AUFGABENSAMMLUNG
DENKSPORT FÜR DIE UNTERSTUFE II

Die Aufgaben in dieser Sammlung sind insbesondere für erfahrenere Schüler*innen der Unterstufe gedacht.
Manche Aufgaben dieser Sammlung setzen mathematische Inhalte der 7. und 8. Schulstufe voraus.

Die Aufgaben sind nicht nach Schwierigkeit sortiert.

Mit nebenstehendem QR-Code kann die Aufgabensammlung als PDF heruntergeladen werden.
Auf Anfrage stellen wir Lehrpersonen ein PDF mit Lösungen zur Verfügung.

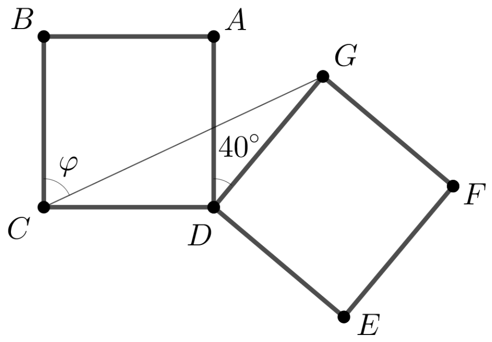
INHALTSVERZEICHNIS

Datum: 8. Mai 2024

1. Geometrie

1.1

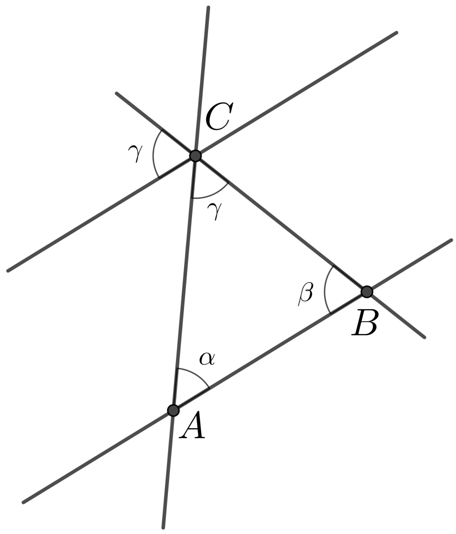
Die Quadrate $ABCD$ und $DEFG$ haben dieselbe Seitenlänge. Wie groß ist der Winkel φ?



(A) 75° (B) 72° (C) 70° (D) $67,5°$ (E) 65°

1.2

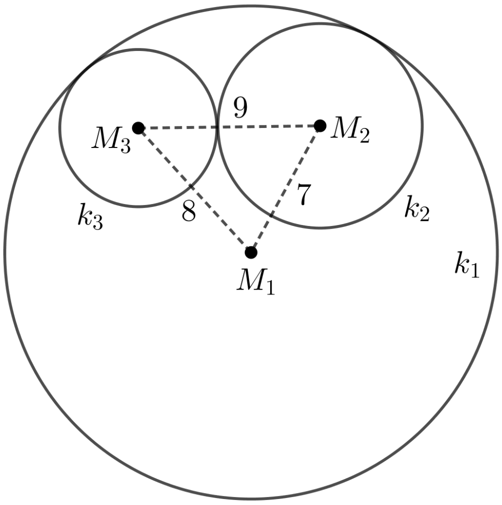
In der (nicht maßstabsgetreuen) Zeichnung sehen wir ein Dreieck ABC und eine zu AB parallele Gerade durch den Punkt C. Es gilt $\alpha = 50°$. Wie groß ist β?



(A) 50° (B) 55° (C) 62,5° (D) 65° (E) 67,5°

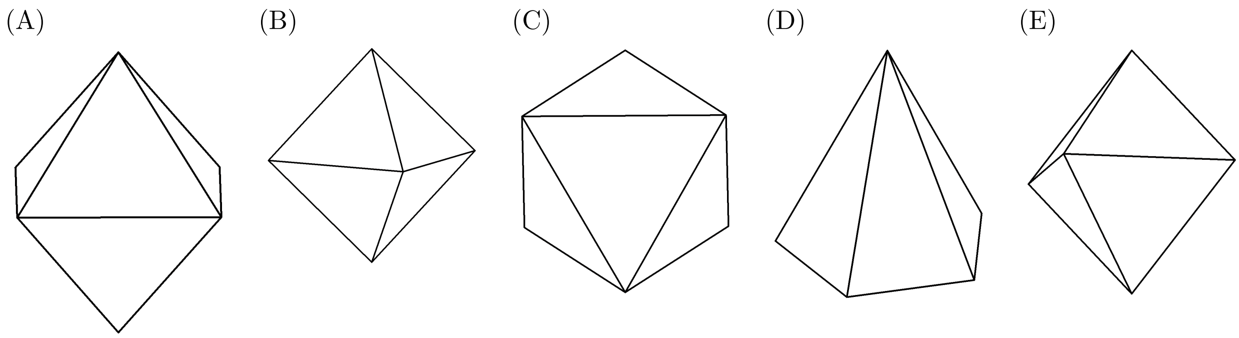
1.3

Von den drei Kreisen k_1, k_2 und k_3 mit den Mittelpunkten M_1, M_2 und M_3 berühren einander je zwei wie in der Abbildung. Das Dreieck $M_1M_2M_3$ hat die Seitenlängen $M_1M_2 = 7$ cm, $M_1M_3 = 8$ cm und $M_2M_3 = 9$ cm. Berechne den Radius des großen Kreises k_1.



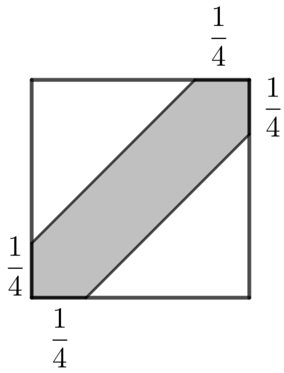
1.4

Vier der folgenden Bilder zeigen verschiedene Ansichten desselben Körpers, mit lauter dreieckigen Seitenflächen. Welches ist eine Ansicht eines anderen Objektes als die anderen vier?



1.5

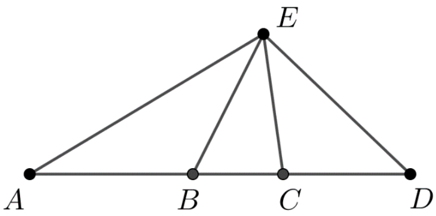
Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche im abgebildeten Quadrat mit Seitenlänge 1?



