AUFGABENSAMMLUNG – EXPONENTIAL- UND LOGARITHMUSFUNKTIONEN

Inhaltsverzeichnis

1. Exponentialfunktionen 2
2. Logarithmus & Exponentialgleichungen 9
3. Logarithmusfunktionen & Logarithmusgleichungen 15
4. Beschränktes Wachstum 21
5. Logarithmische Skalierung 26

Unterrichtsmaterialien – Exponential- und Logarithmusfunktionen MmF

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ Arbeitsblatt – Exponentialfunktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen
- ✓ Arbeitsblatt – Beschränktes Wachstum
- ✓ Arbeitsblatt – Logarithmische Skalierung

Wie darf ich die Aufgaben verwenden? MmF

Das MmF-Team entwickelt eigene Aufgabenstellungen. Sie sind mit dem Projektlogo MmF gekennzeichnet.

Diese Aufgaben werden unter einer Creative Commons BY-NC-ND 4.0 Lizenz bereitgestellt.
Das bedeutet:

- Die Aufgaben stehen *kostenfrei* zur Verfügung.
- Es dürfen auch nur einzelne Aufgaben aus der Aufgabensammlung für nicht-kommerzielle Zwecke (Lehre, Übungen, Prüfungen, etc.) kopiert werden. In diesem Fall *muss* der Ursprung der Aufgabe aber z.B. anhand des MmF-Logos erkennbar sein.

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der AHS bzw. BHS.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 10. April 2024

1. Exponentialfunktionen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Exponentialfunktionen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

1.1

Für die lineare Funktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot x + 2$

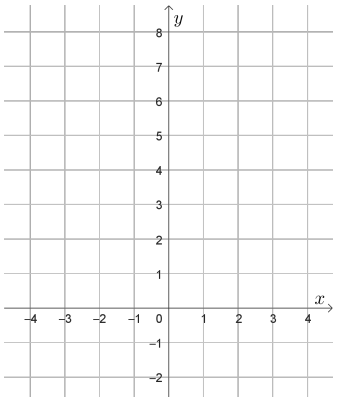
a) Der Funktionsgraph schneidet die senkrechte Achse im Punkt $\left(\square \mid \square\right)$.

b) Gibt es eine Stelle x, an der die Funktion einen negativen Wert annimmt? Begründe deine Antwort.

c) Begründe, ob $f(x+1) - f(x)$ konstant ist, also *nicht* von x abhängt.

d) Begründe, ob $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ konstant ist, also *nicht* von x abhängt.

e) Skizziere rechts den Funktionsgraphen.



1.2

Für die Potenzfunktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot x^2$

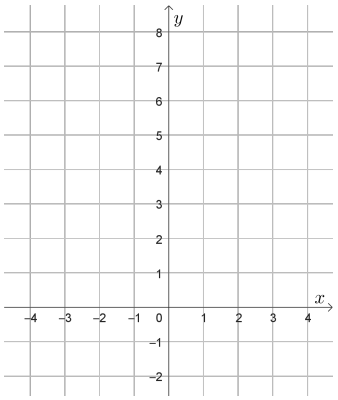
a) Der Funktionsgraph schneidet die senkrechte Achse im Punkt $\left(\square \mid \square\right)$.

b) Gibt es eine Stelle x, an der die Funktion einen negativen Wert annimmt? Begründe deine Antwort.

c) Begründe, ob $f(x+1) - f(x)$ konstant ist, also *nicht* von x abhängt.

d) Begründe, ob $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ konstant ist, also *nicht* von x abhängt.

e) Skizziere rechts den Funktionsgraphen.



1.3

Für die Exponentialfunktion f gilt: $f(x) = 4 \cdot 2^x$

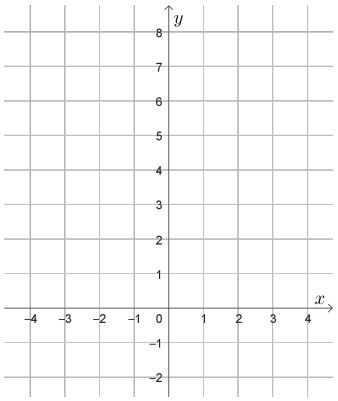
a) Der Funktionsgraph schneidet die senkrechte Achse im Punkt $\left(\square \mid \square\right)$.

b) Gibt es eine Stelle x, an der die Funktion einen negativen Wert annimmt? Begründe deine Antwort.

c) Begründe, ob $f(x+1) - f(x)$ konstant ist, also *nicht* von x abhängt.

d) Begründe, ob $\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$ konstant ist, also *nicht* von x abhängt.

e) Skizziere rechts den Funktionsgraphen.



