AUFGABENSAMMLUNG
DENKSPORT FÜR DIE UNTERSTUFE

Die Aufgaben in dieser Sammlung sind zwei Erfahrungsstufen zugeordnet:

Stufe I: Diese Aufgaben sind besonders gut zum Einstieg geeignet.
Alle Aufgaben dieser Stufe setzen nur mathematische Inhalte bis zur 6. Schulstufe voraus.

Stufe II: Diese Aufgaben sind insbesondere für erfahrenere Schüler*innen der Unterstufe gedacht.
Viele Aufgaben dieser Stufe setzen auch mathematische Inhalte der 7. und 8. Schulstufe voraus.

Die Aufgaben sind innerhalb einer Stufe nicht nach Schwierigkeit sortiert.

Mit nebenstehendem QR-Code kann die Aufgabensammlung als PDF heruntergeladen werden.
Auf Anfrage stellen wir Lehrpersonen ein PDF mit Lösungen zur Verfügung.

Inhaltsverzeichnis

Datum: 20. September 2023

1. Geometrie

Stufe I

1.1

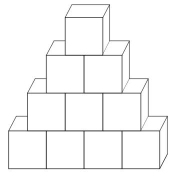
Ein quaderförmiger Turm besteht aus fünf Würfeln. Der Turm hat eine Oberfläche von $198\,\text{cm}^2$.

a) Wie hoch ist der Turm?

b) Durch eine Erschütterung fällt ein Würfel vom Turm herunter. Es bleibt ein quaderförmiger Turm aus vier Würfeln übrig und daneben ein einzelner Würfel. Wie groß ist die Oberfläche dieses kleineren Turms aus vier Würfeln und wie groß ist die Oberfläche des einzelnen Würfels?

1.2

Sascha baut mit dem gesamten Vorrat an würfelförmigen Bausteinen einen Turm.
In der ersten Ebene des Turms reiht er einige Würfel aneinander. In der zweiten Ebene verwendet er einen Würfel weniger, in der dritten wieder einen weniger usw.
Ein Turm heißt „vollständig“, wenn die oberste Ebene aus nur einem Baustein besteht.
Die Figur zeigt einen vollständigen Turm, der aus 10 Bausteinen besteht.



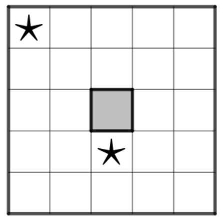
Die oberste Ebene eines (nicht vollständigen) Turmes besteht aus 8, die unterste aus 16 Bausteinen.

a) Sascha möchte aus den Bausteinen einen möglichst großen vollständigen Turm bauen.
Wie viele Bausteine bleiben dabei übrig?

b) Sascha baut nun einen vollständigen Turm, der aus 12 Ebenen besteht und klebt die Würfelflächen, die einander berühren, zusammen. Dann möchte er seinen Turm anstreichen. Für einen einzelnen Würfel benötigt man 1 ml Farbe. Wie viel ml Farbe benötigt Sascha um den Turm anzustreichen, wenn die Unterseite des Turmes nicht angestrichen werden soll?

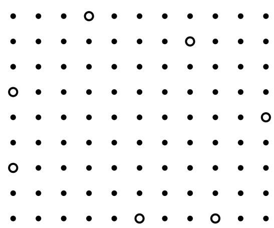
1.3

Ein quadratisches Stück Papier besteht aus 5×5 kleinen Quadraten.
Wie im Bild zu sehen ist, fehlt das mittlere Quadrat. Das Stück Papier soll längs der Rasterlinien in vier deckungsgleiche Stücke zerschnitten werden.
Dabei sollen die beiden mit einem Stern markierten kleinen Quadrate zum gleichen Stück gehören. Wie muss das Blatt geschnitten werden? Zeichne die vier deckungsgleichen Stücke mit verschiedenen Farben ein.



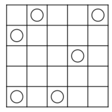
1.4

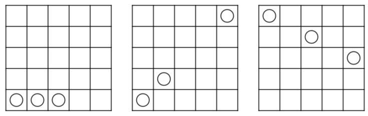
Auf einem Brett sind Punkte in einem cm-Raster markiert.
In den sieben großen Punkten werden Nägel eingeschlagen und um diese Nägel wird von außen eine Schnur gespannt.
Wie groß ist die von der Schnur begrenzte Fläche?



1.5

In die Felder eines $n \times m$-Bretts sollen Figuren so gelegt werden, dass keine drei davon auf einer geraden Linie liegen.

– So dürfen also z.B. 6 Figuren auf ein 5×5-Brett so gelegt werden: 

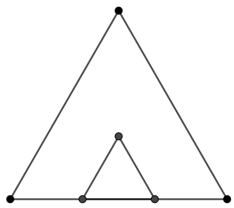
– Aber z.B. 3 Figuren dürfen nicht so gelegt werden: 

Wie viele Figuren kann man unter dieser Voraussetzung höchstens auf ein $n \times m$-Brett legen?

a) 3×3 **b)** 3×4 **c)** 4×4

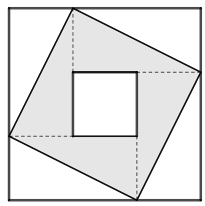
1.6

Gegeben ist ein großes gleichseitiges Dreieck.
In dieses Dreieck wird, wie in der Abbildung zu sehen, ein kleines gleichseitiges Dreieck mit dem Flächeninhalt $4\,\text{cm}^2$ gezeichnet. Die unteren Eckpunkte des kleinen Dreiecks teilen die untere Seite des großen Dreiecks in drei gleich lange Teile. Wie groß ist der Flächeninhalt des großen Dreiecks?



1.7

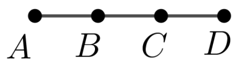
Das große und das kleine Quadrat haben die Flächeninhalte $36\,\text{cm}^2$ und $4\,\text{cm}^2$.
Wie groß ist der Flächeninhalt des grauen Vierecks?



1.8

Ein Stab AD wird durch die Punkte B und C in vier gleichlange Strecken geteilt.

Der Stab wird drei Mal hintereinander um jeweils 180° gedreht, und zwar zuerst um den Punkt B, dann um den Punkt A, und schließlich wieder um den Punkt B.



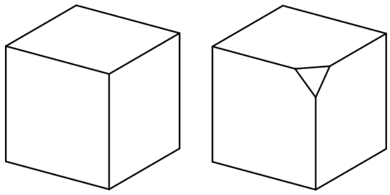
a) Nach diesen Drehungen liegt ein Punkt an derselben Stelle wie zu Beginn. Um welchen Punkt handelt es sich?

b) Welcher Punkt ist nach diesen Drehungen am weitesten von seiner Ausgangsstelle entfernt?

1.9 MmF

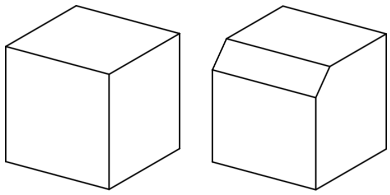
Wir zählen Eckpunkte.

a) Im linken Bild sehen wir einen Würfel, und im rechten Bild sehen wir, was vom Würfel übrig bleibt, wenn ein kleines Stück an einem Eckpunkt abgeschnitten wird. Es entsteht dabei als Schnittfläche ein kleines Dreieck.



