ b) $f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{(1+x^3)^2}$ c) $f(x) = \frac{(1+x^p)^q}{(1+x^q)^p}$ mit $1 \leq p \leq q$

1.28

MmF

Aus dem Binomischen Lehrsatz folgt die Identität

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^k$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$. Erkläre damit, dass gilt:

$$n \cdot x \cdot (1+x)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot x^k \quad (*)$$

Sei $p \in]0; 1[$. Zeige durch geschickte Wahl von x , dass

$$n \cdot p = \sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Zeige auch, dass

Hinweis: Leite (*) nach x ab und wähle x geschickt.

$$n \cdot p \cdot (1-p) = \sum_{k=0}^n (k - n \cdot p)^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

Was haben die letzten beiden Summen mit der Binomialverteilung zu tun?

1.29

MmF

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 4 \cdot \sin(x)$.

Ermittle die Nullstellen von f .

1.30

MmF

Skizziere den Graphen der gegebenen Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

a) $f(x) = \cos^2(x)$ b) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x) - \sin(x)$

Achte darauf, dass deine Skizze die Schnittpunkte des Graphen mit den Achsen, die Periodizität sowie das Monotonie- und das Krümmungsverhalten der Funktion richtig wiedergibt.

1.31

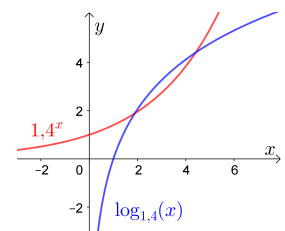
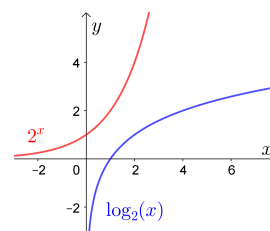
MmF

Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Die Graphen der beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x \quad \text{und} \quad g :]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a(x)$$

sind jeweils für $a = 2$ und für $a = 1,4$ dargestellt.

Zeige, dass es genau einen Wert von a gibt, für den die beiden Graphen genau einen Schnittpunkt haben. In welchem Punkt schneiden sich dann die Graphen?



1.32

MmF

Ziel dieser Aufgabe ist es, die Funktion

$$f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \cdot \ln(1+x) - x \cdot \ln(x)$$

auf Monotonie zu untersuchen.

- Ermittle die ersten beiden Ableitungen von f .
- Zeige, dass $f''(x) < 0$ für alle $x \in]0; \infty[$ gilt.
- Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ gilt.
- Zeige mithilfe von **b)** und **c)**, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0; \infty[$ gilt.
- Verwende das Ergebnis aus dem vorigen Teil der Aufgabe, um zu zeigen, dass die Folge (a_n) mit

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

streng monoton wachsend ist.

- Passe die obige Methode an, um zu zeigen, dass die Folge (b_n) mit

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

streng monoton fallend ist.

1.33

MmF

Der Punkt $(-2 \mid 4)$ liegt auf der Parabel $y = x^2$. In wie vielen Punkten schneidet die Gerade durch den Punkt $(-2 \mid 4)$ mit Steigung k die Parabel? Interpretiere dein Ergebnis auch geometrisch.

1.34

MmF

Ziel dieser Aufgabe ist zu beweisen, dass die Gleichung

$$e^x = x$$

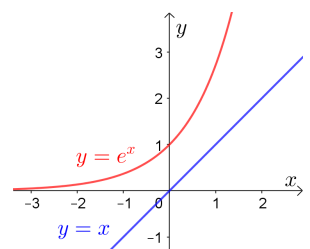
über der Grundmenge $\mathbb{R}$ keine Lösungen hat. Wir skizzieren zwei Zugänge:

- Ermittle eine Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x$$

an der Stelle 0. Argumentiere mithilfe der zweiten Ableitung, dass der Graph der Funktion f über dieser Tangente liegt.

- Wie verhält sich die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^x - x$, wenn $x \rightarrow \infty$ und wenn $x \rightarrow -\infty$? Erkläre, warum die Funktion g einen kleinsten Wert annimmt. An welcher Stelle geschieht das? Was ist der kleinste Wert?



1.35

MmF

Ermittle, für welche Werte von $k \in \mathbb{R}^+$ die Gleichung

$$e^x = k \cdot x$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ **a)** keine Lösung **b)** genau eine Lösung **c)** mehrere Lösungen hat.

1.36**MmF**

Zeige, dass die Gleichung

$$\sin(x) = x$$

über der Grundmenge $\mathbb{R}$ genau eine Lösung hat.

Hinweis: Was ist die Tangente von $f(x) = \sin(x)$ an der Stelle 0?

1.37**MmF**

Eine Polynomfunktion f mit Grad 3 hat die folgenden Eigenschaften:

- Der Graph von f enthält den Punkt $(0 \mid 18)$.
- Die Funktion hat die Nullstelle $x = 3$.
- An der Stelle $x = 2$ ändert f das Monotonieverhalten.
- An der Stelle $x = -1$ ändert f das Krümmungsverhalten.

- a) Stelle ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f auf.
b) Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

1.38**MmF**

Der Graph der Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

verläuft durch den Punkt $(2 \mid 3)$ und hat im Punkt $(1 \mid 5)$ ein lokales Maximum.

Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

1.39**MmF**

Gesucht ist eine Polynomfunktion f dritten Grades. Der Punkt $(-1 \mid 1)$ liegt auf dem Graphen. Die Tangente an den Graphen in diesem Punkt ist horizontal. Die Gleichung der Tangente des Graphen in jenem Punkt, wo der Graph die vertikale Achse schneidet, lautet $y + 6 \cdot x + 3 = 0$.

Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

1.40**MmF**

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion p mit

$$p(x) = 2 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + a$$

genau **a)** eine **b)** zwei **c)** drei reelle Nullstelle(n) hat?

1.41**MmF**

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Polynomfunktion p mit

$$p(x) = 3 \cdot x^4 - 8 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 + 24 \cdot x + a$$

genau **a)** eine **b)** zwei **c)** drei **d)** vier **e)** keine reelle Nullstelle(n) hat?

1.1 a) $3 \cdot x^2 + 4 \cdot x - 4 = 3 \cdot (x + 2) \cdot (x - \frac{2}{3})$

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < \frac{2}{3}$	$x = \frac{2}{3}$	$x > \frac{2}{3}$
b) $f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

	$x < -\frac{10}{3}$	$x = -\frac{10}{3}$	$-\frac{10}{3} < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
c) $f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	Wendepunkt	$\cap$	Wendepunkt	$\cup$

1.2 a) $x_1 = e^{-3} \approx 0,050$, $x_2 = e^2 \approx 7,389$ b) $x_3 = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,607$ c) $x_4 = e^{\frac{1}{2}} \approx 1,649$

1.3 a) $f'(x) = 2 \cdot a \cdot e^{2 \cdot x} - b \cdot e^x$, $f''(x) = 4 \cdot a \cdot e^{2 \cdot x} - b \cdot e^x$ b) $x_1 = \ln\left(\frac{b}{2 \cdot a}\right)$ c) $x_2 = \ln\left(\frac{b}{4 \cdot a}\right)$ d) $x_1 - x_2 = \ln(2) = 0,693 \dots$

1.4 a) Quotientenregel b) Kettenregel und a) c) $a = 6$, $b = 8$, $c = 2$ d) $k_{43} = 42!$

1.5 a) $f'(x) = (-2 \cdot k \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot x + k) \cdot e^{-x^2}$

b) Aus dem Produkt-Null-Satz und $e^{-x^2} > 0$ folgt:

$$f'(x) = 0 \iff -2 \cdot k \cdot x^2 - 2 \cdot d \cdot x + k = 0$$

Wir lösen die quadratische Gleichung mit der großen Lösungsformel

($a = -2 \cdot k$, $b = -2 \cdot d$, $c = k$):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a} = \frac{2 \cdot d \pm \sqrt{4 \cdot d^2 + 8 \cdot k^2}}{-4 \cdot k}$$

Die Diskriminante $4 \cdot d^2 + 8 \cdot k^2$ ist positiv, weil $4 \cdot d^2 \geq 0$ und $8 \cdot k^2 > 0$ gilt. Also hat f' zwei verschiedene reelle Nullstellen.

	$x < -\frac{1}{2}$	$x = -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < 1$	$x = 1$	$x > 1$
c) $f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$

1.6 • Fall 1: $k = 0$

In diesem Fall wechselt $f''(x) = 6 \cdot x \cdot x$ an keiner Stelle das Vorzeichen.

