AUFGABENSAMMLUNG – DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Inhaltsverzeichnis

Unterrichtsmaterialien – Differentialgleichungen

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

✓ Arbeitsblatt – Differentialgleichungen
✓ Arbeitsblatt – Trennung der Variablen
✓ Arbeitsblatt – Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten
✓ Arbeitsblatt – Variation der Konstanten
✓ Arbeitsblatt – Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wie darf ich die Aufgaben verwenden?

Das MmF-Team entwickelt eigene Aufgabenstellungen. Sie sind mit dem Projektlogo MmF gekennzeichnet.

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der AHS bzw. BHS.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 8. Mai 2024

1. Differentialgleichungen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Differentialgleichungen

1.1

Die Lösungen der *Gleichung* $x^3 - 3 \cdot x^2 = 3 \cdot x - 10$ sind *Zahlen*.
Durch Einsetzen in die Gleichung kann man überprüfen, ob eine Zahl eine Lösung der Gleichung ist.

a) Zeige, dass die Zahl 1 *keine* Lösung der Gleichung $x^3 - 3 \cdot x^2 = 3 \cdot x - 10$ ist.

b) Zeige, dass die Zahl 2 eine Lösung der Gleichung $x^3 - 3 \cdot x^2 = 3 \cdot x - 10$ ist.

Die Lösungen von *Differentialgleichungen* (kurz: DGL) sind *Funktionen*.
Durch Einsetzen in die DGL kann man überprüfen, ob eine Funktion eine Lösung der DGL ist.

c) Zeige, dass die Funktion $y(x) = x^2$ *keine* Lösung der DGL $y' = \frac{3 \cdot y}{x}$ ist.

d) Zeige, dass die Funktion $y(x) = x^3$ eine Lösung der DGL $y' = \frac{3 \cdot y}{x}$ ist.

e) Zeige, dass die Funktion $y(x) = \frac{x^2}{2}$ *keine* Lösung der DGL $y' = x \cdot y$ ist.

f) Zeige, dass die Funktion $y(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ eine Lösung der DGL $y' = x \cdot y$ ist.

1.2

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) - 10 \cdot x + e^x = 0$.

a) Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

b) Ermittle jene spezielle Lösung der Differentialgleichung mit $y(0) = 1$.

1.3

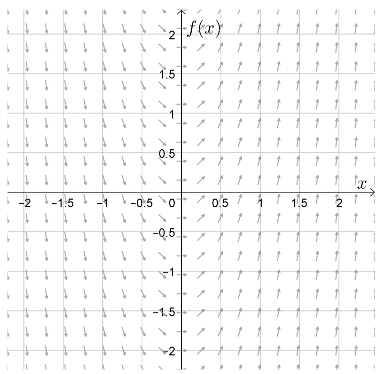
a) Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = 4 \cdot x$.

Hinweis: $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ ist nur eine andere Schreibweise für $f'(x)$.

Andere Formulierung für dieselbe Aufgabe: Ermittle alle Stammfunktionen von $f'(x) = 4 \cdot x$.

b) Ermittle jene spezielle Lösung dieser Differentialgleichung (DGL) mit $f(0) = -2$.

c) Rechts ist das Richtungsfeld dieser DGL dargestellt.
Skizziere den Graphen jener speziellen Lösung mit $f(0) = -2$.

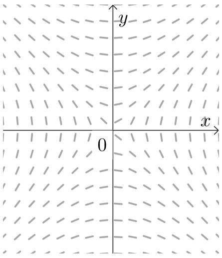


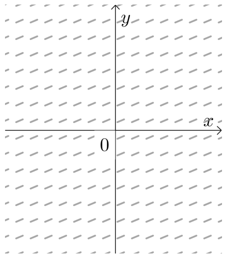
1.4

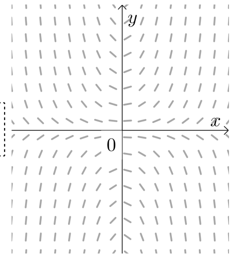
Gegeben sind 4 Differentialgleichungen:

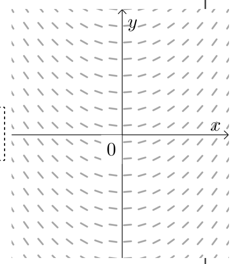
i) $y'(x) = 0{,}42$ **ii)** $y'(x) = 0{,}42 \cdot x$ **iii)** $y'(x) = x \cdot y$ **iv)** $y'(x) = \dfrac{x}{y}$

a) Ordne den Differentialgleichungen ihr Richtungsfeld zu.









b) Ermittle jeweils mit Technologieeinsatz jene spezielle Lösung, deren Graph den Punkt $(0 \mid 1)$ enthält.

1.5

Eine Differentialgleichung mit Anfangsbedingung ist gegeben.
Darunter siehst du, wie man mit GeoGebra die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ermitteln kann:

a) $y' = 5 \cdot y$ mit $y(0) = 3$

Allg. Lösung: $y(x) = c \cdot e^{5 \cdot x}$

CAS
1 LöseDgl(y'=5*y)
→ $\mathbf{y = c_1\, e^{5x}}$

b) $\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = -K \cdot \sin(t)$ mit $K(0) = 5$

Allg. Lösung: $K(t) = c \cdot e^{\cos(t)}$

CAS
1 LöseDgl(y'=-y*sin(x))
→ $\mathbf{y = c_1\, e^{\cos(x)}}$

c) $\dot{W} = \frac{t}{W}$ mit $W(4) = 2$ $\dot{W}(t) = W'(t)$

Allg. Lösung: $W(t) = \sqrt{t^2 - 2 \cdot c}$

CAS
1 LöseDgl(y'=x/y)
→ $\mathbf{y = \sqrt{-2\, c_1 + x^2}}$

d) $y'' + y = 0$ mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 5$

Allg. Lösung: $y(x) = c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)$

CAS
1 LöseDgl(y''+y=0)
→ $\mathbf{y = c_1\, \cos(x) + c_2\, \sin(x)}$

1) Zeige, dass die angegebene Funktion tatsächlich eine Lösung der Differentialgleichung ist.

2) Ermittle jene spezielle Lösung der Differentialgleichung, die die Anfangsbedingung erfüllt.