Stellen wir uns vor, wir würden an jedem Eck des Würfels ein solches Stück abschneiden.
Wie viele Eckpunkte hätte dann das Objekt, das nach Entfernung der kleinen Abschnitte übrigbleibt?

b) Im linken Bild sehen wir einen Würfel, und im rechten Bild sehen wir, was von Würfel übrig bleibt, wenn ein kleiner Streifen längs einer Kante abgeschnitten wird.



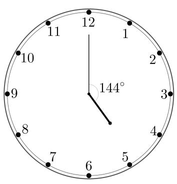
Stellen wir uns vor, wir würden an jeder Kante des Würfels ein solches Stück abschneiden.
Wie viele Eckpunkte hätte dann das Objekt, das nach Entfernung der kleinen Abschnitte übrigbleibt?

Stufe II

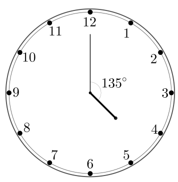
1.10 MmF

Der Minutenzeiger einer Uhr ist vom Ziffernblatt heruntergefallen. Der Stundenzeiger zeigt aber die richtige Zeit an. Der Winkel, den der Stundenzeiger mit der Senkrechten einschließt, ist angegeben.

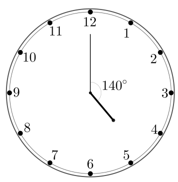
a) Wie spät ist es?



b) Wie spät ist es?



c) Wie spät ist es?



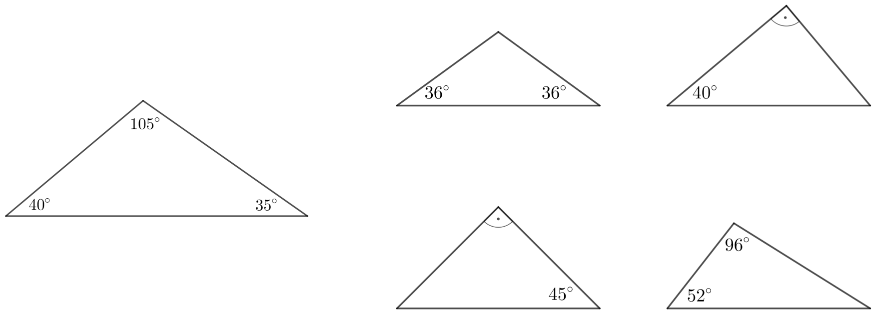
d) Ermittle einen Zeitpunkt, an dem die beiden Zeiger einen Winkel von 60° bzw. 90° bzw. 180° einschließen.

e) Ermittle einen Zeitpunkt, an dem die beiden Zeiger einen Winkel von 45° bzw. 135° einschließen.

f) Die beiden Zeiger schließen zu einem bestimmten Zeitpunkt einen (orientierten) Winkel α ein. Wie viele Minuten vergehen, bis die beiden Zeiger zum nächsten Mal denselben (orientierten) Winkel α einschließen?

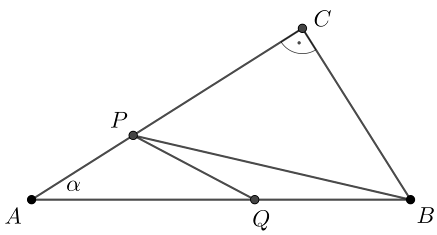
1.11

Kann man die dargestellten Dreiecke jeweils mit einer einzigen Strecke in zwei gleichschenkelige Dreiecke teilen? Falls ja, zeichne jeweils eine solche Strecke ein und gib alle fehlenden Innenwinkel an. Falls nein, begründe warum.



1.12

Das dargestellte rechtwinkelige Dreieck ABC wird durch die eingezeichneten Strecken PQ und PB in drei gleichschenkelige Dreiecke mit $AP = PQ = QB$ und $CB = CP$ zerlegt:



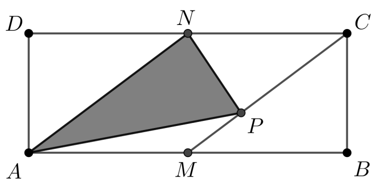
Berechne den Winkel α.

1.13

Ein Quadrat kann durch Strecken in n gleichschenkelige Dreiecke geteilt werden.
Ermittle alle möglichen Werte von n.

1.14

Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit $AB = 8\,\text{cm}$ und $BC = 3\,\text{cm}$.



Die Punkte M bzw. N halbieren die langen Seiten AB bzw. CD.
Der Punkt P teilt die Strecke MC im Verhältnis $1 : 2$.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ANP.

1.15

Wir zerteilen Dreiecke und Vierecke in gleichschenkelige Dreiecke.

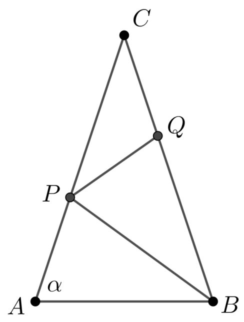
a) Zeige, dass man jedes rechtwinkelige Dreieck ABC stets durch eine einzige Strecke in zwei gleichschenkelige Dreiecke teilen kann.

b) Zeige, dass man jedes spitzwinkelige Dreieck ABC stets durch Strecken in drei gleichschenkelige Dreiecke teilen kann.

c) Im Viereck $ABCD$ kennt man die vier Innenwinkel $\angle CBA = 80°$, $\angle DCB = 90°$, $\angle ADC = 100°$ und $\angle BAD = 90°$. Zeige, dass man das Viereck durch geeignete Strecken in vier gleichschenkelige Dreiecke zerteilen kann.

1.16

Das dargestellte gleichschenkelige Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ wird durch die eingezeichneten Strecken PQ und PB in drei gleichschenkelige Dreiecke mit $\overline{AB} = \overline{BP} = \overline{BQ}$ und $\overline{QP} = \overline{QC}$ zerlegt.



Berechne den Winkel α.

1.17

Der gallische Mathematiker Geometrix beschäftigte sich mit speziellen Vierecken $ABCD$. Sein Lieblingsviereck hat eine waagrechte Diagonale AC. Der Eckpunkt B liegt unterhalb von AC, der Eckpunkt D oberhalb. Die Seiten a und b sind gleich lang. Die Winkel β und δ sind beide $90°$. Geometrix vermutete, dass das arithmetische Mittel der Seiten c und d gleich der Wurzel aus dem Flächeninhalt F des Vierecks $ABCD$ ist. Ist diese Vermutung zutreffend?

1.18

Bei einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD ist die Seite AB doppelt so lang wie die Seite CD. Der Schnittpunkt der Diagonalen ist S.

a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke ABS und CDS.

b) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der Dreiecke BCS und ADS.

c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABS, wenn das Trapez $ABCD$ einen Flächeninhalt von $9\,\text{m}^2$ hat.

2. Zahlentheorie

Stufe I

2.1

Wir bezeichnen eine Zahl, in der die Ziffern von links nach rechts immer größer werden, als *wachsend*. Beispiele für wachsende Zahlen sind 12, 349 und 2358.
Ermittle die größte und kleinste wachsende vierziffrige Zahl, die jeweils durch 6 teilbar ist.