(A) $\frac{6}{16}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{9}{16}$ (E) $\frac{3}{4}$

1.6

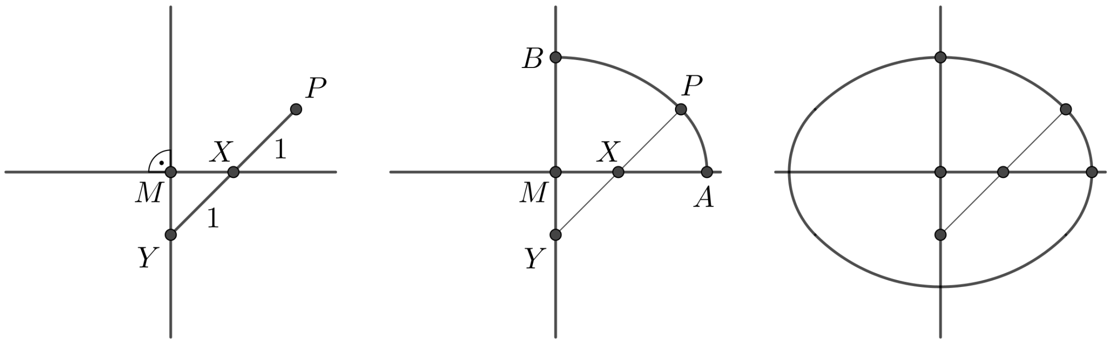
Im abgebildeten Dreieck gilt $AB = BE$, $CD = CE$ und $\angle AED = 130°$. Bestimme die Größe des Winkels $\angle BEC$.



(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80° (E) Die Aufgabe ist nicht lösbar.

1.7

In der Abbildung sehen wir in drei Schritten wie ein Oval erzeugt wird. Im ersten Bild sehen wir zwei Strecken, die einander in M rechtwinkelig schneiden. Die beiden Punkte X und Y liegen auf diesen Strecken so, dass $MX = MY$ gilt, und der Punkt P liegt so auf der Verlängerung von YX, dass $XY = XP = 1$ gilt. Im zweiten Bild wird ein Kreisbogen PA mit Mittelpunkt in X gezeichnet, und ein Kreisbogen PB mit Mittelpunkt in Y. Diese beiden Kreisbögen bilden ein Viertel des Ovals. Dieses Viertel wird an den beiden Ausgangsstrecken so oft gespiegelt, bis das im dritten Bild dargestellte Oval entsteht.



Berechne den Flächeninhalt des Ovals.

1.8

Die vier Ecken eines quadratischen Blatts Papier werden so abgeschnitten, dass die Abschnitte vier deckungsgleiche gleichschenkelige Dreiecke sind. Es verbleibt dann vom Quadrat ein Achteck. Die Eckpunkte dieses Achtecks werden im Uhrzeigersinn mit $1, 2, \ldots, 8$ beschriftet. Danach wird mit einem Bleistift ein Stern auf dem Blatt gezeichnet. Zu diesem Zweck werden die Strecken $14, 25, 36, 47, 58, 61, 72$ und 83 gezogen.
Die Winkel im Stern müssen dann aufgrund der auftretenden Symmetrien in jedem der acht Punkte gleich groß sein, egal wie groß die abgeschnittenen Dreiecke waren. Begründe warum diese Winkel auch immer dasselbe Maß haben müssen und bestimme mit Begründung das gemeinsame Maß dieser Winkel.

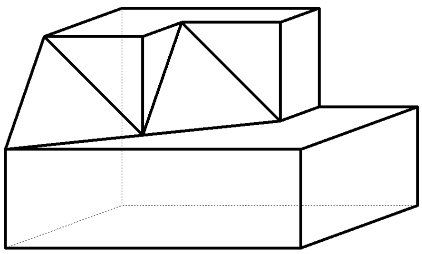
1.9

Ein Dreieck ABC hat in C einen rechten Winkel. Auf der Hypotenuse AB liegt ein Punkt D mit $AD = CD$ und $BC = BD$. Wie groß ist der Innenwinkel des Dreiecks in A?

(A) 20° (B) 22,5° (C) 30° (D) 32,5° (E) 45°

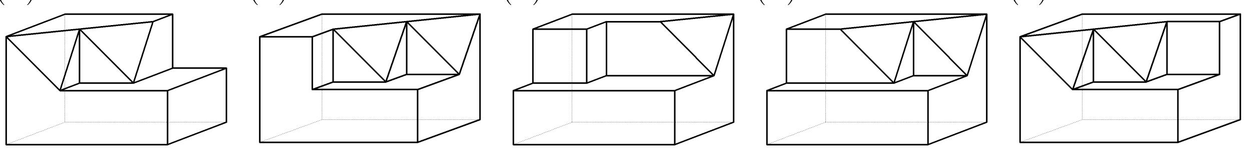
1.10

Zwei Holzskulpturen können genau zu einem Würfel zusammengefügt werden, wenn eine davon umgedreht wird und auf die andere gelegt. Eine Hälfte sieht so aus:



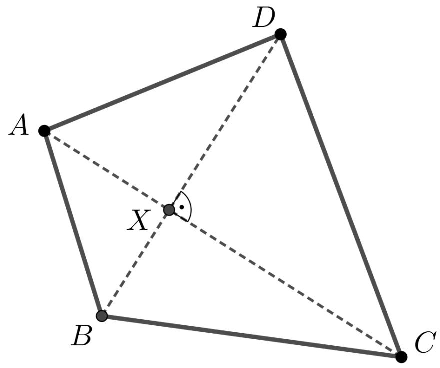
Wie sieht die andere Hälfte aus?

(A) (B) (C) (D) (E)



1.11

In einem Viereck mit den Eckpunkten A, B, C und D schneiden sich die beiden Diagonalen AC und BD in X in einem rechten Winkel.



Es ist bekannt, dass dier Flächeninhalt von ABX gleich $2x$ ist, der von BCX gleich $4x$ ist und der von CDX gleich $6x$ ist. Wie groß ist der Flächeninhalt des Vierecks? (Hinweis: Die Figur ist nicht im Maßstab gezeichnet.)

(A) $14x$ (B) $15x$ (C) $16x$ (D) $19x$ (E) $20x$

2. Zahlentheorie

2.1

Eine Digitaluhr zeigt die Zeit 35 Minuten nach 11 in der Form 11:35 an. Diese Zeit kann als Division gelesen werden, also als 11 dividiert durch 35. Manche Zeitpunkte haben die Eigenschaft dass die angezeigte Division ein positives Ergebnis liefert und ohne Rest aufgeht. Beispiele dafür sind 20:10 (da $20 : 10 = 2$ gilt) und 06:01 (da $6 : 1 = 6$ gilt). Einen derartigen Zeitpunkt, bezeichnen wir als *teilbare Zeit*.
Gibt es am Vormittag (also von 01:00 bis 11:59) mehr teilbare Zeiten oder am Nachmittag (also von 12:00 bis 23:59)? (Hinweis: Wir ignorieren die Zeiten in der Stunde 00, da die Division jeweils das Ergebnis 0 liefert.)