1.6

Die Entwicklung der Populationsgröße P einer Fischpopulation wird durch folgende DGL modelliert:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 0{,}042 \cdot P \cdot \left(1 - \frac{P}{5000}\right) \quad \text{mit } P \geq 0$$

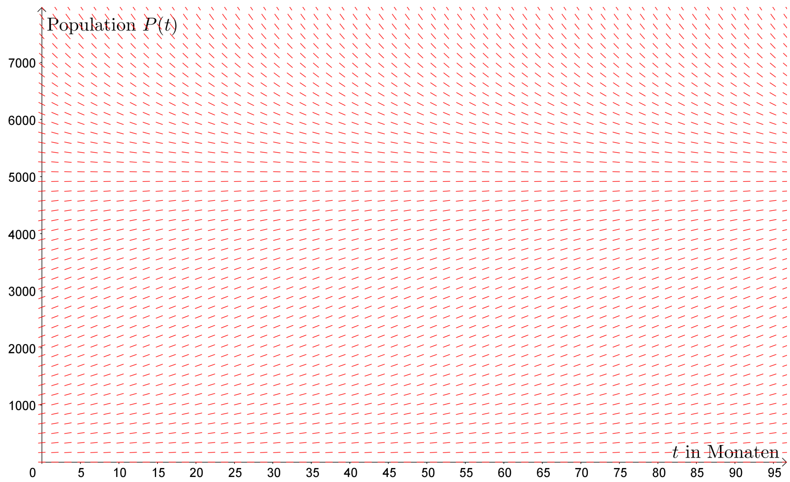
t ... Zeit in Monaten

$P(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = P'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Populationsgröße zum Zeitpunkt t

a) Begründe mithilfe der DGL:
Bei welchen Werten für P ...
... bleibt die Population gleich groß?
... wächst die Population?
... schrumpft die Population?

Rechts ist das Richtungsfeld dieser Differentialgleichung dargestellt.



b) Skizziere rechts den zeitlichen Verlauf der Lösung P mit Anfangswert ...

i) ... $P(0) = 5000$

ii) ... $P(0) = 500$

iii) ... $P(0) = 2000$

iv) ... $P(0) = 7000$

c) Bei welchen Populationsgrößen beträgt die momentane Änderungsrate 42 Fische pro Monat?

1.7

Übersetze in eine Differentialgleichung und ermittle die allgemeine Lösung der DGL mit Technologieeinsatz.

a) In jedem Punkt des Funktionsgraphen stimmt der Funktionswert mit der lokalen Änderungsrate der Funktion an dieser Stelle überein.

b) In jedem Punkt des Funktionsgraphen ist das Produkt der Koordinaten halb so groß wie die Steigung.

c) In jedem Punkt des Funktionsgraphen ist die Summe von Steigung und Produkt der Koordinaten gleich 0.

1.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Das Newtonsche Abkühlungsgesetz besagt, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur eines Körpers proportional zur Differenz zwischen der Temperatur des abkühlenden Körpers zur Zeit t und der Umgebungstemperatur ist.

$$\frac{dT(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot (T_U - T(t))$$

$t \ldots$ Zeit in Minuten (min)
$T(t) \ldots$ Temperatur des Körpers zur Zeit t in °C
$T_U \ldots$ Umgebungstemperatur in °C
$k > 0 \ldots$ Proportionalitätsfaktor in min^{-1}

Ein Thermometer wird aus einem Raum ins Freie gebracht, wo es eine Temperatur von $T_U = -10\,°\mathrm{C}$ hat.
Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung für $k = 0{,}84\,\mathrm{min}^{-1}$ lautet:

$$T(t) = -10 - C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$$

1) Zeigen Sie, dass diese Funktion T die allgemeine Lösung der gegebenen Differenzialgleichung ist.

Der Raum, aus dem das Thermometer ins Freie gebracht wird, hat eine Temperatur von 22 °C.
Zu Beginn ($t = 0$) zeigt das Thermometer also eine Temperatur von 22 °C an.

2) Ermitteln Sie für diesen Sachzusammenhang eine spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

1.9

MmF

Ein Körper mit Masse $m > 0$ befindet sich im freien Fall mit konstanter Beschleunigung g.
Mit $h(t)$ wird die Höhe des Körpers über dem Boden zum Zeitpunkt t abgekürzt.
Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt $v_0 > 0$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper in der Höhe $h_0 > 0$ über dem Boden.

a) Begründe, ob bis zum Aufprall am Boden $h'(t) > 0$ oder $h'(t) < 0$ gilt.

b) Begründe, ob bis zum Aufprall am Boden $h''(t) > 0$ oder $h''(t) < 0$ gilt.

Wenn man die Reibungskraft vernachlässigt, dann gilt:

$$m \cdot h''(t) = -m \cdot g$$

c) Stelle mithilfe von g, h_0 und v_0 eine Formel für die spezielle Lösung h dieser DGL auf.

1.1 **a)** Linke Seite: -2 Rechte Seite: $-7 \implies$ keine Lösung der Gleichung

b) Linke Seite: -4 Rechte Seite: $-4 \implies$ Lösung der Gleichung

c) Linke Seite: $2 \cdot x$ Rechte Seite: $3 \cdot x \implies$ keine Lösung der DGL

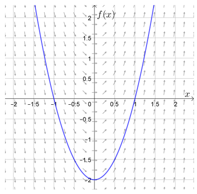
d) Linke Seite: $3 \cdot x^2$ Rechte Seite: $3 \cdot x^2 \implies$ Lösung der DGL

e) Linke Seite: x Rechte Seite: $\frac{x^3}{2} \implies$ keine Lösung der DGL

f) Linke Seite: $e^{\frac{x^2}{2}} \cdot x$ (Kettenregel) Rechte Seite: $x \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \implies$ Lösung der DGL

1.2 **a)** $y(x) = 5 \cdot x^2 - e^x + c$ **b)** $y(x) = 5 \cdot x^2 - e^x + 2$

1.3 **a)** $f(x) = 2 \cdot x^2 + c$ **b)** $f(x) = 2 \cdot x^2 - 2$ **c)**



1.4 **a)** von links nach rechts: **iv)**, **i)**, **iii)**, **ii)**

b) **i)** $y(x) = 0{,}42 \cdot x + 1$ **ii)** $y(x) = 0{,}21 \cdot x^2 + 1$ **iii)** $y(x) = e^{0{,}5 \cdot x^2}$ **iv)** $y(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