1.4

Eine Population vergrößert sich exponentiell. Dabei gilt: $N(t) = N_0 \cdot 1{,}3^t$

t ... Zeit in Monaten

$N(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

a) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum N_0 die Populationsgröße zu Beginn ($t = 0$) ist.

b) Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

$N(2) = N_0 \cdot \square = \square$ % von N_0

Nach 2 Monaten ist die Population also um $\square$ % größer als zu Beginn.

1.5

Eine Population verkleinert sich exponentiell. Dabei gilt: $N(t) = N_0 \cdot 0{,}8^t$

t ... Zeit in Monaten

$N(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

a) Trage richtige Zahlen in die Kästchen ein.

$N(2) = N_0 \cdot \square = \square$ % von N_0

Nach 2 Monaten ist die Population also um $\square$ % kleiner als zum Zeitpunkt $t = 0$.

1.6

Die folgenden Zusammenhänge sind entweder linear oder exponentiell.

Kreuze jeweils richtig an, und stelle eine Funktionsgleichung auf.

a) Ein Kapital von 42 € wächst jährlich um 3 %.

$K(n)$ ... Kapital in € nach n Jahren

K ist eine ☐ lineare Funktion. ☐ Exponentialfunktion.

b) Eine 40 cm hohe Kerze wird angezündet. Pro Stunde wird die Kerzenhöhe um 3 cm kleiner.

$h(t)$ ... Kerzenhöhe in cm nach t Stunden

h ist eine ☐ lineare Funktion. ☐ Exponentialfunktion.

c) Ein Auto mit Geschwindigkeit 30 m/s wird abgebremst. Pro Sekunde sinkt die Geschwindigkeit um 6 m/s.

$v(t)$ ... Geschwindigkeit in m/s nach t Sekunden

v ist eine ☐ lineare Funktion. ☐ Exponentialfunktion.

d) Im Blut sind 70 mg eines Wirkstoffs. Pro Stunde wird $\frac{1}{4}$ des vorhandenen Wirkstoffs abgebaut.

$W(t)$ ... Wirkstoffmenge in mg im Blut nach t Stunden

W ist eine ☐ lineare Funktion. ☐ Exponentialfunktion.

e) Das Wasservolumen in einer anfangs leeren Badewanne wird alle 2 Minuten um $\frac{1}{8}$ m^3 größer.

$V(t)$ ... Wasservolumen in m^3 nach t Minuten

V ist eine ☐ lineare Funktion. ☐ Exponentialfunktion.

f) Die Höhe einer 3 cm hohen Pflanze verdoppelt sich alle 19 Tage.

$h(t)$ ... Pflanzenhöhe in cm nach t Tagen

h ist eine ☐ lineare Funktion. ☐ Exponentialfunktion.

1.7

Gib jeweils den Parameter a der zugehörigen Gleichung der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$ an.
Im Intervall $[x; x+1]$ verändern sich die Funktionswerte jeweils wie angegeben:

a) Vermehrung um 2,8 % $a =$ _____

b) Abnahme um 7 % $a =$ _____

c) Abnahme auf 75,3 % $a =$ _____

d) Vermehrung auf 105,3 % $a =$ _____

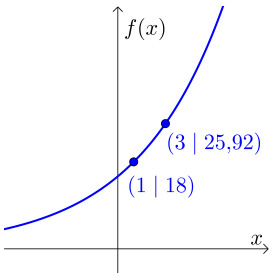
e) 15 %-iges Wachstum $a =$ _____

f) 37 %-ige Abnahme $a =$ _____

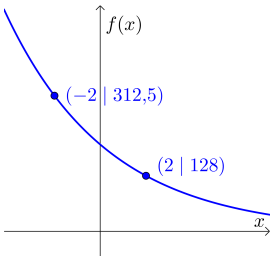
1.8

Auf dem dargestellten Graphen der Exponentialfunktion $f(x) = c \cdot a^x$ sind zwei Punkte markiert.
Ermittle eine Gleichung der Exponentialfunktion.