2.2

Nur eine der folgenden Zahlen ist eine Primzahl. Welche?

(A) 325193 (B) 321107 (C) 336577 (D) 327507 (E) 328705

2.3

Die Summe zweier Zahlen ist 177. Dividiert man die größere der beiden Zahlen durch die kleinere, so erhält man 3 und den Rest 9. Wie lauten die beiden Zahlen?

2.4

Ylva hat ein altes Kartendeck auf dem Dachboden gefunden. Sie stellt enttäuscht fest, dass ein paar Karten leider fehlen. Normalerweise besteht das Deck aus 52 Karten. Wenn man das gefundene Deck auf 4 Personen aufteilt, bleiben jedoch 2 Karten übrig. Wenn man die Karten gleichmäßig auf 6 Personen aufteilt, bleiben 4 Karten übrig und wenn man sie auf 8 Personen aufteilt bleiben sogar 6 Karten übrig. Wie viele Karten befinden sich höchstens im unvollständigen Deck?

(A) 46 (B) 22 (C) 50 (D) 34 (E) 14

2.5

Im Jugendsportklub in Primdorf sind alle Mitglieder im Alter von mindestens 8 bis höchstens 16 Jahre. (Es wird immer das Alter in ganzen Zahlen angegeben.) Zum Landesvergleichsbewerb fährt Moira mit einem Team. Als sie wieder zu Hause ankommt, fragt ihr Opa, wie viele mit dem Team mitgefahren sind. Moira weiß, dass ihr Opa gerne Zahlenrätsel mag und sagt ihm „Das Produkt der Alter aller Teammitglieder war genau 576000.“ Opa stellt aber fest, dass diese Information nicht ganz reicht.
Warum reicht diese Information nicht? Wie viele waren mindestens und wie viele waren höchstens im Team dabei?
Dann sagt Moira: „Aber Opa, ich kann dir auch sagen, dass alle anderen im Team älter waren als ich!“ Jetzt weiß Opa, wie viele im Team waren. Wie alt ist Moira?

2.6

Astrid und Lisa spielen ein Zahlenspiel. Lisa gibt die vierziffrige Zahl 2850 und die dreiziffrige Zahl 350, sowie die Zusatzziffer 3 vor. Astrid soll die Zusatzziffer 3 so in die vierziffrige Zahl einfügen, dass sie eine fünfziffrige Zahl erhält, die durch die dreiziffrige Zahl 350 ohne Rest teilbar ist. Wo muss Astrid die Ziffer 3 einfügen?

(A) vor der 2 (B) zwischen 2 und 8 (C) zwischen 8 und 5
(D) zwischen 5 und 0 (E) nach der 0

2.7

Wie viele ganze Zahlen z gibt es, für die

$$\frac{4z+7}{2z-1}$$

ebenfalls eine ganze Zahl ist?

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 6

3. Rechnen

3.1

Es gilt $a + b + c = 70$, sowie $5a + 6b + 7c = 300$. Wie groß ist $2a + 3b + 4c$?

(A) 70 (B) 80 (C) 90 (D) 100 (E) 110

3.2

Hertha hat eine Handyapp geschrieben. Tippt sie auf den Bildschirm, wird dadurch automatisch eine eingegebene Zahl a durch die Zahl $\frac{2a-1}{a+1}$ ersetzt. Tippt man wieder auf den Bildschirm, wird die Zahl auf dem Display wieder durch die entsprechende neue Zahl ersetzt.

a) Zuerst tippt Hertha die Zahl 1 ein. Danach tippt sie mehrmals hintereinander auf den Bildschirm. Begründe warum ihre App nach einigen Schritten nicht mehr funktioniert.

b) Jetzt versucht sie dasselbe mit der Zahl 3. Dann tippt sie 25 Mal auf den Bildschirm. Welche Zahl steht dann auf dem Display?

3.3

Was ist das Ergebnis der Rechnung

$$\frac{2020}{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}} \cdot \frac{1}{20 \cdot 20} + \frac{20{,}20}{2{,}020} = ?$$

(A) 40 (B) $40\frac{1}{2}$ (C) 60 (D) $60\frac{1}{2}$ (E) 80

3.4

Die Zahl 45 soll in vier Summanden a, b, c und d so aufgeteilt werden, dass a um 4 erhöht gleich groß wie b um 4 reduziert ist, a und b zusammen gleich groß wie d sind und das Doppelte von c gleich der Hälfte von d ist. Wie groß ist die Summe von a und d?

(A) 26 (B) 34 (C) 6 (D) 20 (E) 40

3.5

Ein spezieller trockener Bausand wird in einem geschlossenen Behälter aufbewahrt, der zu drei Viertel voll ist. Leider sickert langsam Wasser in den Behälter, und als Sabine eines Tages nachsieht, ist der Behälter bis oben mit einem Wasser-Sand Gemisch voll, wobei glücklicherweise kein Sand verloren gegangen ist. Sie lässt den Behälter offen, und nachdem $\frac{2}{3}$ des Wassers verdampft ist, wird der verbliebene nasse Sand in einen anderen Behälter mit quadratischer Grundfläche mit Seitenlänge 1 m geschaufelt. Der nasse Sand steht dort 90 cm hoch. Nachdem dieser Sand ganz trocken ist, soll mehr für ein Bauprojekt nachgekauft werden. Für das Projekt braucht man genau $2\,\mathrm{m}^3$ ganz trockenen Sand.
Wie viel Sand muss nachgekauft werden?

3.6

Simon arbeitet gerade an seinen Termen und ist dabei etwas verwirrt. Er glaubt, dass die Formel

$$(ax+b)^2 = ax^2 + b^2$$

für alle reellen Werte von a und b gilt. Emma will ihm erklären, warum das falsch ist, und gibt ihm als Beispiel den Term $(3x+5)^2$ zum Bearbeiten. Sie schlägt vor, dass Simon einen beliebigen Wert für x (der nicht gleich 0 ist) einsetzt, und die Probe durchführt, damit er erkennt, dass die Formel nicht stimmt. Simon wählt eine Zahl, und zufällig ergibt sich, zum Ärger von Emma, eine wahre Aussage. Welchen Wert hat Simon für x gewählt?