1.5 **a)** **1)** Hinweis: $y'(x) = c \cdot e^{5 \cdot x} \cdot 5$ **2)** $y(x) = 3 \cdot e^{5 \cdot x}$

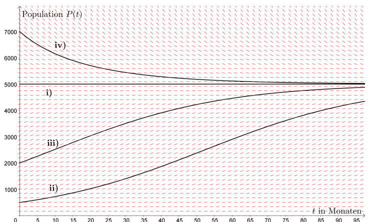
b) **1)** Hinweis: $K'(t) = c \cdot e^{\cos(t)} \cdot (-\sin(t))$ **2)** $K(t) = \frac{5}{e} \cdot e^{\cos(t)}$

c) **1)** Hinweis: $W'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 2 \cdot c}}$ **2)** $W(t) = \sqrt{t^2 - 12}$

d) **1)** Hinweis: $y''(x) = -c_1 \cdot \cos(x) - c_2 \cdot \sin(x)$ **2)** $y(x) = 5 \cdot \sin(x)$

1.6 **a)** Wenn $P = 0$ oder $P = 5000$ gilt, dann ist $P' = 0$, also bleibt die Population gleich groß.
Wenn $0 < P < 5000$ gilt, dann ist $P' > 0$, also wächst die Population.
Wenn $P > 5000$ gilt, dann ist $P' < 0$, also schrumpft die Population.

b)



c) ≈ 1382 Fische und ≈ 3618 Fische

1.7 **a)** $y' = y \implies y(x) = c \cdot e^x$ **b)** $y' = 2 \cdot x \cdot y \implies y(x) = c \cdot e^{x^2}$ **c)** $y' + x \cdot y = 0 \implies c \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

1.8 **1)** Linke Seite: $\frac{dT(t)}{\mathrm{d}t} = T'(t) = -C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} \cdot (-0{,}84) = 0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$

Rechte Seite: $k \cdot (T_U - T(t)) = 0{,}84 \cdot \left(-10 + 10 + C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}\right) = 0{,}84 \cdot C \cdot e^{-0{,}84 \cdot t}$ ✓

2) $T(t) = 32 \cdot e^{-0{,}84 \cdot t} - 10$

1.9 **a)** Bis zum Aufprall am Boden wird die Höhe immer kleiner. Es gilt also $h'(t) < 0$.

b) Bis zum Aufprall am Boden wird die Geschwindigkeit betragsmäßig immer größer. Es gilt also $h''(t) < 0$.

c) $h(t) = -\frac{g}{2} \cdot t^2 - v_0 \cdot t + h_0$

2. Trennung der Variablen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Trennung der Variablen

2.1

Berechne die allgemeine Lösung der DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.
Ermittle jene spezielle Lösung, die die angegebene Bedingung erfüllt.

a) $y' = 3 \cdot y$ mit $y(0) = 5$ **b)** $\dot{N} - \dfrac{\sin(t)}{N(t)} = 0$ mit $N(0) = 3$ **c)** $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} - h(x) = 15$ mit $h(1) = 42$

2.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Bakterienkultur mit 50 Bakterien wird zu einem Zeitpunkt $t = 0$ angelegt.
Nach 100 Minuten werden bereits 750 Bakterien gezählt.
Die Funktion N beschreibt das Wachstum der Bakterienkultur:
$N(t)$ ist die Anzahl der Bakterien nach t Minuten.
Die 1. Ableitung der Funktion N ist proportional zu N.
Die entsprechende Proportionalitätskonstante bezeichnet man als *Wachstumsrate*.

1) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für N auf.

2) Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*.

3) Berechnen Sie, wie viele Bakterien nach 3 Stunden vorhanden sind.

2.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Temperatur einer Flüssigkeit in einem Raum mit einer Umgebungstemperatur von 24 °C wird gemessen.
Das Newton'sche Abkühlungsgesetz besagt, dass die momentane Änderungsrate der Temperatur T einer Flüssigkeit zu jedem Zeitpunkt proportional zur Differenz zwischen der jeweiligen Flüssigkeitstemperatur und der Umgebungstemperatur ist.

1) Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für T auf.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung mittels *Trennen der Variablen*.

3) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung, wenn die Temperatur bei 0 Minuten 40 °C und bei 15 Minuten 36 °C beträgt.

2.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels
$I(x)$ ... Lichtintensität in der Entfernung x
I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels
λ ... positive Konstante

Dabei wird angenommen, dass die lokale Änderungsrate der Lichtintensität in Abhängigkeit von der Entfernung proportional zur jeweils vorhandenen Lichtintensität ist.

1) Stellen Sie die Differenzialgleichung für I auf. Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-\lambda$ ($\lambda > 0$).

2) Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die Lösung dieser Differenzialgleichung mit der Anfangsbedingung $I(0) = I_0$ durch $I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ gegeben ist.

2.5

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Funktion V beschreibt näherungsweise den zeitlichen Verlauf des Wasservolumens eines bestimmten Sees. Dabei wird das Wasservolumen in Kubikmetern und die Zeit t in Tagen angegeben.
V erfüllt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0{,}001 \cdot (350 - V) \quad \text{mit } V > 0$$

1) Argumentieren Sie anhand der Differenzialgleichung, für welche Werte von V das Wasservolumen dieses Sees gemäß diesem Modell zunimmt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen.*

Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Wasservolumen $150\,\mathrm{m}^3$.

3) Berechnen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

2.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Motorboot ist auf einem Kanal unterwegs. Es beschleunigt aus dem Stillstand auf die zulässige Fahrgeschwindigkeit von 13 km/h. Dieser Vorgang kann durch folgende Differenzialgleichung näherungsweise beschrieben werden:

$$950 \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 1008 - 45 \cdot v$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
v ... Geschwindigkeit in m/s

1) Bestimmen Sie die zugehörige spezielle Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen.*

2) Bestimmen Sie die Zeit, die das Motorboot braucht, um eine Geschwindigkeit von 13 km/h zu erreichen.