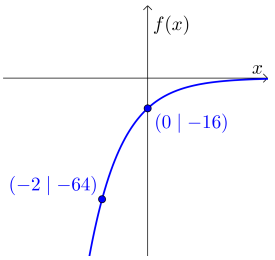
a)



b)



c)



1.9

Die Gerüchteküche brodelt. Die Anzahl an Personen, die das Gerücht nach t Stunden kennen, wird näherungsweise durch die folgende Exponentialfunktion P beschrieben:

$$P(t) = 2 \cdot 4^{3 \cdot t}$$

t ... Zeit in Stunden ($t \geq 0$)
$P(t)$ ... Anzahl Personen, die das Gerücht zum Zeitpunkt t kennen

a) Wie viele Personen kennen zu Beginn ($t = 0$) das Gerücht?

b) Wie viele Personen kennen das Gerücht nach 30 Minuten?

c) Wie lang dauert es bis sich die Anzahl der Personen, die das Gerücht kennt, vervierfacht?

1.10

Berechne jeweils den Parameter a der zugehörigen Gleichung der Exponentialfunktion f mit $f(x) = c \cdot a^x$.

a) Für $x = 1620$ beträgt der Funktionswert nur noch die Hälfte des Werts an der Stelle $x = 0$.

b) An der Stelle $x = 199$ beträgt der Funktionswert nur noch 1 % des Werts an der Stelle $x = 0$.

1.11 MmF

Der Zerfall von radioaktivem Jod 131 wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}071\,92 \cdot t}$$

t ... Zeit in Tagen
$N(t)$ ... vorhandene Jodmenge nach t Tagen

a) Erkläre, warum N_0 die zu Beginn ($t = 0$) vorhandene Menge ist.

b) Berechne, wie viel Prozent der vorhandenen Menge pro Tag zerfallen.

c) Berechne, wie viel Prozent der vorhandenen Menge pro Woche zerfallen.

d) Lukas behauptet, dass nach 40 Tagen noch mehr als die Hälfte der Ausgangsmenge vorhanden ist. Prüfe, ob seine Aussage stimmt.

1.12 MmF

Die Funktion g mit $g(x) = -18 \cdot 1{,}5^{4 \cdot x - 2}$ ist auch eine Exponentialfunktion. Es gilt also: $g(x) = c \cdot a^x$

Verwende die Rechenregeln für Potenzen, um a und c zu ermitteln.

1.13 MmF

a) Gegeben ist die lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$. Zeige, dass

$$f(x + \Delta x) - f(x)$$

lineares Wachstum → gleiche *absolute* Zunahme in Intervallen mit gleicher Breite Δx

nur von k und Δx abhängt, aber nicht von x oder d.

b) Gegeben ist die Exponentialfunktion g mit $g(x) = c \cdot a^x$. Zeige, dass

$$\frac{g(x + \Delta x)}{g(x)}$$

exponentielles Wachstum → gleiche *relative* Zunahme in Intervallen mit gleicher Breite Δx

nur von a und Δx abhängt, aber nicht von x oder c.

1.14 Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bauer Waldner weiß, dass sich der Holzbestand seines Waldes um ca. 2,7 % pro Jahr bezogen auf das jeweilige Vorjahr vermehrt. Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt der Holzbestand 36 000 m^3.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung für diejenige Funktion f auf, die den Holzbestand in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren angibt.

1.15 Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Auf einer österreichischen Transitroute wurden im Jahr 2003 insgesamt 1 700 000 Fahrten gezählt. Im Jahr 2011 waren es bereits 2 006 000 Fahrten.

1) Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Anzahl der Fahrten auf dieser Route mit einer Exponentialfunktion der Form $y(t) = a \cdot b^t$ beschreibt.

t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ im Jahr 2003
$y(t)$ ... Zahl der jährlichen Fahrten zur Zeit t

1.16

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen kann näherungsweise durch folgende Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = e^{3{,}05-0{,}00145 \cdot t}$$

t ... Lebensalter in Jahren
$N(t)$ ... Anzahl der Neuronen im Lebensalter t in Milliarden

a) In einem Zeitschriftenartikel wird behauptet: „Innerhalb von 50 Jahren nimmt die Anzahl der Neuronen in der Großhirnrinde bei Frauen um 10 % ab."