2.2

Leo und Maxi bekommen Taschengeld.

a) Ein ganzes Monat lang bekommen Leo und Maxi täglich jeweils eine Münze. Vor Beginn des Monats hat Maxi bereits 36 Münzen angespart, Leo hat keine Münze.
An wie vielen Tagen ist die Anzahl von Leos Münzen ein Teiler der Anzahl von Maxis Münzen?

b) Zu einem anderen Zeitpunkt bekommt Leo ein Monat lang täglich eine Münze und Maxi täglich zwei Münzen. Vor Beginn des Monats hat Leo 36 Münzen angespart, Maxi besitzt keine Münze.
An wie vielen Tagen ist die Anzahl von Maxis Münzen ein Teiler von der Anzahl von Leos Münzen?

2.3

Toni kauft für ein großes Fest 55 Kisten mit Feinschmeckerpralinen. Um den Einkauf mit der Organisation abzurechnen, muss der Preis pro Kiste angegeben werden. Leider sind auf der Rechnung sowohl die erste als auch die letzte Ziffer unleserlich, der Betrag ist € $*33,9*$. (Die unleserlichen Ziffern sind mit einem „$*$“ markiert.)
Toni weiß, dass eine Kiste mehr als € 15 gekostet hat, aber leider nicht mehr den genauen Betrag. Wie teuer war eine Kiste Feinschmeckerpralinen?

2.4

Es gilt für eine Zahl n:

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n = 1\,252\,332\,576$$

Wie groß ist n?

2.5

Finn hat alle natürlichen Zahlen von 1 bis 20 miteinander multipliziert, also

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$$

ausgerechnet. Die letzten vier Ziffern im Ergebnis dieser Rechnung waren dann besonders auffällig.
Berechne die Summe der letzten vier Ziffern ohne die Multiplikationen von Finn nachzurechnen.

2.6

Begründe, dass $2^{101} + 101^2$ nicht das Quadrat einer natürlichen Zahl sein kann.

2.7 MmF

Mit vier verschiedenen Primzahlen a, b, c und d werden die Zahlen x und y gebildet:

$$x = a \cdot b \cdot c \quad \text{und} \quad y = b \cdot c \cdot d$$

Das Produkt $x \cdot y$ ist durch 100 und durch 102 teilbar.

a) Ermittle den größten gemeinsamen Teiler von x und y.

b) Ermittle das kleinste gemeinsame Vielfache von x und y.

Stufe II

2.8 MmF

Aus den Ziffern 2, 3, 4, 5 und 6 werden Zahlen gebildet, wobei jede Ziffer in jeder Zahl genau einmal verwendet werden soll. Ermittle alle derartigen Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die erste Ziffer (von links) ist durch 1 teilbar, die ersten 2 Ziffern bilden eine durch 2 teilbare Zahl, die ersten 3 Ziffern bilden eine durch 3 teilbare Zahl, die ersten 4 Ziffern bilden eine durch 4 teilbare Zahl, und alle 5 Ziffern bilden eine durch 5 teilbare Zahl.

2.9 MmF

Wir verwenden bei dieser Aufgabe Variablen als Ziffern.
So bedeutet etwa der Ausdruck $\overline{aaba}$ für $a = 3$ und $b = 7$ die Zahl 3373.
Ermittle von Null verschiedene Ziffern a und b so, dass die Zahl $\overline{ba}$ ein Teiler der Zahl $\overline{aba}$ ist.

2.10 MmF

Ermittle die kleinste natürliche Zahl, die man mit der Zahl 121 multiplizieren kann, um ein Ergebnis mit den letzten vier Ziffern 1234 zu erhalten.

2.11 MmF

a) Die natürliche Zahl A hat nur die Ziffern 2, 0, 1 und 9, wobei jede Ziffer genau 2019-mal vorkommt. Wenn wir statt der Zahl A ihre Ziffernsumme anschreiben, dann statt dieser neuen Zahl wieder ihre Ziffernsumme anschreiben usw., so erhalten wir schließlich eine einstellige Zahl. Ermittle diese Zahl.

b) Welche Eigenschaft der Zahl A führt dazu, dass wir genau diese einstellige Zahl als Ergebnis erhalten haben?
Hinweis: Denke an eine bestimmte Teilbarkeitsregel.

c) Erfinde eine ähnliche Aufgabe, die zur selben Lösungszahl führt.

2.12 MmF

Wir sagen, dass drei paarweise verschiedene positive ganze Zahlen einen *Klub* bilden, wenn jede der drei Zahlen die Summe der übrigen beiden Zahlen teilt. So bilden beispielsweise die Zahlen 2, 4 und 6 einen Klub, weil $2 \mid (4+6)$, $4 \mid (2+6)$ und $6 \mid (2+4)$ gilt.

a) Ermittle alle Zahlen, die mit 10 und 20 einen Klub bilden.

b) Ermittle alle Zahlen, die mit 8 und 12 einen Klub bilden und begründe, warum es keine weiteren geben kann.

c) Begründe, warum es keine Zahl geben kann, die mit 16 und 20 einen Klub bildet.

d) Begründe, warum es unendlich viele Zahlenklubs gibt.

2.13

Untersuche, ob es positive ganze Zahlen x, y, z gibt, die jede der folgenden Eigenschaften haben:

i) $x \cdot y$ ist ungerade. **ii)** $x \cdot z$ ist gerade. **iii)** $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ist eine natürliche Zahl.

2.14

Im fernen Mathematistan verwendet man die Währung *Mathestan* (mit dem Symbol M̵). Ein M̵ besteht aus unerfindlichen Gründen aus 90 *Nents* (mit dem Symbol n̵). Es gilt also 1 M̵ = 90 n̵. Aus traditionellen Gründen gibt es Münzen im Nennwert von 3 n̵, 6 n̵, 10 n̵, 25 n̵, 45 n̵ und 1 M̵.
Einige Beträge kann man (ohne Wechselgeld) gar nicht bezahlen, wie z.B. 2 n̵ oder 11 n̵. Einige kann man nur auf eine Art bezahlen, wie z.B. 10 n̵. Andere wiederum kann man auf mehrere Arten bezahlen, wie z.B. 18 n̵ (mit drei 6 n̵ Münzen oder mit sechs 3 n̵ Münzen).

a) Ermittle den größten Betrag, den man nicht mit Münzen (ohne Wechselgeld) bezahlen kann.

b) Ermittle den größten Betrag, den man auf genau eine Art bezahlen kann.

2.15

Wir suchen natürliche Zahlen,

a) die bei Division durch 2 den Rest 1 lassen und bei Division durch 3 den Rest 2.

  i) Ermittle zwei derartige Zahlen.

  ii) Gib eine Formel zur Berechnung unendlich vieler derartiger Zahlen an.

b) die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen und bei Division durch 8 den Rest 6. Begründe, warum es keine derartige Zahl geben kann.

c) die bei Division durch 4 den Rest 3 lassen und bei Division durch 8 den Rest 5. Gibt es derartige Zahlen? Wenn ja, ermittle die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wenn nein, begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.

d) die bei Division durch 6 den Rest 4 lassen und bei Division durch 9 den Rest 5. Gibt es derartige Zahlen? Wenn ja, ermittle die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wenn nein, begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.

Ermittle für die nun folgenden Teilaufgaben **e)** – **h)** jeweils

i) die kleinste Zahl mit der gesuchten Eigenschaft und

ii) eine Formel zur Berechnung aller derartiger Zahlen.

Gesucht sind natürliche Zahlen,

e) die bei Division durch 3 den Rest 2 lassen, bei Division durch 5 den Rest 3 und bei Division durch 7 den Rest 5.

f) die sowohl bei Division durch 3 als auch durch 7 den Rest 2 lassen, bei Division durch 5 aber den Rest 4.

g) die bei Division durch 3 den Rest 1, bei Division durch 5 den Rest 3 und bei Division durch 7 den Rest 5 lassen.

h) die bei Division durch 8 den Rest 7 lassen, bei Division durch 10 den Rest 1 und bei Division durch 12 wieder den Rest 7.