2.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Solarzelle wandelt kurzwellige Strahlungsenergie, wie zum Beispiel Sonnenlicht, direkt in elektrische Energie um. Wenn keine elektrische Energie erzeugt wird, entladen sich die eingebauten Kondensatoren. Der zeitabhängige Spannungsverlauf kann dabei durch eine Exponentialfunktion beschrieben werden.
Die Spannung wurde zu zwei unterschiedlichen Zeitpunkten gemessen. Für $t = 0\,\text{ms}$ beträgt die Spannung $10\,\text{V}$ und für $t = 20\,\text{ms}$ beträgt die Spannung $5\,\text{V}$.

1) Stellen Sie eine Gleichung derjenigen Funktion u auf, die die Entladung des Kondensators beschreibt.

Der Entladevorgang kann auch durch eine Differenzialgleichung beschrieben werden.

2) Kreuzen Sie diejenige Differenzialgleichung an, die den Entladevorgang richtig beschreibt. [1 aus 5]
t ... Zeit in ms
$u(t)$ ... Spannung zur Zeit t in Volt
$k > 0$ ... Proportionalitätsfaktor

$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot u(t)$	$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -k$	$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -k \cdot u(t)$	$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = k \cdot t$	$\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -k \cdot t$
☐	☐	☐	☐	☐

2.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k \cdot v$$

m ... Masse des Bootes
$v(t) > 0$ ... Geschwindigkeit des Bootes
$k > 0$ ... Konstante
t ... Zeit

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

2.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Sedimente sind in Flüssigkeiten enthaltene Teilchen, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft ablagern.
In einer Flüssigkeit sinkt ein Teilchen durch die Schwerkraft ab. Die Sinkgeschwindigkeit v kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 10 - 20 \cdot v$$

t ... Zeit in s
v ... Sinkgeschwindigkeit in m/s

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Differenzialgleichung diejenige Sinkgeschwindigkeit, bei der die Beschleunigung null ist.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen.*

3) Berechnen Sie die Lösung der Differenzialgleichung mit $v(0) = 0{,}2$.

2.10

Die Konzentration von verabreichten Wirkstoffen im Blut nimmt mit der Zeit ab.
Über eine Infusion werden einem Patienten pro Minute 2,3 mg eines Wirkstoffs verabreicht. Gleichzeitig wird ein Teil des Wirkstoffs wieder ausgeschieden.
Die Änderung der Konzentration des Wirkstoffs im Blut lässt sich durch die folgende Differenzialgleichung beschreiben:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{3}{50} \cdot \left(y - \frac{115}{3}\right)$$

$t \ldots$ Zeit in min
$y(t) \ldots$ Konzentration des Wirkstoffs in mg/L

1) Lösen Sie die Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* unter der Voraussetzung, dass sich zu Beginn der Infusion 0 mg des Wirkstoffs im Blut befinden.

2.11

Ein Kondensator ist ein elektronisches Bauelement, das mithilfe einer Batterie aufgeladen werden kann. Ist der Kondensator bei einem Aufladevorgang zu Beginn ungeladen, so kann der Verlauf der Kondensatorspannung durch die Funktion u beschrieben werden. Die zugehörige Differenzialgleichung für die Kondensatorspannung u lautet:

$$\tau \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = U_0$$

1) Berechnen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen* die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2.12

Beim Eindringen von elektromagnetischer Strahlung in ein Medium nimmt die Intensität mit der Eindringtiefe ab. Die Funktion E beschreibt die Intensität der Strahlung in Abhängigkeit von der Eindringtiefe.

$x \ldots$ Eindringtiefe in m
$E(x) \ldots$ Intensität bei der Eindringtiefe x in Watt pro Quadratmeter (W/m^2)

Die 1. Ableitung der Funktion E nach der Eindringtiefe x ist proportional zur Funktion E.

1) Vervollständigen Sie die nachstehende Differenzialgleichung.
Bezeichnen Sie dabei den Proportionalitätsfaktor mit $-k$ $(k > 0)$.

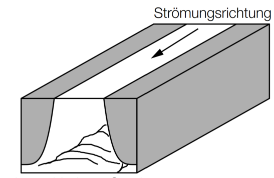
$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = \underline{\hspace{6cm}}$$

Beim Durchgang von Strahlung durch ein Medium treten Störeinflüsse auf. Diese Störeinflüsse werden durch Addition einer Konstanten S auf der rechten Seite der Differenzialgleichung berücksichtigt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen.*

2.13

In einer Kläranlage strömt das Abwasser langsam durch den sogenannten Sandfang. Dabei sinken Sand und kleine Steine auf den Boden und können somit abgeschieden werden (siehe nebenstehende Abbildung). Die Sinkgeschwindigkeit eines Steinchens in einer Flüssigkeit kann modellhaft durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g - k \cdot v$$

$t \ldots$ Zeit
$v(t) \geq 0 \ldots$ Sinkgeschwindigkeit
g, $k \ldots$ positive Konstanten

1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen.*

Die Sinkgeschwindigkeit des Steinchens nähert sich dabei dem Wert v_E.

2) Geben Sie v_E an.