1) Überprüfen Sie mithilfe des gegebenen Modells, ob diese Behauptung für die ersten 50 Lebensjahre zutrifft.

b) **1)** Formen Sie die gegebene Funktionsgleichung in die Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ um.

1.17

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Zahl der Verletzungen beim Schifahren ist rückläufig. Sie nimmt pro Jahr um ca. 2 % im Vergleich zum Vorjahreswert ab. Im Jahr 2009 gab es österreichweit etwa 66 200 Verletzungen.

1) Erstellen Sie eine Funktion, mit der Sie die Anzahl der Verletzungen beim Schifahren in Abhängigkeit von der Zeit t modellieren können.

2) Berechnen Sie die ungefähre Zahl der Verletzungen im Jahr 2014.

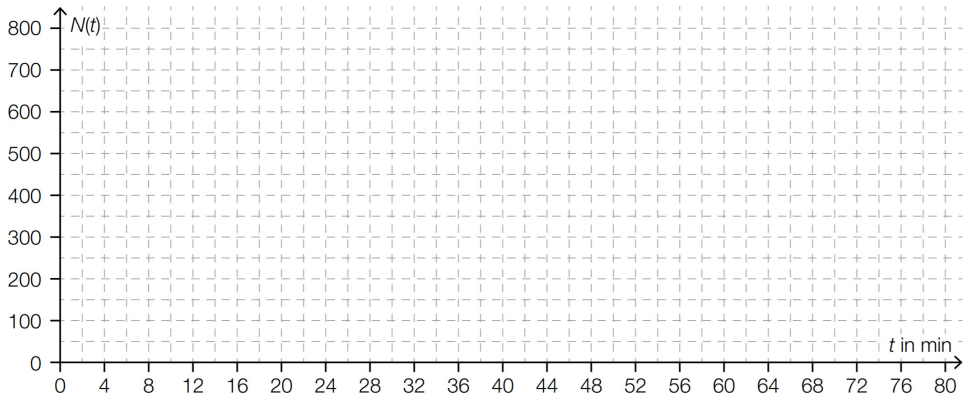
1.18

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Verdoppelungszeit des *Streptococcus-lactis-Bakteriums* beträgt 26 min.
Zu Beginn ($t = 0$) sind 100 Bakterien vorhanden.
Die Anzahl der Bakterien soll in Abhängigkeit von der Zeit durch eine Exponentialfunktion N beschrieben werden.
t ... Zeit in min
$N(t)$ ... Anzahl der Bakterien zur Zeit t

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion N.

2) Zeichnen Sie im nachstehenden Diagramm den Graphen von N ein.



1.19

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die Abbaurate von Koffein kann von Person zu Person stark variieren.

a) Für Lena liegt die Halbwertszeit bei 1,5 Stunden.

1) Modellieren Sie den Abbau von 80 mg Koffein in Abhängigkeit von der Zeit t (in Stunden) mithilfe einer Exponentialfunktion.

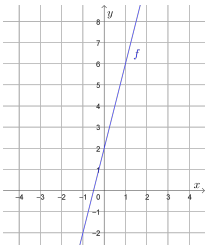
b) Klara hat eine große Prüfung vor sich und muss dafür lernen. Um beim Lernen „fit“ zu sein, trinkt sie um 16 Uhr einen Energydrink, der 80 mg Koffein enthält. Um 17:30 Uhr isst sie eine Tafel Bitterschokolade, die 90 mg Koffein enthält. Der Abbau von Koffein in Klaras Körper wird durch folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

$$N(t) = N_0 \cdot 0{,}396\,85^t$$

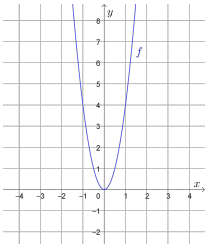
$N(t)$ ... Koffeinmenge in Milligramm (mg) zur Zeit t
N_0 ... Koffeinmenge in mg zur Zeit $t = 0$
t ... Zeit in Stunden (h)

1) Berechnen Sie, wie viel Koffein Klara um 20 Uhr in ihrem Körper hat.