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\cup$	kein Wendepunkt	$\cup$

• Fall 2: $k > 0$

In diesem Fall wechselt $f''(x) = 6 \cdot x \cdot (x - k)$ an den Stellen 0 und k das Vorzeichen.

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < k$	$x = k$	$x > k$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	Wendepunkt	$\cap$	Wendepunkt	$\cup$

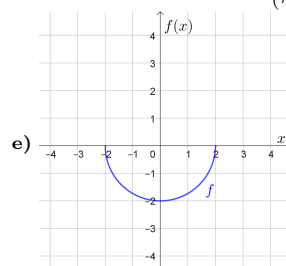
• Fall 3: $k < 0$

In diesem Fall wechselt $f''(x) = 6 \cdot (x - k) \cdot x$ an den Stellen k und 0 das Vorzeichen.

	$x < k$	$x = k$	$k < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\cup$	Wendepunkt	$\cap$	Wendepunkt	$\cup$

1.7 a) $f'(x) = \frac{x}{(r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ b) $[1 + f'(x)^2]^{\frac{3}{2}} = [1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}]^{\frac{3}{2}} = [\frac{r^2 - x^2}{r^2 - x^2} + \frac{x^2}{r^2 - x^2}]^{\frac{3}{2}} = [\frac{r^2}{r^2 - x^2}]^{\frac{3}{2}} = \frac{r^3}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \checkmark$

c) $f''(x) = \dots = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$ d) $\kappa(x) = \frac{r^2}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}{r^3} = \frac{1}{r}$



1.8 a) $] -2; 5[$

	$-2 < x < \frac{3}{2}$	$x = \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} < x < 5$
b) $g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$\ln\left(\frac{49}{4}\right)$	$\searrow$

c) g ist für alle $x \in]-2; 5[$ negativ gekrümmt.

1.9 a) Produktregel und Kettenregel

	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 4$	$x = 4$	$x > 4$
$2 \cdot x - 2$	-	-	-	0	+	+	+
b) $e^{x^2-2 \cdot x-9}$	+	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 2 \cdot x - 8$	+	0	-	-	-	0	+
$p'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$p(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$	$-\frac{10}{e^{10}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{e}$	$\nearrow$

1.10 $k = 0$:

	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Sattelpunkt	$\nearrow$

$k > 0$:

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < k$	$x = k$	$x > k$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

$k < 0$:

	$x < k$	$x = k$	$k < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	Hochpunkt	$\searrow$	Tiefpunkt	$\nearrow$

1.11 a) f ist auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend.

	$x < -\sqrt{k}$	$x = -\sqrt{k}$	$-\sqrt{k} < x < \sqrt{k}$	$x = \sqrt{k}$	$x > \sqrt{k}$
b) $f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$2 \cdot k^{\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$-2 \cdot k^{\frac{3}{2}}$	$\nearrow$

c) Wenn $k < 0$ ist, dann hat die Gleichung genau eine Lösung.

Wenn $k \geq 0$ ist, dann hängt die Anzahl der Lösungen vom Hochpunkt $(-\sqrt{k} \mid 2 \cdot k^{\frac{3}{2}})$ ab:

- $2 \cdot k^{\frac{3}{2}} < 16 \iff 0 \leq k < 4 \iff$ genau eine Lösung
- $2 \cdot k^{\frac{3}{2}} = 16 \iff k = 4 \iff$ genau zwei Lösungen
- $2 \cdot k^{\frac{3}{2}} > 16 \iff k > 4 \iff$ genau drei Lösungen

1.12 a) Nullstellen: $\{-1, 1\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; -1[\searrow$ $]-1; 0[\nearrow$ $]0; 1[\searrow$ $]1; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -\frac{\sqrt{3}}{3}[\curvearrowright$ $]-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}[\curvearrowleft$ $]\frac{\sqrt{3}}{3}; \infty[\curvearrowright$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$

b) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]-\infty; 0[\nearrow$ $]0; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -1[\curvearrowright$ $]-1; 1[\curvearrowleft$ $]1; \infty[\curvearrowright$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c) Nullstellen: $\{0\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; -\sqrt{3}[\searrow$ $]-\sqrt{3}; \sqrt{3}[\nearrow$ $]\sqrt{3}; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -3[\curvearrowleft$ $]-3; 0[\curvearrowright$ $]0; 3[\curvearrowleft$ $]3; \infty[\curvearrowright$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

1.13 a) Nullstellen: $\{-a, a\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; 0[\searrow$ $]0; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -b[\curvearrowleft$ $]-b; b[\curvearrowright$ $]b; \infty[\curvearrowleft$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

b) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]-\infty; \frac{a+b}{2}[\searrow$ $]\frac{a+b}{2}; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; b[\curvearrowright$ $]b; a[\curvearrowleft$ $]a; \infty[\curvearrowright$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

c) Nullstellen: $\{0\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; -a[\searrow$ $]-a; a[\nearrow$ $]a; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -a \cdot \sqrt{3}[\curvearrowright \quad]-a \cdot \sqrt{3}; 0[\curvearrowleft \quad]0; a \cdot \sqrt{3}[\curvearrowright \quad]a \cdot \sqrt{3}; \infty[\curvearrowleft$
 Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

1.14 a) $N = \{\pm\sqrt{7}, \pm 1\}$, $E = \{\pm 2, 0\}$ b) $N = \{\pm 3\}$, $E = \{\pm\sqrt{3}, 0\}$ c) $N = \emptyset$, $E = \{0\}$ d) $N = \{-1, 3\}$, $E = \{\sqrt[3]{13}\}$

1.15 a) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]-\infty; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; 1[\curvearrowleft \quad]1; 3[\curvearrowright \quad]3; \infty[\curvearrowleft$

b) Nullstellen: $\{0\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; -1[\searrow \quad]-1; 1[\nearrow \quad]1; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -\sqrt{3}[\curvearrowright \quad]-\sqrt{3}; 0[\curvearrowleft \quad]0; \sqrt{3}[\curvearrowright \quad]\sqrt{3}; \infty[\curvearrowleft$

c) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]0; 1[\searrow \quad]1; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]0; \infty[\curvearrowleft$

d) Nullstellen: $\{1\}$

Monotonieverhalten: $]0; \frac{1}{e}[\searrow \quad]1; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]0; \infty[\curvearrowleft$

1.16 a) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]-\infty; 0[\nearrow \quad]0; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -1[\curvearrowleft \quad]-1; 1[\curvearrowright \quad]1; \infty[\curvearrowleft$

b) Nullstellen: $\{0\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; 0[\searrow \quad]0; 4[\nearrow \quad]4; \infty[\searrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; 2[\curvearrowleft \quad]2; 6[\curvearrowright \quad]6; \infty[\curvearrowleft$

c) Nullstellen: $\{0, 1\}$

Monotonieverhalten: $]0; \frac{1}{\sqrt{e}}[\nearrow \quad]\frac{1}{\sqrt{e}}; 1[\searrow \quad]1; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]0; \frac{1}{e}[\curvearrowleft \quad]\frac{1}{e}; \frac{1}{\sqrt{e}}[\curvearrowright \quad]\frac{1}{\sqrt{e}}; \infty[\curvearrowleft$

d) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]-\infty; -\sqrt{2}[\nearrow \quad]-\sqrt{2}; \sqrt{2}[\searrow \quad]\sqrt{2}; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; -2[\curvearrowleft \quad]-2; 1 - \sqrt{3}[\curvearrowright \quad]1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}[\curvearrowleft \quad]1 + \sqrt{3}; \infty[\curvearrowright$

1.17 Nullstellen: $\{0\}$

Monotonieverhalten: $]-\infty; \frac{1}{a-b} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)[\searrow \quad]\frac{1}{a-b} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right); \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]-\infty; \frac{2}{a-b} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right)[\curvearrowright \quad]\frac{2}{a-b} \cdot \ln\left(\frac{b}{a}\right); \infty[\curvearrowleft$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

1.18 a) $f(x)$ ist genau dann maximal, wenn der Ausdruck $-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2$ maximal ist. Dieser Ausdruck ist immer negativ außer, wenn $x - \mu = 0$ ist. f hat also an der Stelle $x = \mu$ das globale Maximum.

b) $f''(x) = \frac{1}{\sigma^6 \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot (x - \mu + \sigma) \cdot (x - \mu - \sigma)$.

f'' ändert also genau an den Stellen $x = \mu \pm \sigma$ das Vorzeichen.