2.16 MmF

Die *Happyfunktion* h wird für positive ganze Zahlen n folgendermaßen definiert. Der Wert von $h(n)$ ist die Summe der Quadrate der Ziffern von n. Beispiele dafür sind

$$h(21) = 2^2 + 1^2 = 5, \quad h(503) = 5^2 + 0^2 + 3^2 = 34 \quad \text{und} \quad h(1000) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1.$$

Man kann die Happyfunktion auf eine Zahl mehrmals hintereinander anwenden und bekommt so eine Folge von Zahlen. Ein Beispiel dafür ist

$$26 \mapsto h(26) = 2^2 + 6^2 = 40 \mapsto h(40) = 4^2 + 0^2 = 16 \mapsto h(16) = 1^2 + 6^2 = 37, \quad \text{usw.}$$

Führt eine derartige Folge irgendwann zur Zahl 1 (so wie z.B. für die Zahl 1000), so ändert sich der Wert nie mehr, da $h(1) = 1^2 = 1$ gilt. Man bezeichnet eine Zahl, die irgendwann bei wiederholter Anwendung der Happyfunktion zur Zahl 1 führt, als „*Happy Number*“.

a) Es gibt neben der Zahl 1 noch eine einziffrige Zahl, die eine Happy Number ist. Ermittle diese Zahl.

b) Es gibt neben der Zahl 1 noch eine einziffrige Zahl w mit der Eigenschaft, dass mehrmalige Anwendung der Happyfunktion wieder zurück zur Zahl w führt. Ermittle diese Zahl w.

c) Wegen $h(13) = 1^2 + 3^2 = 10 \mapsto h(10) = 1$ ist 13 eine Happy Number. Gib eine Möglichkeit an, wie du ohne Rechenaufwand beliebig viele weitere Happy Numbers angeben kannst.

d) Es gibt genau eine zweiziffrige Happy Number, deren Ziffern gleich sind. Ermittle diese Zahl.

e) Es gibt genau eine dreiziffrige Happy Number, deren Ziffern alle gleich sind. Ermittle diese Zahl.

f) Ermittle die kleinste Primzahl p_k, für die auch $h(p_k)$ eine Primzahl ist. Ermittle auch die kleinste Primzahl p_u, für die $h(p_u)$ eine ungerade Primzahl ist.

3. Rechnen

Stufe I

3.1 MmF

Von drei positiven Zahlen a, b und c kennt man die folgenden Produkte:

$$a \cdot b = 15 \qquad b \cdot c = 18 \qquad c \cdot a = 30$$

Berechne die Summe $a + b + c$ der drei Zahlen.

3.2 MmF

Von den folgenden sechs Rechnungen ist genau eine richtig.

$$22^2 + 11^2 = 2211 \qquad 44^2 + 55^2 = 4455 \qquad 77^2 + 11^2 = 7711$$

$$88^2 + 33^2 = 8833 \qquad 99^2 + 22^2 = 9922 \qquad 66^2 + 44^2 = 6644$$

Wenn man weiß, dass genau eine Rechnung richtig ist, kann man durch Kopfrechnen die richtige Rechnung herausfinden. Welche Rechnung ist die richtige?

3.3 MmF

Zu einer natürlichen Zahl addieren wir zunächst die Zahl 12 und multiplizieren das Ergebnis mit der Zahl 4. Anschließend subtrahieren wir hiervon die Zahl 5 und dividieren das Ergebnis durch die Zahl 7. Wir erhalten als ganzzahligen Quotienten die Zahl 22 und den Rest 1.

a) Ermittle die erdachte Zahl.

b) Welches Ergebnis erhältst du, wenn du die beiden Ziffern der Zahl vertauscht und dieselbe Rechenvorschrift durchführst?

3.4 MmF

Bei der Multiplikation

$$3\square\square \cdot 4\square = 1\square\,83\square$$

einer dreistelligen mit einer zweistelligen Zahl erhält man ein fünfstelliges Ergebnis. In jedem Kästchen steht dieselbe Ziffer. Um welche Ziffer handelt es sich?

3.5 MmF

In der 1a und der 1b der Eulerschule gibt es gleich viele Kinder. In der 1a spielt ein Viertel das neue Spiel *Viertnacht*. In der 1b sind es doppelt so viele. Insgesamt 30 Kinder in den beiden Klassen spielen das Spiel nicht. Wie viele Kinder sind in jeder Klasse?

3.6 MmF

Addiert man 6 zu einer Zahl, erhält man dasselbe Ergebnis, wie wenn man dieselbe Zahl mit 6 multipliziert. Um welche Zahl handelt es sich?

3.7

Dana hat neun 2-Euro Münzen und Dima hat vier 5-Euro Scheine.
Wie viele Münzen muss Dana Dima geben und wie viele Scheine muss Dima Dana geben, damit sie beide gleich viel Geld haben? Gib dafür alle Möglichkeiten an.

3.8

Das Durchschnittsalter der elf Spielerinnen, die gerade am Feld für den Sportverein Euler gegen den Sportklub Fermat spielen, beträgt genau 22 Jahre. Ihr größter Star, Antonia Gauss, muss wegen einer Verletzung gegen ihre Rivalin Jojo Bernoulli ausgetauscht werden. Plötzlich steigt das Durchschnittsalter der aktiven Spielerinnen des Teams auf 23 Jahre.
Um wie viele Jahre ist Jojo älter als Antonia?

3.9

In der Entbindungsstation war heute viel los. Es sind gleich 5 Babys zur Welt gekommen. Davon haben zwei eine Masse von je 3 kg, zwei eine Masse von je 3,5 kg, und eines eine Masse, die um 1 kg größer als die Durchschnittsmasse von allen fünf ist.
Welche Masse hat das fünfte Baby?

3.10

Ein leeres Schwimmbecken wird bei voll aufgedrehtem Zufluss in 8 Stunden komplett gefüllt. Wird der Abfluss vollständig geöffnet, dauert es 12 Stunden, bis das volle Becken vollkommen entleert wird. Irrtümlich lässt der Badewärter beim leeren Becken Zufluss und Abfluss beide ganz offen. Wie lange dauert es, bis das Becken voll ist?