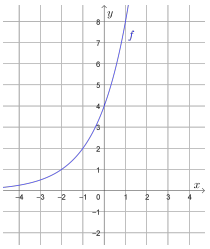
1.1 **a)** $(0 \mid 2)$ **b)** Ja, zum Beispiel $f(-1) = -2$.
c) Die Differenz ist konstant: $f(x+1) - f(x) = 4 \cdot (x+1) + 2 - (4 \cdot x + 2) = \cdots = 4$
d) Der Quotient ist *nicht* konstant. Zum Beispiel: $\frac{f(1)}{f(0)} = \frac{6}{2} = 3$, aber $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{10}{6} = 1{,}666\ldots$
e)



1.2 **a)** $(0 \mid 0)$ **b)** Nein, da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, kann $4 \cdot x^2$ nicht negativ sein.
c) Die Differenz ist *nicht* konstant. Zum Beispiel: $f(1) - f(0) = 4 - 0 = 4$, aber $f(2) - f(1) = 16 - 4 = 12$
d) Der Quotient ist konstant: $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{4 \cdot 2^{x+1}}{4 \cdot 2^x} = \cdots = 2$
e)



1.3 **a)** $(0 \mid 4)$ **b)** Nein, da $2^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, kann $4 \cdot 2^x$ nicht negativ sein.
c) Die Differenz ist *nicht* konstant. Zum Beispiel: $f(1) - f(0) = 8 - 4 = 4$, aber $f(2) - f(1) = 16 - 8 = 8$
d) Der Quotient ist *nicht* konstant. Zum Beispiel: $\frac{f(2)}{f(1)} = \frac{16}{4} = 4$, aber $\frac{f(3)}{f(2)} = \frac{32}{16} = 2$
e)



1.4 **a)** $N(0) = N_0 \cdot 1{,}3^0 = N_0 \cdot 1 = N_0$ **b)** $N(2) = N_0 \cdot 1{,}69 = 169\,\%$ von N_0
Nach 2 Monaten ist die Population also um 69 % größer als zum Zeitpunkt $t = 0$.

1.5 **a)** $N(2) = N_0 \cdot 0{,}64 = 64\,\%$ von N_0
Nach 2 Monaten ist die Population also um 36 % kleiner als zum Zeitpunkt $t = 0$.

1.6 **a)** $K(n) = 42 \cdot 1{,}03^n$ **b)** $h(t) = 40 - 3 \cdot t$ **c)** $v(t) = 30 - 6 \cdot t$ **d)** $W(t) = 70 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$ **e)** $V(t) = 0{,}0625 \cdot t$ **f)** $h(t) = 3 \cdot 2^{\frac{t}{19}}$

1.7 **a)** $a = 1{,}028$ **b)** $a = 0{,}93$ **c)** $a = 0{,}753$ **d)** $a = 1{,}053$ **e)** $a = 1{,}15$ **f)** $a = 0{,}63$

1.8 **a)** $f(x) = 15 \cdot 1{,}2^x$ **b)** $f(x) = 200 \cdot 0{,}8^x$ **c)** $f(x) = -16 \cdot 0{,}5^x$

1.9 **a)** 2 Personen **b)** 16 Personen **c)** $\frac{1}{3}$ h = 20 min

1.10 **a)** $a = 0{,}999\,57\ldots$ **b)** $a = 0{,}977\,12\ldots$

1.11 **a)** $N(0) = N_0 \cdot e^0 = N_0$, also ist N_0 die vorhandene Jodmenge zum Zeitpunkt $t = 0$.
b) 6,93…%
c) 39,55…%
d) Die Aussage stimmt nicht. Es sind nur mehr rund 5,6 % vorhanden.

1.12 $a = 5{,}0625,\ c = -8$

1.13 **a)** $f(x + \Delta x) - f(x) = k \cdot (x + \Delta x) - k \cdot x = \cdots = k \cdot \Delta x$ **b)** $\frac{g(x + \Delta x)}{g(x)} = \frac{c \cdot a^{x+\Delta x}}{c \cdot a^x} = \cdots = a^{\Delta x}$

1.14 $f(t) = 36\,000 \cdot 1{,}027^t$, t … Zeit (in Jahren), $f(t)$ … Holzbestand (in m^3) nach t Jahren

1.15 $y(t) = 1\,700\,000 \cdot 1{,}0209\ldots^t$

1.16 **a)** Die Aussage ist falsch, weil die Abnahme der Neuronenanzahl 6,9… % beträgt. **b)** $N(t) = 21{,}11\ldots \cdot 0{,}998\,55\ldots^t$

1.17 **1)** $A(t) = 66\,200 \cdot 0{,}98^t$ **2)** $\approx 59\,840$ Verletzungen

1.18 $B(t) = 100 \cdot 2^{\frac{1}{26} \cdot t} = 100 \cdot 1{,}027\ldots^t$. Der Graph sollte durch $(0 \mid 100)$, $(26 \mid 200)$, $(52 \mid 400)$ und $(78 \mid 800)$ verlaufen.