c) Die Funktionen $t_1(x) = f'(\mu + \sigma) \cdot (x - \mu - \sigma) + f(\mu + \sigma)$ bzw. $t_2(x) = f'(\mu - \sigma) \cdot (x - \mu + \sigma) + f(\mu - \sigma)$ haben ihre Nullstellen bei $\mu + 2 \cdot \sigma$ bzw. $\mu - 2 \cdot \sigma$

1.19 a) Nullstellen: keine

Monotonieverhalten: $]0; \frac{1}{e}[\searrow \quad]\frac{1}{e}; \infty[\nearrow$

Krümmungsverhalten: $]0; \infty[\curvearrowleft$

Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

b) $y < \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \implies$ keine Lösung $y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ oder $y \geq 1 \implies$ genau eine Lösung $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} < y < 1 \implies$ genau 2 Lösungen

c) Lösungen: $\{2, 3\}$

1.20 a)

x	L.A.	$f(x)$
2,1	4,4	4,41
1,9	3,6	3,61
2,01	4,04	4,0401
1,99	3,96	3,9601

b)

x	L.A.	$f(x)$
4,1	2,025	2,024 84...
3,9	1,975	1,974 84...
4,01	2,0025	2,002 49...
3,99	1,9975	1,997 49...

c)

x	L.A.	$f(x)$
1,1	0,1	0,095 31...
0,9	-0,1	-0,105 36...
1,01	0,01	0,009 95...
0,99	-0,01	-0,010 05...

d)

x	L.A.	$f(x)$
0,1	0,1	0,099 83...
-0,1	-0,1	-0,099 83...
0,01	0,01	0,009 999 8...
-0,01	-0,01	-0,009 999 8...

1.21 a) $f'(-1) = -4$ b) $f'(2) = -\frac{4}{25}$ c) $f'(8) = \frac{1}{12}$ d) $f'(3) = -\frac{3}{4}$

1.22 a) 2 b) $-\frac{4}{25}$ c) 1 d) $\frac{3}{5}$

1.23 a) $g'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x) \implies g''(x) = e^{f(x)} \cdot (f'(x)^2 + f''(x))$

b) $g'(x) = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \implies g''(x) = 2 \cdot (f'(x)^2 + f(x) \cdot f''(x))$

c) $g'(x) = \frac{-f'(x)}{f(x)^2} \implies g''(x) = \frac{2 \cdot f'(x)^2 - f(x) \cdot f''(x)}{f(x)^3}$

d) $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \implies g''(x) = \frac{f''(x) \cdot f(x) - f'(x)^2}{f(x)^2}$

1.24 $q(x) = p'(x) + p(x)$

1.25 $q(x) = p'(x) - 2 \cdot x \cdot p(x)$

1.26 a) 0 b) 2 c) $n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$

1.27 a) $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1, f(1) = 2, f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

b) $f'(x) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 1, f(1) = 2, f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

c) f' kann nur Nullstellen bei 0, 1 oder -1 haben. $f(1) = 2^{q-p} \geq 1, f(0) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$

1.28 $x = \frac{p}{1-p}$

1.29 Nullstellen: $\{0\}$

$(0 | 1)$, Nullstellen: $\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\}$, Periode: $p = \pi$

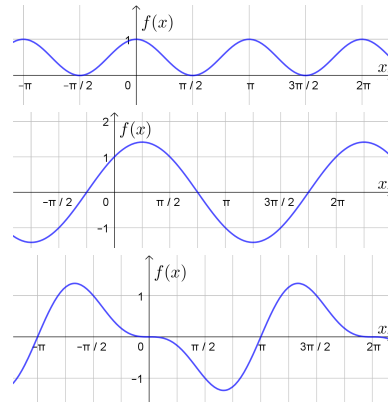
1.30 a) Monotonieverhalten auf $[0; \pi]$: $]0; \frac{\pi}{2}[\searrow \quad]\frac{\pi}{2}; \pi[\nearrow$
Krümmungsverhalten auf $[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}]$: $]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}[\curvearrowright \quad]\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[\curvearrowleft$

$(0 | 1)$, Nullstellen: $\{\frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi\}$, Periode: $p = 2 \cdot \pi$

b) Monotonieverhalten auf $[\frac{\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}]$: $]\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}[\searrow \quad]\frac{5\pi}{4}; \frac{9\pi}{4}[\nearrow$
Krümmungsverhalten auf $[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}]$: $]-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}[\curvearrowright \quad]\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}[\curvearrowleft$

$(0 | 0)$, Nullstellen: $\{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$, Periode: $p = 2 \cdot \pi$

c) Monotonieverhalten auf $[0; 2 \cdot \pi]$: $]0; \arccos(-\frac{1}{2})[\searrow \quad]\arccos(-\frac{1}{2}); 2 \cdot \pi[\nearrow$
Krümmungsverhalten auf $[0; 2 \cdot \pi]$: $]0; \arccos(\frac{1}{4})[\curvearrowright \quad]\arccos(\frac{1}{4}); \pi[\curvearrowleft$
 $]\pi; 2 \cdot \pi - \arccos(\frac{1}{4})[\curvearrowright \quad]2 \cdot \pi - \arccos(\frac{1}{4}); 2 \cdot \pi[\curvearrowleft$



1.31 $a = e^{\frac{1}{e}}$, Schnittpunkt: $(e | e)$

1.32 a) $f'(x) = \ln(1+x) - \ln(x) - \frac{1}{1+x} \quad f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{x}$

b) $f''(x) = -\frac{1}{x \cdot (x+1)^2} < 0$ für alle $x > 0$

c) $f'(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \frac{1}{1+x} \rightarrow 0$

d) Aus b) folgt, dass f' streng monoton fallend ist. Wegen c) muss $f'(x) > 0$ gelten.

e) $f(x) = x \cdot \ln(1 + \frac{1}{x})$ ist streng monoton wachsend. Also ist (a_n) streng monoton wachsend.

f) $g(x) = (x+1) \cdot \ln(x+1) - (x+1) \cdot \ln(x)$ ist streng monoton fallend.

1.33 Sie schneiden sich in einem Punkt wenn $k = -4$. (Tangente)

Sie schneiden sich in zwei Punkten wenn $k \neq -4$. (Sekante)

1.34 a) Die Tangente $y = x + 1$ hat Steigung 1 und $f'(0) = 1$. Wegen $f''(x) > 0$ gilt $f(x) = e^x \geq x + 1 > x$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$, Extrempunkt: $(0 | 1)$

1.35 a) $0 < k < e$ b) $k = e$ c) $k > e$

1.36 $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x$ schneiden einander in $(0 | 0)$.

Die Tangente an den Graphen von f an der Stelle 0 ist genau der Graph von g .

f ist in $]0; \frac{\pi}{2}[$ negativ gekrümmt, also ist dort $g(x) > f(x)$.

f ist in $]-\frac{\pi}{2}; 0[$ positiv gekrümmt, also ist $g(x) < f(x)$.

Wegen $|f(x)| \leq 1$ ist $(0 | 0)$ die einzige Schnittstelle.

1.37 a) I : $f(0) = 18$, II : $f(3) = 0$, III : $f'(2) = 0$, IV : $f''(-1) = 0$ b) $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 24 \cdot x + 18$

1.38 $f(x) = x^3 - 6 \cdot x^2 + 9 \cdot x + 1$

1.39 $f(x) = 2 \cdot x^3 - 6 \cdot x - 3$

1.40 a) $a > 7$ oder $a < -20$ b) $a = 7$ oder $a = -20$ c) $-20 < a < 7$

1.41 a) $a = 19$ b) $a < -13$ oder $-8 < a < 19$ c) $a = -13$ oder $a = -8$ d) $-13 < a < -8$ e) $a > 19$

2. OPTIMIERUNGSAUFGABEN

2.1

MmF

Die Lösungen der Gleichung $9 \cdot x^2 + y^2 = 18$ bilden die dargestellte Ellipse. Dieser Ellipse werden Rechtecke eingeschrieben:

- Der Eckpunkt $P = (x_P \mid y_P)$ liegt auf der Ellipse im 1. Quadranten.
- Die Seiten des Rechtecks sind parallel zu den Koordinatenachsen.

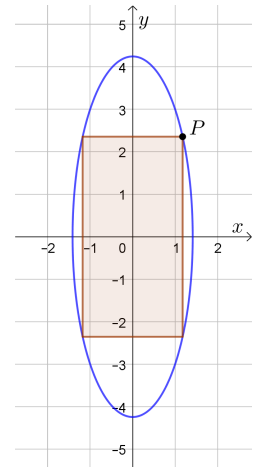
Der Flächeninhalt F des Rechtecks hängt von x_P ab.

a) Zeige, dass

$$F(x_P) = 12 \cdot \sqrt{2 \cdot x_P^2 - x_P^4}$$

gilt.

b) Ermittle den größten Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann.
Welche Koordinaten hat P in diesem Fall?