3.11

Wir dividieren zweistellige Zahlen durch ihre Ziffernsumme, zum Beispiel: $43 : 7 = 6$ mit 1 Rest

a) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit Zehnerziffer 5 durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als Quotienten 4 mit 6 Rest. Ermittle die Einerziffer der Zahl.

b) Dividiert man eine zweistellige Zahl durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als Quotienten 3 mit 2 Rest. Ermittle die zweistellige Zahl.

c) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit Einerstelle 3 durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als Quotienten 5 und einen unbekannten Rest. Ermittle die Zehnerziffer der Zahl und den Rest.

d) Dividiert man eine zweistellige Zahl durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als Quotienten 9 und einen Rest, der nicht Null ist. Ermittle die zweistellige Zahl.

e) Die Zehnerziffer einer zweiziffrigen Zahl stimme mit der Einerziffer überein. Zeige, dass dann der Quotient bei Division der Zahl durch ihre Ziffernsumme stets 5 ist. Was fällt dir beim Rest auf?

f) Der Quotient bei der Division einer zweistelligen Zahl durch ihre Ziffernsumme sei 8, der Rest unbekannt. Ermittle alle möglichen Zahlen.

g) Der Quotient bei der Division einer zweistelligen Zahl durch ihre Ziffernsumme sei gleich groß wie die Zehnerziffer, der Rest sei gleich groß wie die Einerziffer. Ermittle alle möglichen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

h) Der Quotient bei der Division einer zweistelligen Zahl durch ihre Ziffernsumme sei gleich groß wie die Einerziffer, der Rest sei gleich groß wie die Zehnerziffer. Ermittle alle möglichen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Stufe II

3.12

Eine *Sterndl-Null-Aufgabe* ist eine unvollständig gegebene Rechnung mit natürlichen Zahlen. Alle Stellen mit der Ziffer 0 sind bekannt. Alle Sterne $\star$ müssen durch dieselbe Ziffer (aber nicht 0) ersetzt werden. Alle Kästchen $\square$ müssen durch gleiche oder verschiedene Ziffern ersetzt werden (aber nicht 0 und nicht $\star$). Zum Beispiel erhalten wir als Lösung der Aufgabe $\star\star\star \cdot \star 0 = \star\star\star 0$ die Rechnung $111 \cdot 10 = 1110$.
Welche Rechnung verbirgt sich jeweils im folgenden Ausdruck?

a) $\square\star \cdot \square = \star 0$

b) $\square\star\star + \square\star = \square 0 \star 0$

c) $\square \cdot \star\square = \star 0 0$

d) $\star 0 \star 0 : \square\star = \square 0 \square$

e) $\star\star 0 - \star\star = \square\square$

f) $\star 0 + \star\star + \square 0 = \star\star\star$

g) $\star + \star\square + \star\square\square + \square\square\square\star = \star 0 \square \star 0$

3.13

Eine frische Zitrone besteht zu 98 % aus Wasser. In 100 g Zitrone sind also 98 g Wasser enthalten. Nachdem sie einige Zeit in der Sonne liegt, trocknet sie aus, und besteht nur mehr zu 97 % aus Wasser, die Masse der anderen Bestandteile verändert sich nicht. Um wie viel Prozent wiegt die frische Zitrone mehr als die ausgetrocknete?
(*Hinweis*: Versuche zuerst, das Ergebnis zu erraten. Die meisten Leute verschätzen sich bei derartigen Aufgaben gewaltig.)

3.14

Bei folgender Multiplikation sind die meisten Ziffern nicht mehr erkennbar. Die Sterne stehen als Platzhalter für beliebige Ziffern, die gleich oder verschieden sein dürfen.

$$\begin{array}{ccccccc}
3 & * & * & \cdot & * & * & 3 \\
\hline
* & 1 & * & & & & \\
* & 1 & * & * & & & \\
 & * & * & * & 8 & & \\
\hline
* & * & * & * & * & &
\end{array}$$

a) Stelle die Rechnung wieder her.

b) Gibt es dafür mehrere Lösungen?

3.15

Gegeben sind zwei positive Zahlen x und y, deren Summe gleich ihrem Produkt ist.

a) Gib drei zutreffende Wertepaare für x und y an.

b) Beschreibe eine Eigenschaft der Kehrwerte von x und y.

c) Beweise, dass das Produkt $x \cdot y$ nicht kleiner als 4 sein kann.

3.16

Ein *Kryptogramm* ist eine Rechnung, in der die Ziffern durch Buchstaben oder sonstige Platzhalter ersetzt worden sind. Gleiche Buchstaben stehen immer für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben stehen immer für verschiedene Ziffern. Die erste Ziffer einer mehrziffrigen Zahl darf niemals 0 sein.

a) Ermittle die Ziffern, die folgendes Kryptogramm zu einer richtigen Rechnung machen:

$$\begin{array}{rcccc} & & & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ + & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\ \hline & \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{E} & \mathrm{E} \end{array}$$

b) Ermittle alle Möglichkeiten für Ziffern, die folgendes Kryptogramm zu einer richtigen Rechnung machen, wenn bekannt ist, dass $H + 1 = C$ gilt, A größer als B ist und G ungerade ist:

$$\begin{array}{rcccc} & & & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ + & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} & \mathrm{H} \end{array}$$

c) In folgendem Kryptrogramm stehen die Sterne als Platzhalter für beliebige Ziffern, die gleich oder verschieden sein dürfen. Ermittle alle Möglichkeiten für Ziffern, die das Kryptogramm zu einer richtigen Rechnung machen.

$$\begin{array}{rcccc} & & & \star & \star \\ + & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \star & \star \\ \hline & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{B} & \mathrm{A} \end{array}$$

d) Im folgenden Kryptrogramm kommt jede Ziffer von 0 bis 9 genau einmal vor. Die Position der Ziffer 2 in der Rechnung ist vorgegeben. Welche Ziffer kommt an die Stelle, die mit dem X gekennzeichnet ist?

$$\begin{array}{rcccc} & & & 2 & ? \\ + & ? & ? & ? & ? \\ \hline & \mathrm{X} & ? & ? & ? \end{array}$$

3.17

Die erste Seite eines Buches ist mit der Ziffer 1 beschriftet, danach ist jede Seite mit der nächstgrößeren ganzen Zahl beschriftet. Die Ziffer 5 wird dabei genau 76 mal verwendet, keine der übrigen Ziffern wird genau 76 mal verwendet.
Wie viele Ziffern werden insgesamt zur Beschriftung aller Seitenzahlen verwendet?

3.18

In der Region Heustetten haben sich die Landwirte zu einer Gemeinschaft zusammengeschlossen. Gemeinsam stehen ihnen dadurch mehrere Mähdrescher zur Ernte zur Verfügung.

a) In den letzten beiden Jahren standen dem Martinshof die Mähdrescher B und D zur Verfügung. Vor zwei Jahren fiel die Maschine B wegen einer Wartung kurz aus, und die gesamte Ernte gelang, indem Maschine B insgesamt 6 Tage eingesetzt wurde und Maschine D insgesamt 8 Tage. Im Vorjahr war es umgekehrt. Maschine D musste kurz gewartet werden, und die gesamte Ernte gelang, indem Maschine B insgesamt 7 Tage eingesetzt wurde und Maschine D insgesamt 6 Tage. In diesem Jahr stehen wieder dieselben Geräte zur Verfügung, aber beide sind frisch gewartet und man erwartet keinen Ausfall in der Erntezeit.
Wie viele Tage werden beide Maschinen gemeinsam für die Ernte voraussichtlich benötigen?

b) Innerhalb der nächsten zwei Tage soll die Ernte am Hubertushof eingebracht werden. Am ersten Tag stehen die Maschinen A und B zur Verfügung, und man weiß aus Erfahrung, dass man den ganzen Hubertushof mit

der Maschine A allein in genau 4 Tagen bewältigen kann, oder aber mit der leistungschwächeren Maschine B allein in 12 Tagen. Glücklicherweise steht am zweiten Tag auch die Maschine C zur Verfügung, und man schafft es gerade am Ende des zweiten Tages unter Einsatz aller drei Maschinen fertig zu werden.
Wie viele Tage würde die Maschine C allein benötigen, um die Ernte am Hubertushof einzubringen?