(A) -1 (B) -3 (C) 3 (D) -5 (E) 5

3.7

Am steilen Osthang kann die Familie Huber das Heu nur mit der Sense schneiden. Im Vorjahr hat das Markus ganz allein machen müssen, und er hat 6 Tage dafür gebraucht. Im Jahr davor war Markus zur Erntezeit auf den Seychellen im Urlaub, und da haben Luise und Berni den Hang gemeinsam in 3 Tagen bearbeitet. In diesem Jahr können alle drei zusammen arbeiten. Wie viele Tage werden sie gemeinsam brauchen, um den Hang zu bearbeiten?

(A) $1\frac{1}{2}$ (B) 2 (C) $2\frac{1}{2}$ (D) 4 (E) $4\frac{1}{2}$

3.8

Foxy schreibt immer wieder Formeln falsch an, aber Roxy weiß, wie es richtig geht.
Foxy glaubt, dass die Formel

$$(ax+b)^2 = ax^2 + b^2$$

für alle reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt. Roxy weiß aber, dass die Probe für x im allgemeinen nachweisen wird, dass die Formel nicht stimmt. Es gibt aber eine Zahl, die man immer für x einsetzen kann, um eine wahre Aussage zu erhalten, und unter bestimmten Umständen sogar zwei.

a) Bestimme die Zahl, die bei der Probe immer eine wahre Aussage ergibt.

b) Bestimme die zweite Zahl, die es für bestimmte Werte von a und b auch mit dieser Eigenschaft gibt in Abhängigkeit von a und b. Für welche Werte von a und b gibt es diese Zahl nicht?

3.9

Foxy schreibt immer wieder Formeln falsch an, aber Roxy weiß, wie es richtig geht.
Foxy glaubt, dass die Formel

$$(x-3y)^2 = x^2 - 3y^2$$

für alle reelle Zahlen x und y gilt. Roxy weiß aber, dass die Probe für x und y im allgemeinen nachweisen wird, dass die Formel nicht stimmt. Es gibt aber Zahlenpaare, die Foxy für (x/y) einsetzen kann, um eine wahre Aussage zu erhalten.
Welche Zahlenpaare kann Foxy einsetzen, um Roxy zu ärgern und doch eine wahre Aussage zu erhalten?

3.10

Foxy schreibt immer wieder Formeln falsch an, aber Roxy weiß, wie es richtig geht.
Foxy glaubt, dass die Formel

$$(x-2)^3 = x^3 - 2$$

für alle reelle Zahlen x gilt. Roxy weiß, dass die Probe für x im allgemeinen nachweisen wird, dass die Formel nicht stimmt. Foxy setzt aber eine Zahl für x ein, und zur großen Überraschung von Roxy entsteht eine wahre Aussage. Welche Zahl setzt Foxy ein?

3.11

Foxy schreibt immer wieder Formeln falsch an, aber Roxy weiß, wie es richtig geht.
Foxy glaubt, dass die Formel

$$(ax-b)^2 = ax^2 - b^2$$

für alle reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt. Roxy weiß aber, dass die Probe für x im allgemeinen nachweisen wird, dass die Formel nicht stimmt. Roxy will also mit Hilfe von gezielten Proben Foxy davon überzeugen, dass die Formel nicht stimmt.

a) Roxy gibt die Zahlen $a = 2$ und $b = 5$ vor, und bittet Foxy für eine beliebige reelle Zahl x die Probe durchzuführen. Zur großen Überraschung von Roxy erhält Foxy eine wahre Aussage. Welche Zahl hat Foxy für x eingesetzt?

b) Roxy rechnet etwas nach und stellt fest, dass es für $a = 2$ unabhängig von der Wahl von b immer eine Zahl x geben wird, die bei der Probe eine wahre Aussage ergeben wird. Bestimme diese Zahl x in Abhängigkeit von b.

c) Roxy rechnet weiter und stellt fest, dass es für $a = 3$ für keinen Wert von b eine solche Zahl x geben kann. Begründe warum dies der Fall ist.

3.12

Foxy schreibt immer wieder Formeln falsch an, aber Roxy weiß, wie es richtig geht.
Foxy glaubt, dass die Formel

$$(ax+b)^3 = a^3x^3 + b^3$$

für alle reelle Zahlen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ gilt. Roxy weiß aber, dass die Probe für x im allgemeinen nachweisen wird, dass die Formel nicht stimmt. Roxy will also mit Hilfe von gezielten Proben Foxy davon überzeugen, dass die Formel nicht stimmt. Roxy gibt die Zahlen $a = 3$ und $b = 6$ vor, und bittet Foxy für eine beliebige reelle Zahl x die Probe durchzuführen. Zur großen Überraschung von Roxy erhält Foxy eine wahre Aussage. Bestimme alle möglichen Zahlen, die Foxy eingesetzt haben kann.

3.13

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung, die sich möglichst streng am metrischen System orientiert. Es gibt dort aber auch eine Gruppe von Zeitrebellen, die stur an der international üblichen Zeitmessung fest halten.

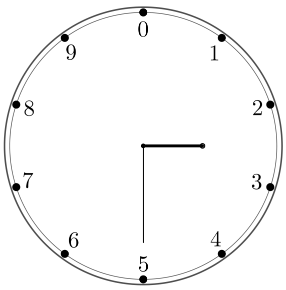
Der Tag (der, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen wird), ist in 10 gleich lange M-Stunden unterteilt, die jeweils in 100 gleich lange M-Minuten unterteilt sind. Man schreibt also Zeitpunkte mit zwei Nachkommastellen. In diesem System schreibt man z.B. Mitternacht, das man im normalen System als 0:00 schreibt, als 0,00 und 6:00 Uhr früh im normalen System, das genau ein Vierteltag nach Mitternacht ist, ist somit 2,50 in der metrischen Zeit. Man verwendet in Metristan sowohl Digitaluhren, die die Tageszeit mit drei Ziffern von 0,00 bis 9,99 angeben, als auch Analoguhren.

Der Zeitrebell Horus XII hat am Schwarzmarkt eine importierte Digitaluhr gekauft. Diese zeigt im 12-Stundenmodus zu Mitternacht 00:00 an, um ein Uhr früh 01:00, zu Mittag 12:00, und um ein Uhr Nachmittags wieder 01:00. Zu Mitternacht zeigt er vier Mal die Ziffer 0 an, also lauter gleich Ziffern. Auch die Metristanische Digtaluhr zeigt zu Mitternacht mit 0,00 lauter gleiche Ziffern. Horus XII hat beide Uhren neben einander stehen. Die Schwarzmarktuhr zeigt nach Mitternacht zum nächsten Mal um 11:11 lauter gleiche Ziffern. Was steht in der Anzeige der Metristanischen Digitaluhr, wenn sie zum ersten Mal danach ebenfalls wieder lauter gleiche Ziffern anzeigt?