2.2

MmF

Das Volumen V und der Oberflächeninhalt O eines Drehkegels hängen von seinem Radius r und seiner Höhe h ab:

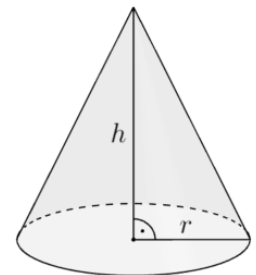
$$V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$$

$$O = \pi \cdot r \cdot (r + \sqrt{r^2 + h^2})$$

Der Oberflächeninhalt eines bestimmten Drehkegels beträgt 42 cm^2 .

a) Stelle mithilfe von r eine Formel für das Volumen $V(r)$ des Drehkegels auf.

$V(r) =$ (r in cm, $V(r)$ in cm³)



Das Volumen des Drehkegels soll so groß wie möglich sein. Man kann zeigen, dass $V(r)$ den größten Funktionswert an der gleichen Stelle r^* annimmt wie die Funktion f , für die gilt:

$$f(r) = \frac{42}{\pi} \cdot r^2 - 2 \cdot r^4$$

b) Ermittle die Ableitungsfunktion f' und ihre positive Nullstelle r^* .

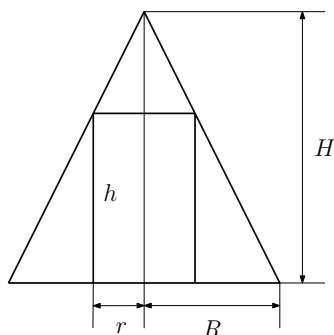
c) Zeige, dass f an der Stelle r^* ein lokales Maximum hat.

d) ★ Begründe, warum $V(r)$ und $f(r)$ tatsächlich an der gleichen Stelle den jeweils größten Funktionswert annehmen.

2.3

MmF

Einem Drehkegel mit Radius $R = 42$ cm und Höhe $H = 126$ cm werden Drehzylinder wie im Bild eingeschrieben. Gesucht sind die Abmessungen jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.



r ist der Zylinderradius in cm.

$V(r)$ ist das Zylindervolumen in cm^3 .

a) Zeige, dass

$$V(r) = 126 \cdot \pi \cdot r^2 - 3 \cdot \pi \cdot r^3$$

gilt.

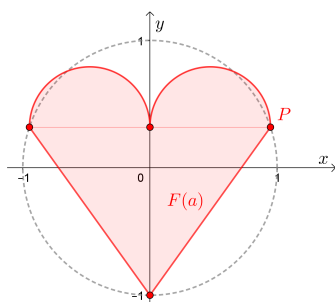
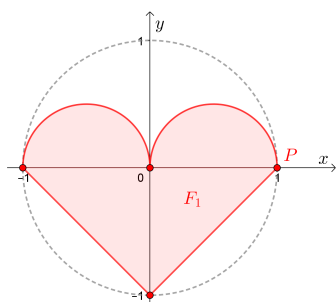
b) Ermittle das Monotonieverhalten von V in $]0; 42[$.

c) Ermittle den Radius und die Höhe jenes Drehzylinders mit maximalem Volumen.

2.4

MmF

Die unten dargestellten Herzen sind symmetrisch zur y -Achse und bestehen jeweils aus zwei Halbkreisen und einem gleichschenkeligen Dreieck:



a) Berechne den Flächeninhalt F_1 des linken Herzens mit $P = (1 \mid 0)$.

Der Punkt $P = (a \mid b)$ ist beweglich auf dem Einheitskreisbogen im 1. Quadranten.

Der Flächeninhalt F des Herzens hängt dann vom Wert von $a \in [0; 1]$ ab.

b) Zeige, dass für den Flächeninhalt des Herzens gilt:

$$F(a) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a + \sqrt{a^2 - a^4}$$

c) Ermittle die Ableitungsfunktion F' mithilfe der Ableitungsregeln.

Die Funktion F' hat genau eine Nullstelle $a^* \in]0; 1[$, nämlich $a^* \approx 0,9475$.

d) Berechne, um wie viel Prozent der Inhalt des flächengrößten Herzens größer als F_1 ist.

2.5

MmF

Welche Punkte des Funktionsgraphen von

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

haben vom Punkt $P = (0 \mid \frac{9}{2})$ den kleinsten Abstand?

2.6

MmF

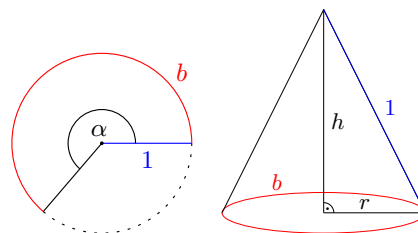
Aus einem Kreissektor mit Radius 1 und Zentriwinkel α kann man – wie dargestellt – einen Drehkegel basteln.

Das Volumen V des Drehkegels hängt von α ab.

Für alle Winkel $\alpha \in]0; 2 \cdot \pi[$ gilt:

$$V(\alpha) = \frac{\alpha^2}{12 \cdot \pi} \cdot \sqrt{w(\alpha)} \quad \text{mit} \quad w(\alpha) = 1 - \frac{\alpha^2}{4 \cdot \pi^2}$$

Der Winkel α ist dabei im Bogenmaß.



a) Ermittle $V'(\alpha)$ mit den Ableitungsregeln.

Es gibt genau einen Winkel $\alpha^* \in]0; 2 \cdot \pi[$, für den das Volumen des Drehkegels maximal ist.

Dieser Winkel ist eine Lösung der folgenden Gleichung: $\sqrt{w(\alpha)} = \frac{\alpha^2}{8 \cdot \pi^2 \cdot \sqrt{w(\alpha)}}$

b) Berechne diesen Winkel α^* im Bogenmaß.

c) Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein: $\alpha^* = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\boxed{}}{\boxed{}}}$

2.7

MmF

Wir nehmen zwei reelle Zahlen mit Summe 10 und bilden ihr Produkt.

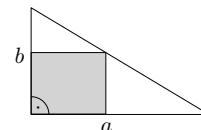
Was ist das größte Produkt, das man auf diese Weise bilden kann?

Geometrische Interpretation: Welches Rechteck mit Umfang 20 hat den größten Flächeninhalt?

2.8

MmF

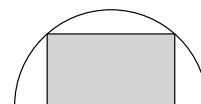
Wir schreiben einem rechtwinkligen Dreieck mit Katheten der Länge a und b Rechtecke mit Seiten parallel zu den Katheten ein. Was ist der größte Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann?



2.9

MmF

Wir schreiben einem Halbkreis mit Radius $r > 0$ Rechtecke ein, sodass eine Seite auf dem Durchmesser zu liegen kommt. Was ist der größte Flächeninhalt, den ein solches Rechteck haben kann? 🎥



2.10

MmF

Wir betrachten Geraden durch den Punkt $A = (1 | 2)$ mit Steigung $k < 0$. Wie muss k gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks, das von der Geraden und den Koordinatenachsen eingeschlossen wird, möglichst klein wird? 🎥

2.11

MmF

Wir betrachten Dreiecke, deren Umkreis Radius 1 hat.

Was ist der größte Flächeninhalt, den ein solches Dreieck haben kann?

2.12**MmF**

Gegeben ist ein Drehkegel mit Radius R und Höhe H . Diesem Drehkegel wird ein Drehzylinder eingeschrieben. Die Basis des Zylinders ruht dabei auf der Basis des Kegels.

- a) Gibt es einen solchen Zylinder, der zumindest das halbe Volumen des Drehkegels ausfüllt?
- b) Für welchen Radius ist die Oberfläche des Zylinders so groß wie möglich?

2.13**MmF**

- a) Welches Rechteck mit Flächeninhalt 1 hat den kleinsten Umfang?
- b) Welches Dreieck mit Flächeninhalt 1 und einer Seite mit Länge a hat den kleinsten Umfang?
- c) Welches Dreieck mit Flächeninhalt 1 hat den kleinsten Umfang?

2.14**MmF**

- a) Welcher gerade Zylinder mit Volumen 1 hat die kleinste Oberfläche?
- b) Welcher Quader mit Volumen 1 und Höhe $h > 0$ hat die kleinste Oberfläche?
- c) Welcher Quader mit Volumen 1 hat die kleinste Oberfläche?