2.1 **a)** Allgemeine Lösung: $y(x) = c \cdot e^{3 \cdot x}$ Spezielle Lösung: $y(x) = 5 \cdot e^{3 \cdot x}$
b) Allgemeine Lösung: $N(t) = \sqrt{c - 2 \cdot \cos(t)}$ Spezielle Lösung: $N(t) = \sqrt{11 - 2 \cdot \cos(t)}$
c) Allgemeine Lösung: $h(x) = c \cdot e^{x} - 15$ Spezielle Lösung: $h(x) = 20{,}96\ldots \cdot e^{x} - 15$
2.2 **1)** $N'(t) = k \cdot N(t)$ **2)** $N(t) = 50 \cdot e^{0{,}0270\ldots \cdot t}$ **3)** Nach 3 Stunden sind rund 6545 Bakterien vorhanden.
2.3 **1)** $T'(t) = k \cdot (T(t) - 24)$ mit $k < 0$ **2)** $T(t) = c \cdot e^{k \cdot t} + 24$ **3)** $T(t) = 16 \cdot e^{-0{,}0191\ldots \cdot t} + 24$
2.4 **1)** $I'(x) = -\lambda \cdot I(x)$ **2)** $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot I \implies \cdots \implies I(x) = c \cdot e^{-\lambda \cdot x}$ $I(0) = I_0 \implies I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$
2.5 **1)** Das Volumen nimmt zu, wenn $\frac{dV}{\mathrm{d}t} = V'(t) > 0$ gilt, also wenn V zwischen $0\,\mathrm{m}^3$ und $350\,\mathrm{m}^3$ liegt.
2) $V(t) = 350 + c \cdot e^{-0{,}001 \cdot t}$
3) $V(t) = 350 - 200 \cdot e^{-0{,}001 \cdot t}$
2.6 **1)** $v(t) = -\frac{112}{5} \cdot e^{-\frac{9}{190} \cdot t} + \frac{112}{5} = \frac{112}{5} \cdot (1 - e^{-\frac{9}{190} \cdot t})$ **2)** $t = 3{,}71\ldots\,\mathrm{s}$
2.7 **1)** $u(t) = 10 \cdot e^{-0{,}034\,65\ldots \cdot t}$ **2)** $\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -k \cdot u(t)$
2.8 **1)** $v'(t) = -\frac{k \cdot v(t)}{m} < 0$ zu jedem Zeitpunkt t, also ist v streng monoton fallend. **2)** $v(t) = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$
2.9 **1)** $0{,}5\,\mathrm{m/s}$ **2)** $v(t) = 0{,}5 - c \cdot e^{-20 \cdot t}$ **3)** $v(t) = 0{,}5 - 0{,}3 \cdot e^{-20 \cdot t}$
2.10 $y(t) = \frac{115}{3} - \frac{115}{3} \cdot e^{-\frac{3}{50} \cdot t}$
2.11 $u(t) = U_0 - c \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$
2.12 **1)** $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -k \cdot E$ **2)** $\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x} = -k \cdot E + S \implies \cdots \implies E(x) = c \cdot e^{-k \cdot x} + \frac{S}{k}$
2.13 **1)** $v(t) = \frac{g}{k} - c \cdot e^{-k \cdot t}$ **2)** $v_E = \frac{g}{k}$

3. Lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Lineare DGL 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

3.1

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) + 3 \cdot y(x) = e^{2\cdot x}$.

a) Berechne die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

b) Ermittle die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL mit Technologieeinsatz.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mit Technologieeinsatz.

d) Berechne jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 0$ erfüllt.

3.2

Ein Swimming-Pool hat die Abmessungen $8\,\text{m} \times 4\,\text{m} \times 2\,\text{m}$.
Die empfohlene Chlor-Konzentration beträgt 0,8 mg/L .

a) Berechne die empfohlene Chlor-Menge für diesen Swimming-Pool in mg.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Chlor-Konzentration im Swimming-Pool nur 0,5 mg/L.

Deshalb wird laufend Wasser mit der Chlor-Konzentration 1,2 mg/L und der Zuflussgeschwindigkeit 0,4 L/s in den Swimming-Pool gepumpt. Gleichzeitig fließt Wasser über einen Abfluss mit der Geschwindigkeit 0,4 L/s ab.
Um zu berechnen, wie lange es dauert, bis die Chlor-Konzentration im Swimming-Pool 0,8 mg/L beträgt, stellen wir eine Differentialgleichung auf:

t ... Zeit in Sekunden
$C(t)$ ... Chlor-Menge im Swimming-Pool in mg
$C'(t)$ ... Änderungsrate der Chlor-Menge im Swimming-Pool in mg/s

Trage Zahlen richtig in die Kästchen ein.

b) Zu jedem Zeitpunkt fließt Chlor mit der Rate $\boxed{}$ mg/s in den Swimming-Pool zu.

c) Zum Zeitpunkt t ist $\dfrac{C(t)}{\boxed{}}$ mg/L die Chlor-Konzentrationen im Swimming-Pool.

Zum Zeitpunkt t fließt Chlor mit der Rate $C(t) \cdot \boxed{}$ mg/s aus dem Swimming-Pool ab.

d) Die Funktion C ist also eine Lösung der folgenden Differentialgleichung:

$$C'(t) = \underbrace{\boxed{}}_{\text{Zuflussrate}} - \underbrace{C(t) \cdot \boxed{}}_{\text{Abflussrate}}$$

e) Ermittle die allgemeine Lösung der Differentialgleichung mit Technologieeinsatz.

f) Ermittle die spezielle Lösung der Differentialgleichung unter Verwendung von $C(0)$.

g) Wie viele Stunden dauert es, bis die Chlor-Konzentration im Swimming-Pool 0,8 mg/L beträgt?

3.3

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{N} + 2 \cdot t = -N(t)$.

a) Berechne die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

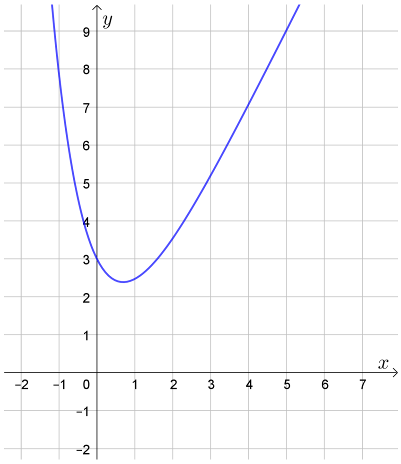
b) Ermittle die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL mit Technologieeinsatz.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mit Technologieeinsatz.

d) Berechne jene spezielle Lösung der DGL, die $N(2) = -1$ erfüllt.

3.4

Gegeben ist die Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y + 2 \cdot x + 1$.



a) Berechne die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen*.

b) Ermittle die partikuläre Lösung der inhomogenen DGL mit Technologieeinsatz.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL mit Technologieeinsatz.

d) Berechne jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 3$ erfüllt.

e) Der Funktionsgraph dieser speziellen Lösung ist links dargestellt. Für $x \to \infty$ nähert sich der Graph einer Gerade asymptotisch an. Ermittle eine Gleichung dieser Gerade und zeichne sie links ein.

3.5

Für bestimmte Fässer kann die Sinkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0{,}25 \cdot v = 2$$

$t \ldots$ Zeit in s
$v(t) \ldots$ Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Zeigen Sie mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*, dass die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung durch $v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ gegeben ist.

2) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzialgleichung.