3.14

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert. Es gibt dort aber auch eine Gruppe von Zeitrebellen, die stur an der international üblichen Zeitmessung fest halten.

Der Tag (der, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen wird), ist in 10 gleich lange M-Stunden unterteilt, die jeweils in 100 gleich lange M-Minuten unterteilt sind. Man schreibt also Zeitpunkte mit zwei Nachkommastellen. In diesem System schreibt man z.B. Mitternacht, das man im normalen System als 0:00 schreibt, als 0,00 und 6:00 Uhr früh im normalen System, das genau ein Vierteltag nach Mitternacht ist, ist somit 2,50 in der metrischen Zeit. Man verwendet sowohl Digitaluhren, die die Tageszeit von 0,00 bis 9,99 angeben, als auch Analoguhren, deren Ziffernblätter wie abgebildet aussehen. (Die angegebene Zeit ist hier genau 2,50.)



Der „M-Stundenzeiger“ macht am Tag eine volle Umdrehung, und der „M-Minutenzeiger“ macht am Tag zehn volle Umdrehungen.

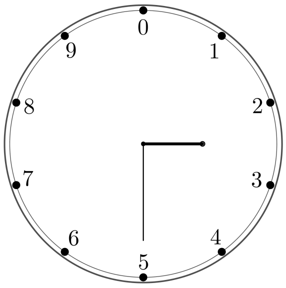
Der Zeitrebell Horus XII hat am Schwarzmarkt eine importierte Analoguhr gekauft. Der Stundenzeiger dieser Uhr zeigt zu Mitternacht dieselbe Zeit an, wie der „Stundenzeiger“ einer analogen metrischen Uhr (also der M-Stundenzeiger). Dies gilt auch an jedem Tag noch ein zweites Mal.

Bestimme den Zeitpunkt, zu dem dies der Fall ist.

3.15

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert. Es gibt dort aber auch eine Gruppe von Zeitrebellen, die stur an der international üblichen Zeitmessung fest halten.

Der Tag (der, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen wird), ist in 10 gleich lange M-Stunden unterteilt, die jeweils in 100 gleich lange M-Minuten unterteilt sind. Man schreibt also Zeitpunkte mit zwei Nachkommastellen. In diesem System schreibt man z.B. Mitternacht, das man im normalen System als 0:00 schreibt, als 0,00 und 6:00 Uhr früh im normalen System, das genau ein Vierteltag nach Mitternacht ist, ist somit 2,50 in der metrischen Zeit. Man verwendet sowohl Digitaluhren, die die Tageszeit von 0,00 bis 9,99 angeben, als auch Analoguhren, deren Ziffernblätter wie abgebildet aussehen. (Die angegebene Zeit ist hier genau 2,50.)



Der „M-Stundenzeiger“ macht am Tag eine volle Umdrehung, und der „M-Minutenzeiger“ macht am Tag zehn volle Umdrehungen.

Der Zeitrebell Horus XII stellt für den Schwarzmarkt besondere Analoguhren mit vier Zeigern her. Diese haben einen normalen Stundenzeiger, einen normalen Minutenzeiger, einen M-Stundenzeiger und einen M-Minutenzeiger. Zu Mitternacht zeigen alle vier Zeiger nach oben. Zu Mittag zeigen beide normalen Zeiger, ebenso wie der M-Minutenzeiger, nach oben, und der M-Stundenzeiger nach unten.

a) Wie viel Zeit vergeht nach Mittag, bis sich der Minutenzeiger und der M-Minutenzeiger zum nächsten Mal überdecken?

b) Welchen Winkel schließen zu diesem Zeitpunkt der Stundenzeiger und der M-Stundenzeiger ein?

3.16

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert. Es gibt dort aber auch eine Gruppe von Zeitrebellen, die stur an der international üblichen Zeitmessung fest halten.

Der Tag (der, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen wird), ist in 10 gleich lange M-Stunden unterteilt, die jeweils in 100 gleich lange M-Minuten unterteilt sind. Man schreibt also Zeitpunkte mit zwei Nachkommastellen. In diesem System schreibt man z.B. Mitternacht, das man im normalen System als 0:00 schreibt, als 0,00 und 6:00 Uhr früh im normalen System, das genau ein Vierteltag nach Mitternacht ist, ist somit 2,50 in der metrischen Zeit. Man verwendet in Metristan sowohl Digitaluhren, die die Tageszeit mit drei Ziffern von 0,00 bis 9,99 angeben, als auch Analoguhren.

Montag in der Früh konnte man aus den im Untergrund verbreiteten internationalen Medien vernehmen, dass die Zeit 6:30 ist. Wie viel Zeit vergeht, bis es in Metristan 6,30 ist?

3.17

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert.
Der Tag wird dort, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen. Monate und Jahre haben dort nur mehr meteorologische und astronomische Bedeutung, und Wochen gibt es gar nicht. Stattdessen gibt es Dekatage (10 Tage), Hektotage (100 Tage) und Kilotage (1000 Tage) zum Ordnen des Alltagslebens.
Die metrische Zeitmessung hat man (nach alter Rechnung) mit dem Tag 0 am Pi-Tag (14. März) im Jahr 2000 begonnen. Der Tag 1 war dann am 15. März, 2000, usw.

a) Welche Nummer hatte der Tag in Metristan, als man nach dem neuen Kalender zum ersten Mal Weihnachten gefeiert hat (der 25. Dezember, 2000 in den meisten Ländern)?

b) Am ersten Tag eines neuen Kilotags gibt es in Metristan einen Feiertag, den man *Neukilo* nennt. Welches Datum war in Österreich, als man zum ersten Mal Neukilo gefeiert hat?