2.15**MmF**

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$. Welcher Punkt des Graphen der Funktion

$$f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^{-n}$$

hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand? 🎥

2.16**MmF**

Welcher Punkt des Graphen der Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos(x)$$

hat vom Koordinatenursprung den kleinsten Abstand?

2.17**MmF**

Wir rollen ein Rechteck mit Umfang $U > 0$ zu einem Drehzylinder zusammen. Wie muss das Rechteck dimensioniert sein, damit der Drehzylinder das größtmögliche Volumen hat?

2.18★ **MmF**

Gegeben sind die Punkte $A = (1 \mid -4)$, $B = (2 \mid -7)$ und $C = (3 \mid 5)$. Ermittle jenen Punkt der Ebene, für den die Summe der Quadrate der Abstände zu A , B und C minimal ist.

2.19



Sei $p > 0$.

Gesucht ist der größte Radius $r > 0$, sodass der Kreis mit Gleichung

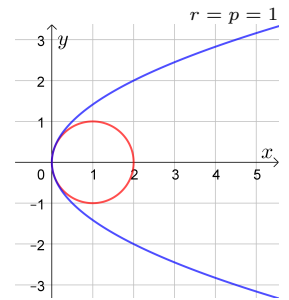
$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

und die Parabel mit Gleichung

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x$$

einander in *genau* einem Punkt schneiden.

„Schmiegleichkreis an die Parabel“



2.20



Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > b > 0$.

Gesucht ist der größte Radius r mit $0 < r < a$, sodass der Kreis mit Gleichung

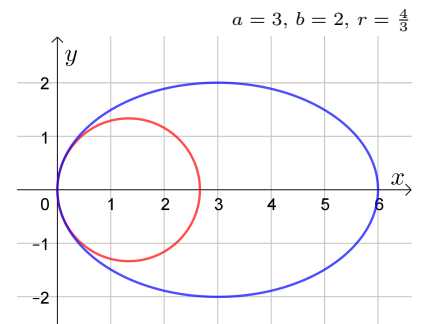
$$(x - r)^2 + y^2 = r^2$$

und die Ellipse mit Gleichung

$$b^2 \cdot (x - a)^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

einander in *genau* einem Punkt schneiden.

„Schmiegleichkreis an die Ellipse“



2.1 a) folgt aus $F = 4 \cdot x_P \cdot y_P$ und $9 \cdot x_P^2 + y_P^2 = 18$ **b)** Maximaler Flächeninhalt: 12 $P = (1 \mid 3)$

2.2 a) $V(r) = \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{42}{\pi \cdot r} - r\right)^2 - r^2}$

b) $f'(r) = \frac{84}{\pi} \cdot r - 8 \cdot r^3$ $r^* = \sqrt{\frac{84}{8 \cdot \pi}} = 1,828 \dots \text{cm}$

c) $f''(r) = \frac{84}{\pi} - 24 \cdot r^2 \implies f''(r^*) = -53,4 \dots < 0$ An der Stelle r^* hat f also die Steigung 0 und ist negativ gekrümmt. Also hat f an der Stelle r^* ein lokales Maximum.

d) Wir vereinfachen die in **a)** ermittelte Funktionsgleichung von V :

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\left(\frac{42}{\pi \cdot r} - r\right)^2 - r^2} = \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{42^2}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{84 \cdot r}{\pi \cdot r} + r^2 - r^2} = \\ &= \frac{\pi \cdot r^2}{3} \cdot \sqrt{\frac{42^2}{\pi^2 \cdot r^2} - \frac{84 \cdot r^4}{\pi}} = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{42}{\pi} \cdot \left(\frac{42 \cdot r^2}{\pi} - 2 \cdot r^4\right)} = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{\frac{42}{\pi}} \cdot \sqrt{f(r)} \end{aligned}$$

Die Wurzelfunktion $\odot \mapsto \sqrt{\odot}$ ist streng monoton steigend. Also ist $V(r)$ genau dann maximal, wenn $f(r)$ maximal ist.

2.3 a) Hinweis: Ähnliche Dreiecke $\frac{H}{R} = \frac{h}{R-r}$

	$0 < r < 28$	$r = 28$	$28 < r < 42$
b) $V'(r)$	+	0	−
$V(r)$	↗	$32\,928 \cdot \pi$	↘

c) $r = 28 \text{ cm}$, $h = 42 \text{ cm}$

2.4 a) $F_1 = 1 + \frac{\pi}{4}$

b) $F(a) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a \cdot (1 + \sqrt{1 - a^2}) = \frac{\pi}{4} \cdot a^2 + a + \sqrt{a^2 - a^4}$

c) $F'(a) = \frac{\pi}{2} \cdot a + 1 + \frac{1 - 2 \cdot a^2}{\sqrt{1 - a^2}}$

d) rund 9,53 %

2.5 $(-2 \mid 4)$ und $(2 \mid 4)$

2.6 a) $V'(\alpha) = \frac{\alpha}{6 \cdot \pi} \cdot \sqrt{w(\alpha)} - \frac{\alpha^3}{48 \cdot \pi^3 \cdot \sqrt{w(\alpha)}}$

b) $\alpha^* = 5,130 \dots \text{rad}$

c) $\alpha^* = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

2.7 25

2.8 $\frac{a \cdot b}{4}$

2.9 r^2

2.10 $k = -2$

2.11 $\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}$

2.12 a) Nein, der Zylinder kann maximal $\frac{4}{9}$ des Volumens ausfüllen.

b) Wenn $H > 2 \cdot R$ ist, dann $r = \frac{H \cdot R}{2 \cdot (H - R)}$. Wenn $H \leq 2R \cdot R$ ist, dann liefert $r = R$ ein Randmaximum.

2.13 a) Quadrat **b)** Gleichschenkliges Dreieck **c)** Gleichseitiges Dreieck

2.14 a) $r = \sqrt[3]{\frac{1}{2 \cdot \pi}}$, $h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$

b) Quader mit quadratischer Grundfläche mit Seitenlänge $\frac{1}{\sqrt{h}}$

c) Würfel mit Kantenlänge 1

2.15 $(\sqrt[2 \cdot n + 2]{n} \mid f(\sqrt[2 \cdot n + 2]{n}))$

2.16 $(0 \mid 1)$

2.17 $\frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{U}{6}\right)^3$

2.18 $(2 \mid -2)$

2.19 $r = p$

2.20 $r = \frac{b^2}{a}$

3. HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

3.1

MmF

Für die Folge $(s_n)_{n \geq 1}$ gilt:

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$$

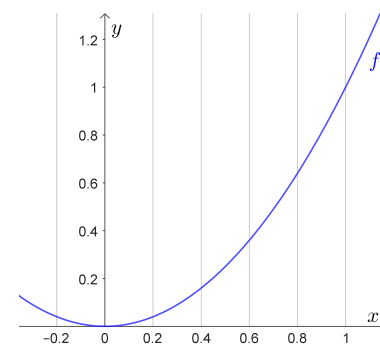
a) Berechne s_5 .

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^2$ ist rechts dargestellt.

b) Zeichne rechts 5 Rechtecke so ein, dass sie zusammen den Flächeninhalt s_5 haben.

c) Ermittle den Grenzwert: $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$

d) ★ Sei $\varepsilon > 0$. Gib einen Index $n(\varepsilon)$ so an, dass $|s_n - s| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$ gilt.



3.2

MmF

Der Grenzwert der Folge (r_n) mit

$$r_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n}\right)^3$$

soll berechnet werden.

Mit r_n kann das bestimmte Integral

$$\int_0^1 f(x) dx$$

einer gewissen stetigen Funktion f angenähert werden.

Dabei wird das Intervall $[0; 1]$ in n gleich breite Teile zerlegt und mit r_n die zugehörige Obersumme berechnet.

a) Ermittle die Gleichung einer passenden Funktion f .

Fertige rechts eine Skizze an und veranschauliche r_5 .

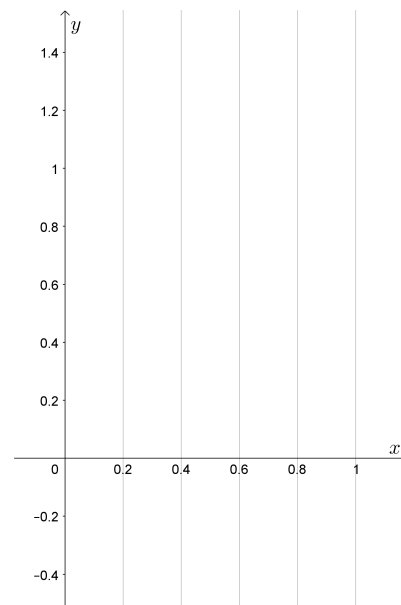
b) Berechne den Grenzwert $r = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$.