c) Heute soll die Ernte am Heidihof eingebracht werden. Dazu stehen die drei Maschinen A, D und E den ganzen Tag zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass es sich mit diesen drei Maschinen zusammen genau mit einem ganztägigen Einsatz ausgehen wird, alles zu erledigen. Man weiß auch, dass jede der drei Maschinen alleine die gesamte Ernte in einer ganzen Zahl von Tagen einbringen könnte (also zum Beispiel in genau 3 Tagen oder in genau 8 Tagen). Die Maschinen sind aber verschieden leistungsfähig. Maschine A leistet unter ihnen am meisten und D am wenigsten.
Wie viele Tage würde jede der drei Maschinen jeweils alleine benötigen, um die gesamte Ernte am Heidihof einzubringen?

d) Heute soll die Ernte am Mitzihof eingebracht werden. Dazu stehen die vier Maschinen A, B, C und D den ganzen Tag zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass es sich mit diesen vier Maschinen zusammen genau mit einem ganztägigen Einsatz ausgehen wird, alles zu erledigen. Man weiß auch, dass jede der vier Maschinen alleine die gesamte Ernte in einer ganzen Zahl von Tagen einbringen könnte (also zum Beispiel in genau 3 Tagen oder in genau 8 Tagen). Die Maschinen sind aber jeweils verschieden leistungsfähig. Maschine A würde die ganze Ernte allein in genau 10 Tagen schaffen. Maschine B leistet unter allen Maschinen am meisten und D am wenigsten.
Wie viele Tage würde jede der drei Maschinen B, C und D jeweils alleine benötigen, um die gesamte Ernte am Mitzihof einzubringen?

e) In der Zentrale wird gerade die Einteilung der Geräte für die nächste Woche geplant. Die Chefin diskutiert gerade mit dem Fuhrparkleiter über den Einsatz der Geräte am Grubhof. Sie haben zwar schriftliche Unterlagen aus den letzten Jahren, aber diese sind etwas verwirrend. Sie wissen, dass im Vorjahr Maschine A einen ganzen Tag eingesetzt war, Maschine B zwei volle Tage und Maschine C drei volle Tage. Damit war die ganze Arbeit erledigt. Unter diesen drei Maschinen ist A die leistungsfähigste und C diejenige, die am wenigsten an einem Tag leisten kann. Sie können sich beide daran erinnern, dass jede der drei Maschinen alleine die gesamte Ernte am Grubhof in einer ganzen Zahl von Tagen einbringen könnte (also zum Beispiel in genau 3 Tagen oder in genau 8 Tagen).
Nun meint der Fuhrparkleiter, dass man aus dieser Information wohl eindeutig ableiten können müsste, wie viele Tage jeder der Maschinen jeweils bei einem Soloeinsatz für die ganze Grubhofernte benötigen würde. Die Chefin glaubt nicht, dass das stimmt. Wer von beiden hat recht?

3.19 MmF

Zwei benachbarte Geschäfte verkaufen den gleichen Artikel zum selben Preis.

a) Das Geschäft A erhöht den Preis eines Tages um $x\,\%$. Das Geschäft B sieht nun eine Chance, und bietet den gleichen Artikel um $\frac{x}{2}\,\%$ verbilligt an. Um konkurrenzfähig zu bleiben, senkt Geschäft A den erhöhten Preis wieder um $x\,\%$, und nach all diesen Preisänderungen sind die Preise in beiden Geschäften wieder gleich. Wie groß ist x?

b) Das Geschäft A erhöht den Preis eines Tages um $x\,\%$. Das Geschäft B sieht nun eine Chance, und bietet den gleichen Artikel um $\frac{x}{3}\,\%$ verbilligt an. Um konkurrenzfähig zu bleiben, senkt Geschäft A den erhöhten Preis wieder um $x\,\%$, und nach all diesen Preisänderungen sind die Preise in beiden Geschäften wieder gleich. Wie groß ist x?

c) Das Geschäft A erhöht den Preis eines Tages um $x\,\%$, während das Geschäft B die Chance wahrnimmt, um den Preis des gleichen Artikels um $\frac{x}{3}\,\%$ zu erhöhen. Um konkurrenzfähig zu bleiben, senkt Geschäft A den erhöhten Preis wieder um $x\,\%$. Das Geschäft B gleicht dann seinen Preis an den von Geschäft A an, und senkt dazu den erhöhten Preis wieder um $\frac{x}{2}\,\%$. Wie groß ist x?

3.20 MmF

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Gleichungen in x und a, die durch Prozentangaben gegeben sind.

a) Eine Zahl a ist um $x\,\%$ größer als 5 und um $x\,\%$ kleiner als 20. Ermittle die Werte von a und x.

b) Eine Zahl a ist um $x\,\%$ größer als die Hälfte von x und um $\frac{x}{2}\,\%$ kleiner als x. Ermittle die Werte von a und x.

c) Es ist bekannt, dass $x\,\%$ von x gleich a ist. Ermittle den Wert von x, wenn
i) $a = 25$ **ii)** $a = 81$ **iii)** $a = \frac{x}{2}$ **iv)** $a = \frac{x}{4}$ **v)** $a = \frac{10}{x}$
gilt.

3.21 MmF

Die schlaue Rechenmaschine Plumi-Maldi rechnet gerne lange Rechenketten.

a) Zum Aufwärmen beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet in jedem Rechenschritt abwechselnd $+2$ und -1. Nach einem Schritt kommt sie also auf 2, nach dem zweiten auf 1, nach dem dritten auf 3, nach dem vierten auf 2, nach dem fünften auf 4, und so weiter.
Mit dem wievielten Schritt kommt sie zum ersten Mal zur Zahl 15? Mit dem wievielten kommt sie zum ersten Mal zur Zahl 1500?

b) Wiederum beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet dieses Mal in jedem Rechenschritt abwechselnd $+6$ und -4. Sie möchte gerne auf diese Weise die Zahl 85 erreichen.
Überlege, ob ihr dies gelingen wird. Wenn ja, ermittle mit dem wievielten Schritt es ihr gelingt. Wenn nein, begründe, warum es ihr nicht gelingen wird.

c) Wiederum beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet in jedem Rechenschritt abwechselnd $+6$ und -3. Sie möchte gerne auf diese Art die Zahl 202 erreichen.
Nach einer längeren Rechenkette erkennt sie, dass ihr dies nicht gelingen kann und bricht ab. Warum gelingt ihr das nicht?

d) Wiederum beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet dieses Mal in jedem Rechenschritt abwechselnd $+5$ und -2. Sie möchte gerne auf diese Art aktuelle Jahreszahlen erreichen.
Welche der Jahreszahlen 2018, 2019, 2020 und 2021 wird sie irgendwann erreichen? Welche wird sie nie erreichen? Mit dem wievielten Schritt erreicht sie jeweils die Zahlen, die sie erreichen kann?

e) Nach so vielen Plus-Minus-Rechnungen versucht sie jetzt etwas Anderes. Sie beginnt mit der Zahl 1, und rechnet in jedem Rechenschritt abwechselnd $\times 10$ und $: 5$. Nach einem Schritt kommt sie also auf 10, nach dem zweiten auf 2, nach dem dritten auf 20, nach dem vierten auf 4, nach dem fünften auf 40, und so weiter.

i) Im wievielten Schritt kommt sie zum ersten Mal auf eine Zahl, die größer als 1000 ist?

ii) Wie viele der fünf Zahlen 64, 200, 256, 520 und 1280 kann sie auf diese Art erreichen? Begründe deine Antwort.