3.18

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert.
Der Tag wird dort, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen. Monate und Jahre haben dort nur mehr meteorologische und astronomische Bedeutung, und Wochen gibt es gar nicht. Stattdessen gibt es Dekatage (10 Tage), Hektotage (100 Tage) und Kilotage (1000 Tage) zum Ordnen des Alltagslebens.
Die metrische Zeitmessung hat man (nach alter Rechnung) mit dem Tag 0 am Pi-Tag (14. März) im Jahr 2000 begonnen. Der Tag 1 war dann am 15. März, 2000, usw.
Die Arbeitszeiten werden für verschiedene Berufe verschieden geregelt. Das „Dekatagende“, also die Tage 8 und 9 in jeder Woche, ist für viele arbeitsfrei. Schülerinnen und Schüler in höheren Schulen haben Unterricht an den Tagen 0, 1, 2 und 3, dann am Tag 4 einen Schulfreien „Tetratag“, wieder Unterricht an den Tagen 5, 6 und 7 und dann das Dekatagende schulfrei.
Mux geht in der Metristanischen Grenzstadt Limus in die höhere Schule, und hat in Lumis (der benachbarten Stadt auf der anderen Seite der Grenze, wo man den internationalen Kalender verwendet, und Samstag/Sonntag immer Schulfrei ist) einen guten Freund Mix. Sie hatten gerade beide gleichzeitig zwei Schulfreie Tage hintereinander und waren gemeinsam wandern.

a) Sie planen dies wieder zu tun, wenn sie das nächte Mal beide zwei schulfreie Tage hintereinander haben. Wie lang müssen sie auf ihre nächste gemeinsame Wanderung warten?

b) Wenn sie das nächste Mal einen gemeinsamen schulfreien Tag haben, wollen sie sich im Kaffeehaus an der Grenze treffen. In wie vielen Tagen wird das sein?

3.19

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert.
Der Tag wird dort, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen. Monate und Jahre haben dort nur mehr meteorologische und astronomische Bedeutung, und Wochen gibt es gar nicht. Stattdessen gibt es Dekatage (10 Tage), Hektotage (100 Tage) und Kilotage (1000 Tage) zum Ordnen des Alltagslebens.
Die metrische Zeitmessung hat man (nach alter Rechnung) mit dem Tag 0 am Pi-Tag (14. März) im Jahr 2000 begonnen. Der Tag 1 war dann am 15. März, 2000, usw.
Nach einiger Zeit hat es sich eingebürgert, einen Tag in einem bestimmten Kilotag mit drei Nachkommastellen anzuschreiben. So schreibt man z.B. 4,045 für den Tag 45 im Kilotag 4. (Diese Schreibweise beginnt also mit 0,000 für den Tag 0 im Kilotag 0, also den 14. März, 2000.) An welchem Tag schreibt man den Kilotag (abgesehen vom Komma) mit denselben vier Ziffern wie die Jahreszahl nach dem üblichen Kalender?

3.20

Im fernen Metristan experimentiert man schon seit einigen Jahren mit einer Zeitmessung die sich möglichst streng am metrischen System orientiert.
Der Tag wird dort, wie international üblich, von Mitternacht bis Mitternacht gemessen. Monate und Jahre haben dort nur mehr meteorologische und astronomische Bedeutung, und Wochen gibt es gar nicht. Stattdessen gibt es Dekatage (10 Tage), Hektotage (100 Tage) und Kilotage (1000 Tage) zum Ordnen des Alltagslebens.
Die metrische Zeitmessung hat man (nach alter Rechnung) mit dem Tag 0 am Pi-Tag (14. März) im Jahr 2000 begonnen. Der Tag 1 war dann am 15. März, 2000, usw.
Die letzten beiden Tage in jedem Dekatag (also die Tage 8 und 9) werden als *Dekatagende* bezeichnet und sind für die meisten Leute arbeitsfrei. Der erste Tag in jedem Hektotag ist ein staatlicher Feiertag. Es ergibt sich also zu Beginn eines jeden Hektotags ein langes Dekatagende, mit drei freien Tagen.
Nehmen wir an, ein solches langes Dekatagende fällt nach dem üblichen Kalender in einem Schaltjahr auf den 1., 2. und 3. März. Nach einigen Jahren wird dies wieder der Fall sein und danach im Abstand von jeweils gleich vielen Jahren immer wieder. Wie lang ist ein solcher wiederholender Zyklus in Jahren? Wie lang ist der Zyklus in Kilotagen?

3.21

Nehmen wir an, es seien positive ganze Zahlen a und k gegeben. Wir bezeichnen jede Zahl z der Form

$$z = z(a,k) = a + a^2 + \ldots + a^k$$

als *Zipzahl*. Gilt $a > 1$ und $k > 1$, so bezeichnen wir z als *Zipperzahl*.

a) Begründe, warum jede positive ganze Zahl eine Zipzahl ist, aber nicht jede positive ganze Zahl eine Zipperzahl ist.

b) Bestimme alle ein- und zweiziffrige Zipperzahlen.

3.22

Nehmen wir an, es seien positive ganze Zahlen a und k gegeben. Wir bezeichnen jede Zahl z der Form

$$z = z(a,k) = a + a^2 + \ldots + a^k$$

als *Zipzahl*. Gilt $a > 1$ und $k > 1$, so bezeichnen wir z als *Zipperzahl*.
Bestimme die größte dreiziffrige Zipperzahl.

3.23

Nehmen wir an, es seien positive ganze Zahlen a und k gegeben. Wir bezeichnen jede Zahl z der Form

$$z = z(a,k) = a + a^2 + \ldots + a^k$$

als *Zipzahl*. Gilt $a > 1$ und $k > 1$, so bezeichnen wir z als *Zipperzahl*.
Es sei c eine beliebige Ziffer von 0 bis 9. Begründe warum es, unabhängig vom Wert von c, unbegrenzt viele Zipperzahlen mit der Einerziffer c gibt.

4. Denksport

4.1

Es sei a die größte zweiziffrige Zahl mit der Eigenschaft, dass ihre größere Ziffer mehr als doppelt so groß wie ihre kleinere Ziffer ist. Weiters sei b die kleinste zweiziffrige Zahl, die ohne Verwendung der Ziffer 1 geschrieben wird. Bestimme den Wert von $a - b$.

(A) 74 (B) 72 (C) 70 (D) 78 (E) 76

4.2

Im rechts dargestellten Raster wird zuerst eine Zahl aus der rechten Spalte entfernt, dann eine Zahl aus der mittleren Zeile und schließlich eine Zahl aus der linken Spalte. Es verbleiben sechs Zahlen im Raster. Was ist das kleinstmögliche Produkt der verbleibenden sechs Zahlen?

3	4	5
8	7	6
9	1	2

(A) 840 (B) 460 (C) 640 (D) 1040 (E) 980

4.3

Wieviel Prozent der Zahlen von 201 bis 1200 sind Quadratzahlen?