Hinweis: Verwende den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

c) Sei $\varepsilon > 0$. Ermittle einen Index $n(\varepsilon)$ so, dass $|r_n - r| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$ gilt.

d) Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) :

$$a_n = \frac{1^{42} + 2^{42} + 3^{42} + \dots + n^{42}}{n^{43}}$$



3.3

MmF

Für welchen Wert von $x \in [0; \infty[$ ist der gegebene Ausdruck am größten?

a) $\int_x^{x+1} e^{-t} dt$ b) $\int_x^{2 \cdot x} e^{-t} dt$ c) $\int_x^{x+1} t \cdot e^{-t} dt$ d) $\int_x^{2 \cdot x} t \cdot e^{-t} dt$

3.4



In dieser Aufgabe betrachten wir die Folgen (a_n) , (b_n) und (c_n) , wobei gilt:

$$a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \quad b_n = \ln(n+1) \quad c_n = a_n - b_n$$

a) Rechne nach, dass $b_n = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$ gilt.

b) Erkläre mit Untersummen/Obersummen, weshalb $0 < c_n \leq c_{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Die Folge (c_n) ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt. Also konvergiert die Folge (c_n) .

Der Grenzwert dieser Folge wird *Euler-Mascheroni-Konstante* γ genannt.

3.5



Zeige, dass die Folge (a_n) konvergiert und ermittle ihren Grenzwert a .

Hinweis: Unter- und Obersummen

Sei $\varepsilon > 0$. Gib einen Index $n(\varepsilon)$ so an, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n(\varepsilon)$.

a) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^2$

f) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{-\frac{k}{n}}$

b) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{k}{n}}$

g) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{\pi}{2 \cdot n} \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2 \cdot n}\right)$

c) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^\alpha$ mit $\alpha > -1$

h) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+n}{n^2}$

d) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \cdot e^{\frac{k}{n}}$

i) $a_n = \frac{1}{n} \cdot \ln \left[\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n}\right) \right]$

e) $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{k^2 + n^2}$

3.6



Berechne die Ableitungsfunktion von f .

a) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_1^{e^x} \frac{1}{y} dy$

b) $f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\ln(x)} e^y dy$

c) $f:]0; \pi[\rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \int_0^{\cos(x)} (1 - y^2)^{-\frac{1}{2}} dy$

3.7

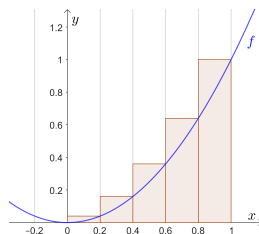
Seien $g:]a; b[\rightarrow \mathbb{R}$ und $f:]c; d[\rightarrow \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, sodass $g(x) \in]c; d[$ für alle $x \in]a; b[$ gilt. Sei $x_0 \in]a; b[$. Berechne die Ableitung der Funktion

$$h(x) = \int_{g(x_0)}^{g(x)} f(t) dt$$

und beweise damit den folgenden Zusammenhang:

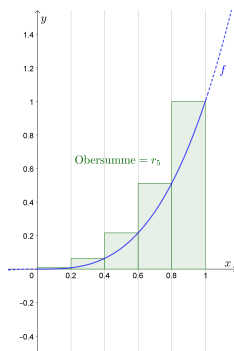
$$\int_{g(x_0)}^{g(x)} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(g(s)) \cdot g'(s) ds$$

3.1 a) $s_5 = \frac{11}{25}$ b)



c) $s = \frac{1}{3}$ d) Zum Beispiel: $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$

3.2 a) $f(x) = x^3$



b) $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \frac{1}{4}$ c) Zum Beispiel: $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{43}$

3.3 a) $x = 0$ b) $x = \ln(2)$ c) $x = \frac{1}{e-1}$ d) $x = \ln(4)$

3.4 a_n ist die Obersumme von $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1; n+1]$
 $a_{n+1} - 1$ ist die Untersumme von $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1; n+1]$

- 3.5 a) Obersumme von $f(x) = x^2$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $\frac{1}{3}$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$
 b) Obersumme von $f(x) = \sqrt{x}$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $\frac{2}{3}$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$
 c) Obersumme/Untersumme von $f(x) = x^\alpha$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $\frac{1}{\alpha+1}$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$
 d) Obersumme von $f(x) = e^x$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $e - 1$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{e-1}{\varepsilon} \rfloor + 1$
 e) Obersumme von $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $\frac{\ln(2)}{2}$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{2 \cdot \varepsilon} \rfloor + 1$
 f) Untersumme von $f(x) = e^{-x}$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $1 - \frac{1}{e}$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1-e^{-1}}{\varepsilon} \rfloor + 1$
 g) Untersumme von $f(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ in $[0; 1]$ Grenzwert: 1 $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{\pi}{2 \cdot \varepsilon} \rfloor + 1$
 h) Obersumme von $f(x) = 1 + x$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $\frac{3}{2}$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$
 i) Obersumme von $f(x) = \ln(1+x)$ in $[0; 1]$ Grenzwert: $2 \cdot \ln(2) - 1$ $n(\varepsilon) = \lfloor \frac{\ln(2)}{\varepsilon} \rfloor + 1$

3.6 a) 1 b) 1 c) -1

3.7 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $F(x) = \int_a^x f(t) dt \implies F'(x) = f(x)$

Kettenregel: $K(x) = F(G(x)) \implies K'(x) = F'(G(x)) \cdot G'(x)$

$\implies h'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$

Beide Seiten haben die gleiche Ableitung und stimmen an der Stelle x_0 überein.

4. INTEGRALRECHNUNG

4.1

MmF

Für die Funktion f gilt: $f(x) = k \cdot x + d$ mit $k \neq 0$

- a) Stelle mithilfe von k und d eine Formel für $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2$ auf.
- b) Stelle mithilfe von k und d eine Formel für $\int_0^1 f(x)^2 dx$ auf.
- c) Zeige, dass für alle $k, d \in \mathbb{R}$ mit $k \neq 0$ gilt:

$$\left(\int_0^1 f(x) dx\right)^2 < \int_0^1 f(x)^2 dx$$

4.2

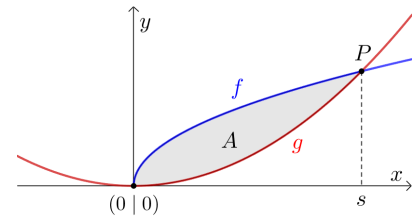
MmF

Die Graphen der Funktionen f und g schließen die dargestellte Fläche mit Inhalt A ein.

Dabei gilt $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = c \cdot x^2$,
wobei $c \in \mathbb{R}$ eine bestimmte positive Zahl ist.

Für den Flächeninhalt gilt: $A = \frac{8}{3}$

- a) Stelle mithilfe von c eine Formel für die Schnittstelle s auf.
- b) Berechne c .
- c) Berechne die Koordinaten des Schnittpunkts P .



4.3

MmF

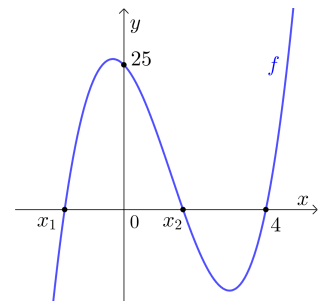
Die dargestellte Polynomfunktion f hat Grad 3.

Die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den
Koordinatenachsen sind rechts eingezeichnet.

Die Nullstellen x_1 und x_2 liegen symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Weiters gilt: $\int_0^4 f(x) dx = 2$

Berechne die Nullstellen x_1 und x_2 .



4.4

MmF

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$ ist rechts unten dargestellt.

- a) Es gibt genau eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ so, dass

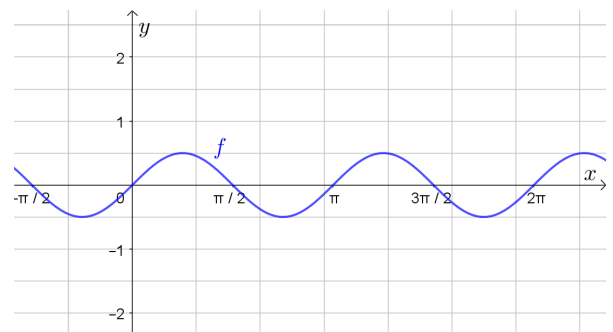
$$f(x) = c \cdot f''(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne c .

- b) Skizziere rechts den Funktionsgraphen von f'' .

- c) Berechne $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

Hinweis: Verwende a).