4. Weitere Denksportaufgaben

Stufe I

4.1

Die Familie Müller liebt Zwetschkenknödel. Gestern zu Mittag war es wieder so weit. Alle drei Kinder haben gleich viele Knödel gegessen, und Mama so viele wie alle Kinder zusammen. Papa hat mehr Knödel als Mama gegessen, aber weniger als die Hälfte aller Knödel. Zusammen haben sie 19 Zwetschkenknödel verspeist. Wie viele hat jeder von ihnen gegessen?

4.2

Als Jordan im Jahr 2020 Geburtstag feierte, war Jordan so alt wie die Summe der Ziffern des Geburtsjahrs.
Als Jules im Jahr 2021 Geburtstag feierte, ging es Jules genauso.
In welchen Jahren sind die beiden geboren?

4.3

Es ist bekannt, dass eine Uhr, deren Minuten- und Stundenzeiger beide stillstehen, zwei Mal am Tag die richtige Zeit angibt.

a) Wie oft gibt eine Uhr am Tag die richtige Zeit an, wenn der Minutenzeiger still steht, aber der Stundenzeiger richtig läuft?

b) Wie oft gibt eine Uhr am Tag die richtige Zeit an, wenn der Stundenzeiger still steht, aber der Minutenzeiger richtig läuft?

4.4

Eine Magierin stellt dem Publikum den folgenden Zahlentrick vor. Sie sagt: „Denken Sie sich eine positive ganze Zahl. Multiplizieren Sie die Zahl mit 3 und addieren Sie zum Ergebnis 2. Anschließend ziehen Sie die Zahl 13 ab und addieren dann wiederum die erdachte Zahl. Nennen Sie mir das Ergebnis und ich nenne Ihnen Ihre Zahl.“

a) Eine Person aus dem Publikum denkt sich die Zahl 7, eine andere die Zahl 10. Welche Zahlen erhalten sie jeweils als Ergebnis?

b) Eine andere Person denkt sich ihre Lieblingszahl und erhält 153 als Ergebnis. Wie lautet die Lieblingszahl?

c) Eine weitere Person erhält 135 als Ergebnis. Begründe, warum die Person sich verrechnet haben muss.

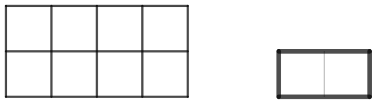
d) Kannst du beschreiben, wie die Magierin die erdachte Zahl ganz schnell ermitteln kann?

e) Eine andere Person wählt als Startzahl ihr Alter und erhält eine Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht. Wie alt ist die Person?

f) Erfinde einen ähnlichen Zaubertrick.

4.5

Auf wie viele verschiedene Arten kann man ein 2×4-Brett mit vier 1×2-Dominos vollständig belegen?



Ermittle alle möglichen Belegungen.

4.6

Zur Fußballweltmeisterschaft sammle ich Spieler-Sticker. Meine Oma hat mir eine volle Schachtel geschenkt. Wenn sie mir drei solcher Schachteln geschenkt hätte, hätte ich vier Mal so viele Sticker wie ich hätte, wenn ich jetzt 12 Sticker aus meiner Schachtel herschenken würde. Wie viele Sticker sind in einer Schachtel?

4.7

Bei einem Obsttransport werden Äpfel und Birnen in fünf Kisten verpackt. In jeder Kiste befinden sich entweder nur Äpfel oder nur Birnen, und die Stückzahlen pro Kiste sind der Reihe nach 100, 105, 110, 115 und 130. Unterwegs ist eine Kiste vom Lastwagen gefallen. In den verbleibenden vier Kisten gibt es zusammen genau drei Mal so viele Äpfel wie Birnen.
Wie viel Stück Obst waren in der Kiste, die unterwegs verloren gegangen ist?

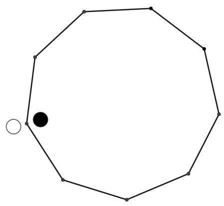
4.8

Alex, Bernie und Charlie laufen ein 5 km-Rennen jeweils mit konstanter Geschwindigkeit. Charlie gewinnt mit 500 m Vorsprung auf Alex und mit 725 m Vorsprung auf Bernie. Wie viel Vorsprung hat Alex an der Ziellinie vor Bernie?

4.9

Schwarz und Weiß springen in einem Neuneck auf Eckpunkte.

Sie beginnen, wie im Bild zu sehen, mit ihren Spielfiguren im gleichen Eckpunkt des Neunecks. In jeden Zug zieht Schwarz um zwei Ecken weiter gegen den Uhrzeigersinn, während Weiß um drei Ecken im Uhrzeigersinn weiter zieht.



Nach wie vielen Zügen treffen sie einander wieder in einem Eckpunkt?

4.10

Wie viele zweiziffrige Zahlen gibt es, deren Zehnerziffern größer als ihre Einerziffern sind?

4.11

Ich habe 11 Kugeln, die mit den Zahlen 1, 2, 3, ..., 10 und 11 nummeriert sind. Ich möchte sie so in zwei Schüsseln legen, dass sich vier in der linken Schüssel befinden und sieben in der rechten. Die Summen der Zahlen in den Schüsseln sollen jeweils gleich sein. Ermittle alle Möglichkeiten die Kugeln so in die Schüsseln zu legen.

4.12 MmF

In die Felder einer 4×4-Tabelle sollen Zahlen geschrieben werden. Zwei Zahlen in Feldern mit gemeinsamer Seite sollen sich immer um genau 1 unterscheiden. Man weiß, dass die Zahlen 4 und 10 in Eckfeldern der Tabelle stehen. Wie viele verschiedene Zahlen können in der vollständig ausgefüllten Tabelle stehen? Wie kann so eine ausgefüllte Tabelle aussehen?

4.13 MmF

In jedes Feld der gegebenen 5×5-Tabelle soll jeweils eine einziffrige Primzahl geschrieben werden.

Einige Zahlen sind in der obersten Zeile bereits eingetragen. Die Zahlen in angrenzenden Feldern (solche, die entweder eine gemeinsame Seite oder einen gemeinsamen Eckpunkt haben) dürfen niemals gleich sein. Ermittle alle möglichen Kombinationen von fünf Zahlen, die in der letzten Zeile stehen können.

2	3		5	7

4.14 MmF

Wir schalten Lampen ein und aus. Man kann auf eine Lampe drücken, und dies schaltet die Lampe ein, wenn sie davor ausgeschaltet war, und aus, wenn sie davor eingeschaltet war. Drückt man aber auf eine Lampe, wechselt auch der Leuchtzustand der beiden Nachbarlampen. Ist eine Lampe eingeschaltet, so schreiben wir „1“, ist sie ausgeschaltet, so schreiben wir „0“.

a) Auf einem Brett sind alle Lampen in einer Reihe montiert.

- **i)** In einer Reihe von 5 Lampen sind die Lampen im Zustand 1 0 1 0 1.
  Ermittle eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen einschalten kann.
- **ii)** In einer Reihe von 6 Lampen sind die Lampen im Zustand 1 0 1 0 1 0.
  Ermittle eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen einschalten kann.

b) Auf einem anderen Brett sind alle Lampen entlang eines Kreises montiert.