3.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Im Bereich der Gebäudetechnik spielen Temperatur, Schalldämmung und CO_2-Gehalt der Luft eine wichtige Rolle. In einem Schlafzimmer mit einem Luftvolumen von $45\,\text{m}^3$ wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eine Lüftungsanlage eingeschaltet. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der CO_2-Gehalt der Luft im Zimmer 0,2 Vol.-%, d. h., das CO_2-Volumen beträgt 0,2 % des gesamten Luftvolumens.
Die nachstehende Differenzialgleichung beschreibt das CO_2-Volumen V (in m^3) im Schlafzimmer in Abhängigkeit von der Zeit t (in min) ab dem Einschalten der Lüftung:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 0{,}006 - \frac{V}{3}$$

1) Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieser Differenzialgleichung.

2) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit der ursprüngliche CO_2-Gehalt halbiert ist.

3.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für die Geschwindigkeit eines bestimmten Körpers in einer Flüssigkeit gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = a + b \cdot v$$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s
a, b ... Konstanten

1) Geben Sie die zugehörige homogene Differenzialgleichung an.

Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differenzialgleichung lautet: $v(t) = C \cdot e^{-2 \cdot t}$
C ... Konstante

2) Ermitteln Sie die Konstante b.

Die Lösung dieser Differenzialgleichung lautet für eine bestimmte Anfangsbedingung: $v(t) = 5 - 4 \cdot e^{-2 \cdot t}$

3) Ermitteln Sie die Konstante a.

4) Ermitteln Sie die zugehörige Anfangsbedingung für $t = 0$.

3.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der CO_2-Gehalt der Luft ist ein wichtiger Indikator für die Qualität der Luft. Er wird als Volumenanteil in parts per million (ppm) angegeben.
Die Luft in einem geschlossenen Raum mit einem Luftvolumen von $800\,\text{m}^3$ hat einen CO_2-Gehalt von 1100 ppm.

1) Ermitteln Sie das CO_2-Volumen (in m^3) in diesem Raum.

Eine Lüftungsanlage wird zum Zeitpunkt $t = 0$ eingeschaltet. Es strömt nun gleichmäßig Frischluft mit einem CO_2-Gehalt von 400 ppm in den Raum. Die Durchflussrate beträgt dabei $2{,}5\,\text{m}^3/\text{s}$. Gleichzeitig wird die durchmischte Luft mit derselben Durchflussrate abgesaugt.

2) Stellen Sie eine Differenzialgleichung auf, die das CO_2-Volumen im Raum in Abhängigkeit von der Zeit darstellt. $V(t)$ ist dabei das CO_2-Volumen (in m^3) zum Zeitpunkt t (in s).

3.9

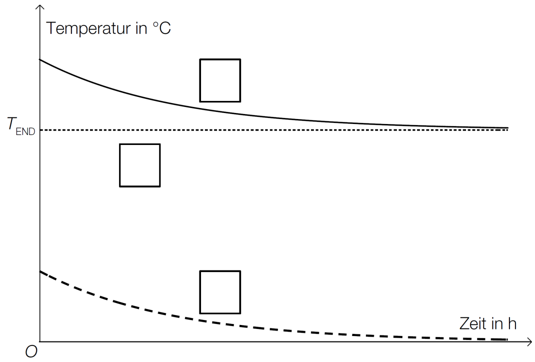
Die Temperatur eines Werkstücks bei einer bestimmten Wärmebehandlung kann in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden. Dabei kann es sich um einen Abkühlungsvorgang oder einen Erwärmungsvorgang handeln. Für den Zusammenhang gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + b \cdot T = a$$

t ... Zeit ab Beginn der Beobachtung in h
$T(t)$ ... Temperatur des Werkstücks zur Zeit t in °C
a, b ... Konstanten

Die Lösung dieser Differenzialgleichung kann mithilfe des Ansatzes $T(t) = T_h(t) + T_p(t)$ und einer Anfangsbedingung bestimmt werden, wobei gilt:
$T(t)$ ... Lösung der Differenzialgleichung
$T_h(t)$ ... Lösung des homogenen Teils der Differenzialgleichung
$T_p(t)$ ... (eine beliebige) partikuläre Lösung der Differenzialgleichung

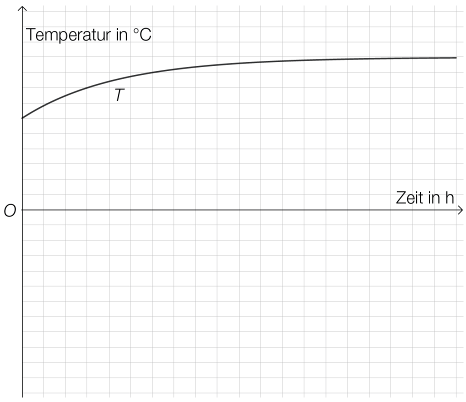
Die nebenstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Abkühlungsvorgang die Graphen von T, T_h und T_p.



1) Geben Sie mithilfe von a und b eine Formel zur Ermittlung von T_{END} an.

$T_{\text{END}} =$ ____________________

2) Tragen Sie in der nebenstehenden Abbildung die richtige Bezeichnung der Graphen in die Kästchen ein (T, T_h bzw. T_p).



Die nebenstehende Abbildung zeigt für einen bestimmten Erwärmungsvorgang den Graphen von T.

3) Skizzieren Sie in der nebenstehenden Abbildung die Graphen von T_p und T_h.

3.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bei einer bestimmten chemischen Reaktion ändern sich die vorhandenen Massen der beteiligten Stoffe mit der Zeit. Für die Masse eines beteiligten Stoffes gilt die folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = 8 - 2 \cdot m$$

$t \ldots$ Zeit ab Beginn der Beobachtung in s
$m(t) \ldots$ Masse dieses Stoffes zur Zeit t in mg

Eine spezielle Lösung dieser Differenzialgleichung wurde unter Verwendung einer Anfangsbedingung ermittelt.

1) Ordnen Sie den beiden Satzanfängen jeweils eine Fortsetzung aus A bis D zu, sodass zutreffende Aussagen entstehen.

Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Lösung des homogenen Teils dieser Differenzialgleichung …	
Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph dieser speziellen Lösung der Differenzialgleichung …	

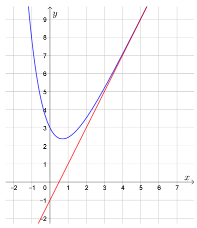
A	… asymptotisch der t-Achse.
B	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 8.
C	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt 4.
D	… asymptotisch der waagrechten Geraden mit Ordinatenabschnitt –2.