(A) 2 % (B) 1,5 % (C) 3 % (D) 2,25 % (E) 5 %

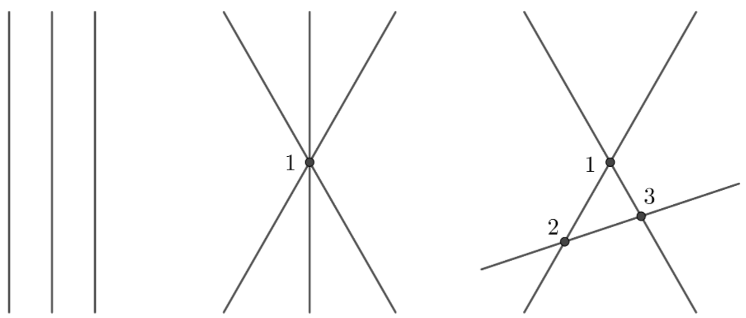
4.4

Die Operation „$\triangleright$“ist definiert durch $x \triangleright y = x + y + xy + 2$. Für welche Zahl y gilt $(3 \triangleright y) \triangleright y = 21$?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4.5

Eine Anzahl von verschiedenen Geraden bestimmt in der Ebene eine Menge von Schnittpunkten, die jeweils auf mindestens zwei der Geraden liegen. In der Figur sehen wir Gruppen von jeweils drei Geraden, die der Reihe nach 0, 1 und 3 derartige Schnittpunkte bestimmen.



a) Bestimme eine Anordnung von vier Geraden, die genau fünf Schnittpunkte bestimmen.

b) Begründe warum es nicht möglich ist, vier Geraden so anzuordnen, dass sie genau 2 Schnittpunkte bestimmen.

4.6

Die *Happyfunktion* h wird für positive ganze Zahlen n folgendermaßen definiert. Der Wert von $h(n)$ ist die Summe der Quadrate der Ziffern von n. Beispiele dafür sind

$$h(21) = 2^2 + 1^2 = 5, \quad h(503) = 5^2 + 0^2 + 3^2 = 34 \quad \text{und} \quad h(1000) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1.$$

Man kann die Happyfunktion auf eine Zahl mehrmals hintereinander anwenden, und bekommt so eine Folge von Zahlen. Ein Beispiel dafür ist

$$26 \to h(26) = 2^2 + 6^2 = 40 \to h(40) = 4^2 + 0^2 = 16 \to h(16) = 1^2 + 6^2 = 37 \to \ldots.$$

Führt eine derartige Folge irgendwann zur Zahl 1 (so wie z.B. für die Zahl 1000), so ändert sich der Wert nie mehr, da $h(1) = 1^2 = 1$ gilt. Man bezeichnet eine Zahl, die irgendwann bei wiederholter Anwendung der Happyfunktion zur Zahl 1 führt als *Happy Number* (= fröhliche Zahl). Die Zahl 1 ist nicht die einzige einstellige Happy Number. Bestimme die andere.

4.7

Es ist bekannt, dass eine Uhr, deren Minuten- und Stundenzeiger beide stillstehen, zwei Mal am Tag die richtige Zeit angibt. Es bezeichne m die Anzahl der Zeitpunkte pro Tag, an dem eine Uhr die richtige Zeit angibt, deren Minutenzeiger still steht. Ferner bezeichne s die Anzahl der Zeitpunkte pro Tag, an dem eine Uhr die richtige Zeit angibt, deren Stundenzeiger still steht. Wie groß ist das Verhältnis $m : s$?

(A) 2 : 1 (B) 1 : 1 (C) 1 : 2 (D) 12 : 1 (E) 24 : 1

4.8

Im gegebenen 2×3 Raster werden für die Unbekannten a, b, c, d, e und f die Ziffern 1 bis 6 so eingesetzt, dass die Summe der beiden Zahlen in jeder Zeile gleich ist.

a	b
c	d
e	f

Es ist bekannt, dass $abc = 30$ gilt, und $bdf = 20$. Welche Ziffer wird für e eingesetzt?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

4.9

In einer Schulklasse mit 27 Kindern haben 14 ein Haustier und 19 ein Fahrrad. Neun davon haben beides. Wie viele Kinder haben weder ein Haustier noch ein Fahrrad?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

4.10

Peter hat einen großen Haufen Murmeln gefunden. Er teilt die Murmeln in drei gleich große Haufen und stellt fest, dass dabei eine Murmel übrig bleibt. Diese legt er beiseite. Anschließend nimmt er zwei der drei Haufen und vereinigt sie zu einem größeren Haufen, welchen er wieder in drei kleinere, gleich große Haufen teilt. Erneut bleibt dabei eine Murmel übrig. Er nimmt diese weg und vereinigt zwei der neuen Haufen wieder zu einem größeren und teilt den so neu entstandenen Haufen wieder in drei gleiche Haufen. Dabei bleibt wieder eine Murmel übrig. Wie viele Murmeln müssen mindestens im ursprünglichen Murmelhaufen gewesen sein?

(A) 25 (B) 66 (C) 52 (D) 79 (E) 20

4.11

Ein Wasserbecken soll möglichst schnell befüllt werden. Es stehen drei verschiedene Pumpen mit unterschiedlicher Leistung zur Verfügung. Die stärkste Pumpe kann das Becken in einem Tag vollständig befüllen. Die zweitstärkste Pumpe braucht genau zwei Tage um das zu schaffen, und die schwächste benötigt sogar genau zehn Tage zum vollständigen Befüllen des Beckens. Wie viele Stunden werden benötigt, um das Becken vollständig zu befüllen, wenn alle drei Pumpen gleichzeitig mit voller Leistung arbeiten?

(A) 15 (B) 22 (C) 20 (D) 12 (E) 14

4.12

Herr Müller, Herr Weber und Herr Schmied sind Ausdauerläufer. In einem Rennen über 10 km gewinnt Herr Müller gegen Herrn Weber mit 150 Meter Vorsprung beim Ziel. Herr Weber hingegen gewinnt gegen Herrn Schmied in diesem Rennen mit 200 Meter Vorsprung beim Ziel. Mit wie vielen Metern Vorsprung beim Ziel gewinnt Herr Müller dieses Rennen gegen Herrn Schmied?

(A) 347 (B) 340 (C) 282 (D) 406 (E) 378

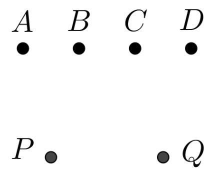
4.13

Eine kleine Cafeteria bietet drei verschiedene Menüs zum Mittagessen an:
Großes Menü für € 9; Kleines Menü für € 4; Veganes Menü für € 7.
Am Ende einer Mittagspause hat die Cafeteria 10 Menüs verkauft und dabei € 67 eingenommen. Wie viele vegane Menüs hat die Cafeteria verkauft, wenn sie mindestens ein Menü jeder Art verkauft hat?