4.5

Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$$

- Zeige, dass $f'(x) = x \cdot (2 - x) \cdot e^{-x}$ gilt.
Dokumentiere dabei die Verwendung von Ableitungsregeln sorgfältig.
- Ermittle die Nullstellen der Funktion f' .
- Ermittle das Monotonieverhalten der Funktion f .
- Zeige, dass es Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$F(x) = (a \cdot x^2 + b \cdot x + c) \cdot e^{-x}$$

eine Stammfunktion von f ist. Welche Werte haben die Zahlen a , b und c mit dieser Eigenschaft?

- e) ★ Begründe, warum die Gleichung

$$x^2 = \frac{1}{2} \cdot e^x$$

genau drei Lösungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat.

Hinweis: Verwende das Monotonieverhalten von f und den Zwischenwertsatz.

4.6

a) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(x) = e^{-x} \cdot (a \cdot x^2 + b \cdot x + c)$.

Zeige, dass

$$f'(x) = e^{-x} \cdot [-a \cdot x^2 + (2 \cdot a - b) \cdot x + b - c]$$

gilt.

- b) Ermittle eine Stammfunktion von $g(x) = e^{-x} \cdot (x^2 - 3 \cdot x + 1)$.
c)  Ermittle eine Stammfunktion von $h(x) = e^{2 \cdot x} \cdot (3 \cdot x^2 + 2 \cdot x^3)$.

4.7

Für die Funktionen $\sinh$ (Sinus Hyperbolicus) bzw. g gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \frac{e^x}{2}$$

- a) Trage einen richtigen Term in das Kästchen ein und begründe, warum die Funktion $\sinh$ nur eine einzige Nullstelle hat.

$$\sinh(x) = \frac{e^x \cdot \left(\text{rectangle} \right)}{2}$$

- b)** Ermittle das asymptotische Verhalten von $x \mapsto \frac{\sinh(x)}{g(x)}$, also folgenden Grenzwert: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{g(x)}$
- c)** Ermittle jene Stammfunktion F von $\sinh$, die $F(0) = 1$ erfüllt.
- d)** Berechne $\int_0^1 \sinh(x) \, dx$.

4.8

Für die reellen Funktionen $\sinh$ (*Sinus hyperbolicus*) und $\cosh$ (*Cosinus hyperbolicus*) gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

- a) Begründe, warum $\cosh(x) > \sinh(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die Graphen der beiden Funktionen schließen im Intervall $[0; b]$ die rechts dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ ein.

- b) Stelle eine Formel für $F(b)$ mit $b > 0$ auf, und berechne den Grenzwert $\lim_{b \rightarrow \infty} F(b)$.

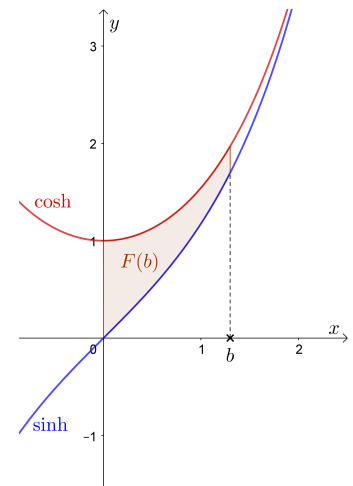
- c) Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ so, dass

$$\sinh^2(x) + \cosh^2(x) = \cosh(a \cdot x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Berechne diesen Wert a .

Rotiert die dargestellte Fläche mit Inhalt $F(b)$ um die x -Achse, dann entsteht ein Rotationskörper mit Volumen $V(b)$.

- d) ★ Zeige, dass $\lim_{b \rightarrow \infty} V(b) = \infty$ gilt.



4.9

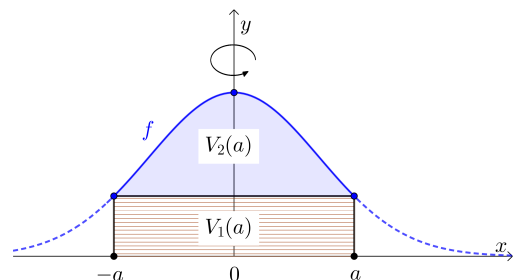
Für die Funktion G gilt: $G(x) = x \cdot \ln(x) - x$

- a) Zeige mithilfe der Ableitungsregeln, dass $G'(x) = \ln(x)$ gilt.

Für die Funktion f gilt: $f(x) = e^{-x^2}$

Der Teil des Funktionsgraphen von f mit $-a \leq x \leq a$ sowie die im Bild unten senkrecht eingezeichneten Strecken mit $x = \pm a$ rotieren um die y -Achse.

- b) Stelle mithilfe von $a > 0$ eine Formel für das markierte Rotationsvolumen $V_1(a)$ auf.
- c) Stelle mithilfe von $a > 0$ eine Formel für das markierte Rotationsvolumen $V_2(a)$ auf.
- d) Vereinfache $V(a) = V_1(a) + V_2(a)$ so weit wie möglich.
- e) Ermittle den Grenzwert $V = \lim_{a \rightarrow \infty} V(a)$.



4.10

MmF

Die Lösungen der Gleichung

$$x^2 + (y - 3)^2 = 1$$

liegen auf der rechts dargestellten Kreislinie.

Die obere Kreislinie ist der Graph einer Funktion f .

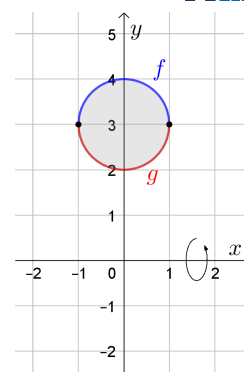
Die untere Kreislinie ist der Graph einer Funktion g .

- a) Ermittle jeweils eine Funktionsgleichung von f und von g .

Wenn die Kreisscheibe um die horizontale Achse rotiert, dann entsteht ein *Torus*.

- b) Berechne das Volumen dieses Torus.

Hinweis: Du darfst $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ verwenden.



4.11

MmF

Für die Funktion f gilt: $f(x) = x^2 - 8 \cdot x + 18$

- a) Berechne alle Stellen s im Intervall $[1; 7]$ mit

$$f(s) \cdot 6 = \int_1^7 f(x) dx.$$

- b) Allgemein gibt es für jede stetige Funktion f und jedes Intervall $[a; b]$ mit $a < b$ (mindestens) eine Stelle $s \in [a; b]$ so, dass gilt:

$$f(s) \cdot (b - a) = \int_a^b f(x) dx$$

Beweise diesen **Mittelwertsatz der Integralrechnung**.

Du darfst den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sowie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwenden.

4.12

MmF

Ermittle die Nullstellen der gegebenen Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ermittle die ersten beiden Ableitungen von f und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten. Ermittle den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den der Graph mit der x -Achse einschließt.

- a) $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2$  b) $f(x) = x^4 - 4 \cdot x^3$ c) $f(x) = x^5 + 5 \cdot x^4$

4.13

MmF

Sei $a > 0$. Berechne den Flächeninhalt, der vom Graphen der Polynomfunktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^2 - x^2$ mit der horizontalen Achse zwischen den beiden Nullstellen eingeschlossen wird.

4.14

MmF

Sei $a > 0$. Untersuche die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - a^2 \cdot x$ auf Nullstellen sowie ihr Monotonie- und Krümmungsverhalten. Skizziere den Graphen von f . Berechne den Flächeninhalt des beschränkten Bereichs, der unter dem Graphen von f und über der horizontalen Achse liegt.

4.15

MmF

Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten der Funktion f mit

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 4^{-x} - 6 \cdot 2^{-x} + 8.$$

Skizziere den Graphen von f und berechne den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, der zwischen dem Graphen und der horizontalen Achse liegt.

4.16

MmF

Ermittle die Nullstellen und untersuche das Monotonie- und Krümmungsverhalten sowie das asymptotische Verhalten der Funktion f mit

$$f:]0; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = [\ln(x)]^2 - 3 \cdot \ln(x) + 2.$$

Skizziere den Graphen von f und berechne den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, der von diesem Graphen und der horizontalen Achse berandet wird.

Hinweis: Um eine Stammfunktion zu ermitteln, bilde zuerst die Ableitungen von $x \cdot [\ln(x)]^2$ und $x \cdot \ln(x)$.

4.17

MmF

Gegeben ist die Gerade $y = 4 \cdot x + 1$. Gesucht ist die Polynomfunktion f vierten Grades, deren Graph nie überhalb der Geraden liegt und die Gerade an den Stellen -1 und 1 berührt. Weiter ist bekannt, dass die Gerade und der Graph ein Flächenstück mit Inhalt $16/15$ einschließen.

Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

4.18

MmF

Es gibt eine quadratische Funktion f mit den folgenden beiden Eigenschaften:

i) $2 \cdot x - y = -6$ ist eine Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle $x = 0$.

ii) $\int_0^1 f(x) \, dx = 8$

Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

4.19

MmF

Eine kubische Polynomfunktion hat eine einfache Nullstelle bei -1 und eine doppelte Nullstelle bei 1 . Ihr Graph berandet mit der x -Achse einen Bereich mit orientiertem Flächeninhalt 8 .

Ermittle eine Gleichung der Polynomfunktion.

4.20

MmF

Eine Polynomfunktion f dritten Grades hat bei $x = -1$ eine Wendestelle. Eine Gleichung der Wendetangente ist $y + 3 \cdot x + 5 = 0$. Die Funktion hat eine Nullstelle bei -2 .

a) Ermittle eine Funktionsgleichung von f .

b) Ermittle den Flächeninhalt des endlichen Bereichs, den der Graph der Polynomfunktion gemeinsam mit der x -Achse berandet.

4.21



Eine Polynomfunktion f dritten Grades hat bei $x = 2$ eine Wendestelle. Eine Gleichung der Wendetangente ist $9 \cdot y + 3 \cdot x = 8$. Die Tangente an den Graphen der Funktion an der Stelle 0 schließt mit der positiven x -Achse einen Winkel von 45° ein. Diese Tangente berandet mit dem Graphen der Polynomfunktion einen endlichen Bereich. Was ist sein Flächeninhalt?

4.22



Berechne die Bogenlänge des Graphen der Funktion f .

a) $f: [1; 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^4}{32} + \frac{1}{x^2}$

b) $f: [2; 3] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{1}{x}$

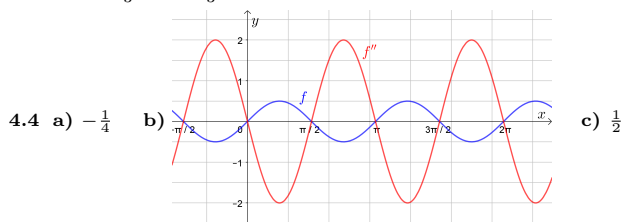
c) $f: [1; e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2}{8} - \ln(x)$

d) $f: [-\ln(2); \ln(2)] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

4.1 a) $\frac{1}{4} \cdot k^2 + d \cdot k + d^2$ b) $\frac{1}{3} \cdot k^2 + d \cdot k + d^2$ c) $\int_0^1 f(x)^2 dx - \left(\int_0^1 f(x) dx \right)^2 = \frac{1}{12} \cdot k^2 > 0$

4.2 a) $s = c^{-\frac{2}{3}}$ b) $c = \frac{1}{8}$ c) $P = (4 | 2)$

4.3 $x_1 = -\frac{5}{3}, x_2 = \frac{5}{3}$



4.5 a) Kettenregel und Produktregel

b) 0 und 2

	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
c) $f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4 \cdot e^{-2}$	$\searrow$

d) $a = -1, b = -2, c = -2$

e) Da f überall definiert ist, folgt aus dem Monotonieverhalten, dass es in jedem der 3 Intervalle $]-\infty; 0[$, $]0; 2[$ und $]2; \infty[$ *höchstens eine* Stelle mit Funktionswert $\frac{1}{2}$ gibt.

Aus der Stetigkeit von f und dem Zwischenwertsatz folgt, dass es in jedem der 3 Intervalle $]-\infty; 0[$, $]0; 2[$ und $]2; \infty[$ *mindestens eine* Stelle mit Funktionswert $\frac{1}{2}$ gibt.

Also hat die Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}$ *genau drei* Lösungen.

4.6 a) Kettenregel und Produktregel b) $a = -1, b = 1, c = 0$ c) $H(x) = e^{2 \cdot x} \cdot x^3$

4.7 a) $\sinh(x) = \frac{e^x \cdot (1 - e^{-2 \cdot x})}{2} = 0 \iff \dots \iff x = 0$ (Produkt-Null-Satz)

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sinh(x)}{g(x)} = 1$ c) $F(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ d) 0,543...

4.8 a) $\cosh(x) > \sinh(x) \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} > \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^x + e^{-x} > e^x - e^{-x} \iff 2 \cdot e^{-x} > 0 \checkmark$

b) $F(b) = 1 - e^{-b} \rightarrow 1$

c) $a = 2$

d) $V(b) = \pi \cdot b \rightarrow \infty$

4.9 a) Produktregel b) $V_1(a) = \pi \cdot a^2 \cdot e^{-a^2}$ c) $V_2(a) = \pi - \pi \cdot a^2 \cdot e^{-a^2} - \pi \cdot e^{-a^2}$ d) $V(a) = \pi - \pi \cdot e^{-a^2}$ e) $V = \pi$

4.10 a) $f(x) = 3 + \sqrt{1 - x^2}, g(x) = 3 - \sqrt{1 - x^2}$ b) $V = 6 \cdot \pi^2$

4.11 a) $s_1 = 4 + \sqrt{3}, s_2 = 4 - \sqrt{3}$ b) Hinweis: MWS der Differentialrechnung auf F anwenden: $F'(s) = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$

- 4.12 a)** Nullstellen: $\{-3, 0\}$
 Monotonieverhalten: $]-\infty; -2[\nearrow]-2; 0[\searrow]0; \infty[\nearrow$
 Krümmungsverhalten: $]-\infty; -1[\curvearrowright]-1; \infty[\curvearrowleft$
 Flächeninhalt: 6,75
- b)** Nullstellen: $\{0, 4\}$
 Monotonieverhalten: $]-\infty; 3[\searrow]3; \infty[\nearrow$
 Krümmungsverhalten: $]-\infty; 0[\curvearrowleft]0; 2[\curvearrowright]2; \infty[\curvearrowleft$
 Flächeninhalt: 51,2
- c)** Nullstellen: $\{-5, 0\}$
 Monotonieverhalten: $]-\infty; -4[\nearrow]-4; 0[\searrow]0; \infty[\nearrow$
 Krümmungsverhalten: $]-\infty; -3[\curvearrowright]-3; \infty[\curvearrowleft$
 Flächeninhalt: 520,83...
- 4.13** $\frac{4}{3} \cdot a^3$
- 4.14** Nullstellen: $\{-a, 0, a\}$
 Monotonieverhalten: $]-\infty; -\frac{a}{\sqrt{3}}[\nearrow]-\frac{a}{\sqrt{3}}; \frac{a}{\sqrt{3}}[\searrow]\frac{a}{\sqrt{3}}; \infty[\nearrow$
 Krümmungsverhalten: $]-\infty; 0[\curvearrowright]0; \infty[\curvearrowleft$
 Flächeninhalt: $\frac{1}{4} \cdot a^4$
- 4.15** Nullstellen: $\{-2, -1\}$
 Monotonieverhalten: $]-\infty; -\frac{\ln(3)}{\ln(2)}[\searrow]-\frac{\ln(3)}{\ln(2)}; \infty[\nearrow$
 Krümmungsverhalten: $]-\infty; 1 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)}[\curvearrowleft]1 - \frac{\ln(3)}{\ln(2)}; \infty[\curvearrowright$
 Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 8 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$
 Flächeninhalt: $8 - \frac{6}{\ln(2)}$
- 4.16** Nullstellen: $\{e, e^2\}$
 Monotonieverhalten: $]-\infty; e^{\frac{3}{2}}[\searrow]e^{\frac{3}{2}}; \infty[\nearrow$
 Krümmungsverhalten: $]-\infty; e^{\frac{5}{2}}[\curvearrowleft]e^{\frac{5}{2}}; \infty[\curvearrowright$
 Asymptotisches Verhalten: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$
 Flächeninhalt: $e^2 - 3 \cdot e$
- 4.17** $f(x) = -x^4 + 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x$
- 4.18** $f(x) = 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 6$
- 4.19** $f(x) = 6 \cdot (x+1) \cdot (x-1)^2 = 6 \cdot x^3 - 6 \cdot x^2 - 6 \cdot x + 6$
- 4.20 a)** $f(x) = x^3 + 3 \cdot x^2 - 4$ **b)** 6,75
- 4.21** $f(x) = \frac{1}{9} \cdot x^3 - \frac{2}{3} \cdot x^2 + x$ Flächeninhalt: 12
- 4.22 a)** $\frac{39}{32}$ **b)** $\frac{7}{4}$ **c)** $\frac{e^2-1}{8} + 1$ **d)** $\frac{3}{2}$