3.1 **a)** $y_h(x) = c \cdot e^{-3 \cdot x}$ **b)** $y_p(x) = \frac{1}{5} \cdot e^{2 \cdot x}$ **c)** $y(x) = c \cdot e^{-3 \cdot x} + \frac{1}{5} \cdot e^{2 \cdot x}$ **d)** $y(x) = -\frac{1}{5} \cdot e^{-3 \cdot x} + \frac{1}{5} \cdot e^{2 \cdot x}$

3.2 **a)** $51\,200\,\mathrm{mg}$ **b)** $0{,}48\,\mathrm{mg/s}$ **c)** $\frac{C(t)}{64\,000}\,\mathrm{mg/L}$ $C(t) \cdot 0{,}000\,006\,25\,\mathrm{mg/s}$ **d)** $C'(t) = 0{,}48 - C(t) \cdot 0{,}000\,006\,25$
e) $C(t) = c \cdot e^{-0{,}000\,006\,25 \cdot t} + 76\,800$ **f)** $C(t) = -44\,800 \cdot e^{-0{,}000\,006\,25 \cdot t} + 76\,800$ **g)** 24,87... h

3.3 **a)** $N_h(t) = c \cdot e^{-t}$ **b)** $N_p(t) = -2 \cdot t + 2$ **c)** $N(t) = c \cdot e^{-t} - 2 \cdot t + 2$ **d)** $N(t) = 7{,}389\ldots \cdot e^{-t} - 2 \cdot t + 2$

3.4 **a)** $y_h(x) = c \cdot e^{-x}$ **b)** $y_p(x) = 2 \cdot x - 1$ **c)** $y(x) = c \cdot e^{-x} + 2 \cdot x - 1$ **d)** $y(x) = 4 \cdot e^{-x} + 2 \cdot x - 1$ **e)** $y = 2 \cdot x - 1$



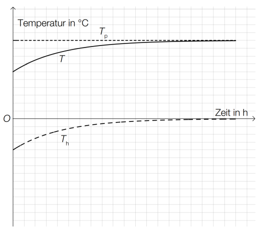
3.5 **1)** $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0{,}25 \cdot v = 0 \implies \cdots \implies v_h(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t}$ **2)** $v(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 8$

3.6 **1)** $V(t) = C \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$ **2)** Spezielle Lösung: $V(t) = 0{,}072 \cdot e^{-\frac{t}{3}} + 0{,}018$ Halbierung nach 2,94... h

3.7 **1)** $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = b \cdot v$ **2)** $b = -2$ **3)** $a = 10$ **4)** $v(0) = 1$

3.8 **1)** $0{,}88\,\mathrm{m}^3$ **2)** $V'(t) = 0{,}001 - 0{,}003\,125 \cdot V(t)$

3.9 **1)** $T_{\mathrm{END}} = \frac{a}{b}$ **2)** von oben nach unten: T, T_p, T_h **3)**



3.10 Oben: A Unten: C

4. Variation der Konstanten

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Variation der Konstanten

4.1

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) - \frac{4 \cdot y(x)}{x} = x^2$.

a) Ermittle die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

b) Ermittle eine Lösung der inhomogenen DGL mithilfe der Methode *Variation der Konstanten.*

c) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(4) = 1$ erfüllt.

4.2

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) + e^{5 \cdot x} + 3 \cdot y(x) = 0$.

a) Ermittle die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

b) Ermittle eine Lösung der inhomogenen DGL mithilfe der Methode *Variation der Konstanten.*

c) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 3$ erfüllt.

4.3

Gegeben ist die Differentialgleichung $y'(x) + \cos(x) \cdot y(x) = 4 \cdot \cos(x)$.

a) Ermittle die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

b) Ermittle eine Lösung der inhomogenen DGL mithilfe der Methode *Variation der Konstanten.*

Hinweis: Eine Stammfunktion von $f(x) = 4 \cdot \cos(x) \cdot e^{\sin(x)}$ kannst du mithilfe einer Substitution ermitteln.

c) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 0$ erfüllt.

4.4

Gegeben ist die Differentialgleichung $\dot{N}(t) + 2 \cdot t = -N(t)$.

a) Ermittle die allgemeine Lösung der homogenen DGL mithilfe der Methode *Trennung der Variablen.*

b) Ermittle eine Lösung der inhomogenen DGL mithilfe der Methode *Variation der Konstanten.*

Hinweis: Eine Stammfunktion von $f(x) = x \cdot e^x$ kannst du mithilfe einer partiellen Integration ermitteln.

c) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $N(0) = 5$ erfüllt.

4.1 **a)** $y_h(x) = c \cdot x^4$ **b)** $y_p(x) = -x^3$ **c)** $y(x) = \frac{65}{256} \cdot x^4 - x^3$

4.2 **a)** $y_h(x) = c \cdot e^{-3 \cdot x}$ **b)** $y_p(x) = -\frac{1}{8} \cdot e^{5 \cdot x}$ **c)** $y(x) = \frac{25}{8} \cdot e^{-3 \cdot x} - \frac{1}{8} \cdot e^{5 \cdot x}$

4.3 **a)** $y_h(x) = c \cdot e^{-\sin(x)}$ **b)** $y_p(x) = 4$ **c)** $y(x) = -4 \cdot e^{-\sin(x)} + 4$

4.4 **a)** $N_h(t) = c \cdot e^{-t}$ **b)** $N_p(t) = -2 \cdot t + 2$ **c)** $N(t) = 3 \cdot e^{-t} - 2 \cdot t + 2$

5. Lineare DGL zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

5.1

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(x) = 2 \cdot y'(x) + 15 \cdot y(x)\,.$

a) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL.

b) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = 3$ und $y'(0) = -4$ erfüllt.

5.2

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(x) = 8 \cdot y'(x) - 16 \cdot y(x)\,.$

a) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL.

b) Ermittle jene spezielle Lösung der DGL, die $y(0) = -2$ und $y'(0) = 3$ erfüllt.

5.3

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(x) + 10 \cdot y'(x) + 29 \cdot y(x) = 0\,.$
Berechne α und $\beta > 0$ so, dass

$$y(x) = 4 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin\left(\beta \cdot x + \frac{\pi}{2}\right)$$

eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ist.