(A) 4 (B) 2 (C) 3 (D) 1 (E) 5

4.14

Sechs Punkte sind wie abgebildet in der Ebene gezeichnet.



Die Punkte A, B, C und D liegen auf einer gemeinsamen Geraden und es gilt $AB = BC = CD$ und $PA = PB = QC = QD = 2 \cdot AB$. Wir wollen nun einige Kreise zeichnen, sodass jedes Paar von zwei dieser Punkte auf (mindestens) einem gemeinsamen Kreis liegt.

a) Zeichne Kreise, die diese Bedingung erfüllen.

b) Was ist die kleinste Zahl von Kreisen, die man zeichnen kann, sodass diese Bedingung erfüllt ist? Beweise, dass es möglich ist, mit dieser Anzahl von Kreisen alle Paare so zu verbinden, und dass es mit weniger Kreisen nicht möglich ist.

4.15

Ein *Kryptogramm* ist eine Rechnung in der die Ziffern durch Buchstaben oder sonstige Platzhalter ersetzt worden sind. Gleiche Buchstaben stehen immer für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben stehen immer für verschiedene Ziffern. Die Leitziffer (also die erste Ziffer) einer mehrziffrigen Zahl darf niemals 0 sein.
In folgendem Kryptogramm gilt $D - A = 3$.

$$\begin{array}{cccc} & & & \mathrm{A} \\ + & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{B} \\ \hline & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{E} \end{array}$$

Wie groß ist $C - B$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

4.16

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.
Bestimme alle möglichen Hupffolgen bei denen er, vom Feld 1 ausgehend, alle Felder eines Streifens der Länge 5 genau ein Mal besuchen kann, unter der Voraussetzung, dass er mit keinem Hupfer mehr als zwei Felder weit hupfen kann. Wie viele derartige Hupffolgen gibt es? Wie viele gibt es, bei denen er als Letztes das Feld 5 besucht?

4.17

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.
Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem Streifen der Länge 11, wobei er vom Feld 1 beginnt. Er kann immer nur entweder 4 oder 6 Felder auf einmal hupfen. Begründe, warum er das Feld 2 niemals besuchen kann. Welche Felder kann er besuchen? Bestimme eine Hupffolge, bei der er alle erreichbaren Felder mindestens einmal besucht.

4.18

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.
Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem Streifen der Länge 11, wobei er vom Feld 1 beginnt. Er kann immer nur entweder 3 oder 4 Felder auf einmal hupfen. Bestimme eine Hupffolge, bei der er alle Felder mindestens einmal besucht und auf dem Feld 11 endet. Begründe, warum diese Hupffolge aus mehr als 10 Hupfern bestehen muss.

4.19

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.

Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem Streifen der Länge 10, wobei er vom Feld 1 beginnt. Er kann immer nur entweder 5 oder n Felder auf einmal hupfen und wir wissen, dass er alle 10 Felder des Streifens in einer Hupffolge besuchen kann. Bestimme alle möglichen Werte von n.

4.20

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.

Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem nach rechts unbegrenzten Papierstreifen. Er beginnt auf dem Feld 1 und kann mit jedem Hupfer entweder 3 oder 8 Felder weiter hupfen. Er darf unbegrenzt lange hupfen. Begründe, warum es diesem Steifenhupfer möglich ist, jedes Feld auf den Streifen irgendwann zu erreichen.

4.21

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.

Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen mit $2n$ Feldern. Er beginnt auf dem Feld 1 und kann mit jedem Hupfer entweder n oder $\frac{n}{2} + 1$ Felder weit hupfen. Bestimme ein n mit der Eigenschaft, dass er in einer Hupffolge alle Felder des Streifens erreichen kann, und gebe eine solche Hupffolge für diesen Wert von n an. Bestimme ferner einen Wert von n für den dies nicht möglich ist und begründe, warum es nicht möglich ist.

4.22

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.

Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen der Länge 5. Er beginnt auf dem Feld 1 und kann mit jedem Hupfer entweder 2 oder 3 Felder weit hupfen. Zu Beginn ist das Feld 1 blau, und alle anderen sind weiß. Hupft er auf ein weiß es Feld, so wird es blau und hupft er auf ein blaues Feld, wird es rot. Auf ein rotes Feld darf er nicht hupfen. Bestimme eine Hupffolge, nach der er alle Felder rot gefärbt hat.

Nachdem der Streifenhupfer dieses Problem gelöst hat, versucht er dasselbe auf einem Streifen der Länge 6 mit denselben Farbeigenschaften. Ist es auch in diesem Streifen möglich, alle Felder rot zu färben? Wenn es möglich ist, bestimme eine geeignete Hupffolge. Wenn es nicht möglich ist, begründe warum dies der Fall ist.

4.23

Ein Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen immer von einem Feld zu einem anderen.

1	2	3	4	5

In der Figur sehen wir einen Streifen der Länge 5. Er besteht aus 5 nebeneinander angeordneten Quadraten, die von links nach rechts fortlaufend nummeriert sind. Unter einer *Hupffolge* verstehen wir eine Anordnung von Feldern, die der Streifenhupfer in einer bestimmten Reihenfolge besucht. So kann er zum Beispiel jedes Feld am 5-er Streifen mit der Hupffolge

$$1 - 2 - 4 - 5 - 3$$

genau einmal besuchen. Dabei hupft er im ersten Hupfer um ein Feld von 1 nach 2 und im zweiten Hupfer um zwei Felder von 2 nach 4.

Ein bestimmter Streifenhupfer hupft auf einem Papierstreifen der Länge n. Er beginnt auf dem Feld 1 und kann mit jedem Hupfer immer nur eine Distanz hupfen, die er bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht gehupft ist. Hupft er also zum Beispiel mit den ersten beiden Hupfern $1 - 4 - 2$, so ist er im ersten Hupfer die Distanz 3 und im zweiten die Distanz 2 gehupft. Im nächsten Hupfer darf er nur mehr $1, 4, 5, \ldots$ Felder hupfen, nicht aber 2 oder 3.

Zeige, dass es ihm zu jedem Wert von n möglich ist, unter diesen Voraussetzungen jedes Feld des Streifens genau einmal zu besuchen.

Nun möchte er jedes Feld des Streifens genau einmal besuchen, und gleichzeitig auf dem Feld n als Letztes landen. Für welche Werte von n ist dies möglich?