- **i)** In einem Kreis von 6 Lampen sind die Lampen zunächst abwechselnd eingeschaltet und ausgeschaltet.
  Ermittle eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen ausschalten kann.
- **ii)** In einem Kreis von 8 Lampen sind die Lampen zunächst abwechselnd eingeschaltet und ausgeschaltet.
  Ermittle eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen ausschalten kann.

4.15 MmF

Von Mitternacht (00:00) bis Mitternacht eines Tages (wieder 00:00) vergehen 24 Stunden.

a) Wie spät ist es, wenn bis Ende des Tages noch genau halb so viel Zeit verbleibt, wie schon an dem Tag vergangen ist?

b) Wie spät ist es, wenn noch genau ein Drittel so viel Zeit verbleibt, wie schon an dem Tag vergangen ist?

c) Wie spät ist es, wenn noch genau ein Viertel so viel Zeit verbleibt, wie schon an dem Tag vergangen ist?

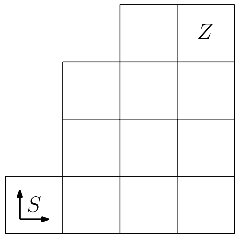
Stufe II

4.16

In dieser Aufgabe werden Wege gezählt.

a) Wie viele verschiedene Wege führen vom Feld S (Start) zum Feld Z (Ziel), wenn man nur in den beiden Pfeilrichtungen von Feld zu Feld gehen darf?

b) Du darfst ein beliebiges Feld hinzufügen, das Startfeld und Zielfeld bleiben jedoch gleich. Finde heraus, wo du das Feld hinzufügen solltest, damit es möglichst viele Wege von S nach Z gibt.



4.17

Um die Ecke lesen.

F	R	E	U
R	E	U	N
E	U	N	D
U	N	D	E

M	A	C	H	T	F
A	C	H	T	F	R
C	H	T	F	R	E
H	T	F	R	E	U
T	F	R	E	U	D
F	R	E	U	D	E

a) Auf wie viele Arten kannst du in der linken Tabelle das Wort „Freunde“ lesen, wenn du keine Zeile oder Spalte überspringen darfst?

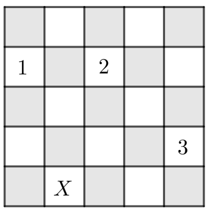
b) Auf wie viele Arten kannst du in der Tabelle „Macht Freude“ lesen, wenn du dabei keine Zeile oder Spalte überspringen darfst?

4.18

Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte so platziert, dass keine drei Punkte auf einer Gerade liegen. Zwei Spieler A und B verbinden abwechselnd zwei Punkte, bis alle Punkte miteinander verbunden sind. Sie dürfen beim Verbinden die Farben Rot und Grün beliebig verwenden. Spieler A beginnt und möchte, dass auf dem Papier ein rotes oder ein grünes Dreieck erscheint, B will das verhindern. Begründe, warum B jedenfalls verliert.

4.19

Auf einem $n \times n$-Brett gibt es eine Spielfigur mit dem Namen „*Super Springer*“. Er macht jeweils L-förmige Spielzüge und geht mit jedem Zug in einer Richtung waagrecht oder senkrecht 3 Felder weiter, und danach um ein Feld im rechten Winkel dazu. Im Bild sehen wir, dass er z.B. auf einem 5×5-Brett vom Feld, das mit den X markiert ist, wahlweise auf die Felder 1, 2 oder 3 ziehen kann (und auf keine weiteren Felder).



a) Begründe, warum ein Super Springer, der vom linken unteren Feld eines 5×5-Bretts beginnt, nicht alle Felder des Bretts besuchen kann, auch wenn er beliebig viele Züge machen darf. Wie viele der 25 Felder des Bretts kann er irgendwann erreichen?

b) Auf einem 4×4-Brett sollen so viele Super Springer wie möglich aufgestellt werden, sodass keine zwei von ihnen einander angreifen. (Mit anderen Worten, kein Super Springer soll auf einem Feld stehen, das in einem Zug von einem anderen Super Springer erreicht werden kann.) Wie viele Super Springer können höchstens auf dem Brett aufgestellt werden?

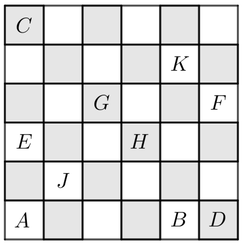
c) Ein Super Springer macht auf einem Brett mehrere Züge hintereinander und erreicht irgendwann zum ersten Mal wieder ein Feld, auf dem er schon einmal war. Wir sagen, er hat dann einen *Super Kreis* gemacht. Wie viele verschiedene Felder kann er maximal im Verlauf eines Super Kreises besuchen, wenn er sich auf einem

i) 4×4-Brett **ii)** 5×5-Brett bewegt?

d) Ermittle am dargestellten Brett jeweils die kleinste Anzahl von Zügen, die für einen Super Springer notwendig sind, um von

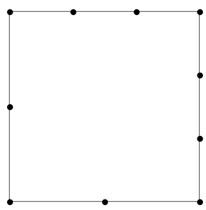
i) A zu B **ii)** C zu D **iii)** E zu F **iv)** G zu H **v)** J zu K

zu gelangen.



4.20

Die Zahlen 1, 2, ..., 10 sollen so auf die markierten Punkte des Quadrats verteilt werden, dass die Summe S auf jeder Seite gleich ist.



a) An den Ecken stehen die vier Zahlen 3, 4, 6 und 8. Berechne zuerst S und gib dann eine der vielen Verteilungen der restlichen Zahlen an.

b) Ermittle eine Verteilung der 10 Zahlen, sodass $S = 20$ gilt.

c) Ermittle den größtmöglichen Wert für S.

d) Ermittle den kleinstmöglichen Wert für S.

4.21

In einem *magischen Quadrat* ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder der beiden Diagonalen gleich groß (die *magische Konstante*). Ein Beispiel sehen wir hier abgebildet:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Die magische Konstante in diesem magischen Quadrat ist 15.

a) In einem anderen magischen Quadrat kennen wir nur drei Zahlen

	5	
17		
3		

Wie lauten die übrigen Zahlen in diesem magischen Quadrat? Wie lautet seine magische Konstante?

b) In einem anderen magischen Quadrat sollen nur ganze Zahlen mit Beträgen von höchstens 1 vorkommen, wobei nicht alle Zahlen gleich sein dürfen. Ermittle ein derartiges magisches Quadrat.

c) In einem anderen magischen Quadrat sollen alle drei Zahlen in einer Diagonale gleich einer vorgegebenen Zahl $x \neq 0$ sein, während sich in einem Eckfeld die Zahl $y \neq x$ befindet. Ermittle die Zahlen in den anderen Feldern des magischen Quadrats in Abhängigkeit von x und y, sowie die magische Konstante S des magischen Quadrats.

d) In einem magischen Quadrat sollen die Zahlen in den vier Eckfeldern, ebenso wie im Beispiel ganz oben, im Verhältnis $1 : 2 : 3 : 4$ stehen. Zeige, dass es für jede beliebige Wahl der Zahl $m \in \mathbb{R}$ im mittleren Feld ein magisches Quadrat mit dieser Eigenschaft gibt. Wie hängt die magische Konstante von m ab?

e) In einem anderen magischen Quadrat sollen die Zahlen ($\neq 0$) in den vier Eckfeldern im Verhältnis $1 : 2 : 3 : 5$ stehen. Zeige, dass es kein magisches Quadrat mit dieser Eigenschaft geben kann.