5.4

Gegeben ist die Differentialgleichung $y''(x) + a \cdot y'(x) + b \cdot y(x) = 0\,.$
Ermittle a und b so, dass

$$y(x) = 3 \cdot e^{4 \cdot x} + 5 \cdot e^{-2 \cdot x}$$

eine spezielle Lösung dieser Differentialgleichung ist.

5.5

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung $y''(x) + 2 \cdot y'(x) - 3 \cdot y(x) = 27 \cdot x^2\,.$

a) Ermittle die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL.

Die inhomogene DGL hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c\,.$

b) Ermittle diese partikuläre Lösung y_p.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

5.6

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung $y''(x) - 8 \cdot y'(x) + 16 \cdot y(x) = e^{2 \cdot x}$.

a) Ermittle die allgemeine Lösung y_h der zugehörigen homogenen DGL.

Die inhomogene DGL hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = c \cdot e^{2 \cdot x}$.

b) Ermittle diese partikuläre Lösung y_p.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

5.7

Gegeben ist die inhomogene Differentialgleichung $y''(x) - 10 \cdot y'(x) + 29 \cdot y(x) = 13 \cdot \sin(3 \cdot x)$.

a) Berechne α und $\beta > 0$ so, dass

$$y(x) = c_1 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x) + c_2 \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.

Die inhomogene DGL hat eine partikuläre Lösung y_p mit $y_p(x) = a \cdot \cos(3 \cdot x) + b \cdot \sin(3 \cdot x)$.

b) Ermittle diese partikuläre Lösung y_p.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

5.8

Ein Körper mit der Masse $m > 0$ befindet sich im freien Fall.
Mit $h(t)$ wird die Höhe des Körpers über dem Boden zum Zeitpunkt t abgekürzt.
Wirkt neben der Gravitationskraft $m \cdot g$ auch eine Reibungskraft, die direkt proportional zur Geschwindigkeit ist, dann gilt: **Stokes-Reibung**

$$m \cdot h''(t) = -m \cdot g - r \cdot h'(t) \quad \text{mit } r > 0$$

a) Stelle mithilfe von m und r eine Formel für die allgemeine Lösung h_{hom} der zugehörigen homogenen DGL auf.

Die inhomogene DGL hat eine partikuläre Lösung h_p mit $h_p(t) = c \cdot t$.

b) Stelle mithilfe von g, m und r eine Formel für diese partikuläre Lösung h_p auf.

Für die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL gilt also:

$$h(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-\frac{r}{m} \cdot t} - \frac{m \cdot g}{r} \cdot t$$

Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt $v_0 > 0$.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Körper in der Höhe $h_0 > 0$ über dem Boden.

c) Stelle mithilfe von h_0, v_0, g, m und r jeweils eine Formel für c_1 und c_2 auf.

5.9

Eine Kugel mit der Masse $m = 3\,\text{kg}$ hängt an einer Feder mit der Federkonstante $k = 42\,\text{N/mm}$.
Die Ruhelage der Kugel ist $y = 0$. Die Auslenkung der Kugel zum Zeitpunkt t ist $y(t)$.
Bei einer linear gedämpften Schwingung gilt:

$$m \cdot y''(t) = -k \cdot y(t) - d \cdot y'(t)$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden
$y(t) \ldots$ Auslenkung in Metern

a) Entscheide mithilfe der Differentialgleichung, welche SI-Einheit die Dämpfungskonstante d hat:

☐ N/m ☐ kg/s ☐ kg/s^2 ☐ N · m ☐ kg · m/s

b) Berechne die Dämpfungskonstante d so, dass der aperiodische Grenzfall eintritt.

Hinweis: Der aperiodische Grenzfall tritt ein, wenn die zugehörige charakteristische Gleichung genau eine Lösung hat.

c) Ermittle die allgemeine Lösung der DGL im aperiodischen Grenzfall.

5.1 **a)** $y(x) = c_1 \cdot e^{5\cdot x} + c_2 \cdot e^{-3\cdot x}$ **b)** $y(x) = 0{,}625 \cdot e^{5\cdot x} + 2{,}375 \cdot e^{-3\cdot x}$

5.2 **a)** $y(x) = c_1 \cdot e^{4\cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{4\cdot x}$ **b)** $y(x) = -2 \cdot e^{4\cdot x} + 11 \cdot x \cdot e^{4\cdot x}$

5.3 $\alpha = -5,\ \beta = 2$

5.4 $a = -2,\ b = -8$

5.5 **a)** $y_h(x) = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-3\cdot x}$ **b)** $y_p(x) = -9 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 14$ **c)** $y(x) = c_1 \cdot e^{x} + c_2 \cdot e^{-3\cdot x} - 9 \cdot x^2 - 12 \cdot x - 14$

5.6 **a)** $y_h(x) = c_1 \cdot x \cdot e^{4\cdot x} + c_2 \cdot e^{4\cdot x}$ **b)** $y_p(x) = \frac{1}{4} \cdot e^{2\cdot x}$ **c)** $y(x) = c_1 \cdot x \cdot e^{4\cdot x} + c_2 \cdot e^{4\cdot x} + \frac{1}{4} \cdot e^{2\cdot x}$

5.7 **a)** $\alpha = 5,\ \beta = 2$

b) $y_p(x) = 0{,}3 \cdot \cos(3 \cdot x) + 0{,}2 \cdot \sin(3 \cdot x)$

c) $y(x) = c_1 \cdot e^{5\cdot x} \cdot \cos(2 \cdot x) + c_2 \cdot e^{5\cdot x} \cdot \sin(2 \cdot x) + 0{,}3 \cdot \cos(3 \cdot x) + 0{,}2 \cdot \sin(3 \cdot x)$

5.8 **a)** $h_{\text{hom}}(t) = c_1 + c_2 \cdot e^{-\frac{r}{m} \cdot t}$

b) $h_p(t) = -\frac{m \cdot g}{r} \cdot t$

c) $c_1 = h_0 - \frac{v_0 \cdot m}{r} + \frac{m^2 \cdot g}{r^2}$ $c_2 = \frac{v_0 \cdot m}{r} - \frac{m^2 \cdot g}{r^2}$

5.9 **a)** kg/s **b)** $d = 709{,}9\ldots$ kg/s **c)** $y(t) = c_1 \cdot e^{-118{,}3\ldots\cdot t} + c_2 \cdot t \cdot e^{-118{,}3\ldots\cdot t}$