1.19 **a)** $N(t) = 80 \cdot 0{,}5^{\frac{1}{1{,}5} \cdot t}$ **b)** 10,91… mg

2. Logarithmus & Exponentialgleichungen

MmF-Materialien MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

Zerlege den Term so weit wie möglich.

a) $\ln\left(x \cdot (y+z)^2\right)$ **b)** $\lg\left[\left(\frac{x^2}{y-1}\right)^3\right]$ **c)** $\log_{42}\left(\frac{(x+1)^2}{y^2+1}\right)$ **d)** $\lg\left(x^2 \cdot y^3 \cdot \sqrt{z}\right)$ **e)** $\lg\left(\frac{x+y}{z^2}\right)$

f) $\lg\left(\sqrt[5]{\frac{x^3 \cdot z^2}{y}}\right)$ **g)** $\lg\left(\frac{x^2-y^2}{\sqrt[3]{a^z}}\right)$

2.2

Die Masse m_S der Sonne ist ca. 330 000 Mal so groß wie die Masse m_E der Erde. Welcher Zusammenhang besteht somit zwischen den Zehnerlogarithmen der beiden Massen, also zwischen $M_S = \lg(m_S)$ und $M_E = \lg(m_E)$?

2.3

Schreibe den gegebenen Ausdruck als Logarithmus eines möglichst einfachen Terms.

1) $5 \cdot \lg(x) - 2 \cdot \lg(y) + \lg\left(\frac{z}{2}\right)$ **2)** $3 \cdot \left[\lg(5 \cdot x) + \lg(x^3)\right]$ **3)** $\lg(x) - \lg\left(\frac{1}{x}\right) + 42$

2.4

Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $7^x = 4$ **b)** $3 \cdot 4^{2 \cdot x - 1} - 2 = 40$ **c)** $\frac{e^{5 \cdot x} + 3}{4} = 2$ **d)** $\frac{-3}{e^{2 \cdot x - 3} - 8} = 5$ **e)** $8^{x^2 - 4 \cdot x + 1} = 5$

2.5

Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $16^{x-5} = 5$

b) $64^{x-5} = 40$

c) $64^{x+3} = 125$

d) $2^{x-10} = 3125$

e) $100^{x+1} = 128$

f) $512^{x+1} = 625$

g) $16^{x-3} = 40$

h) $25^{x+2} = 128$

i) ☆ $5^{2 \cdot x} + 5^{2 \cdot x - 3} = 126$

j) ☆ $e^{2 \cdot x} + e^x - 2 = 0$

2.6 MmF

Ergänze jeweils die fehlenden Darstellungen.

$n(t) = n_0 \cdot e^{\pm\lambda \cdot t}$	$n(t) = n_0 \cdot a^t$	$n(t) = n_0 \cdot \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^t$
$n(t) = 250 \cdot e^{-0{,}05 \cdot t}$		
	$n(t) = 3\,500 \cdot 0{,}92^t$	
		$n(t) = 137 \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^t$
$n(t) = 250 \cdot e^{-3 \cdot 10^{-4} \cdot t}$		
	$n(t) = 1{,}2 \cdot 10^3 \cdot 1{,}054^t$	
		$n(t) = 2{,}3 \cdot 10^4 \cdot \left(1 - \frac{1{,}3}{100}\right)^t$

2.7 MmF

a) Wandle die Gleichung der Exponentialfunktion in die Form $f(t) = c \cdot a^t$ um.
Gilt $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$ oder $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = -\infty$?

1) $f(t) = 5 \cdot e^{0{,}42 \cdot t}$ **2)** $f(t) = 6 \cdot e^{-0{,}86 \cdot t}$ **3)** $f(t) = -3 \cdot e^{-0{,}15 \cdot t}$ **4)** $f(t) = -6 \cdot e^{0{,}9 \cdot t}$

b) Wandle die Gleichung der Exponentialfunktion in die Form $f(t) = c \cdot e^{\lambda \cdot t}$ um.
Gilt $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \infty$ oder $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = -\infty$?

1) $f(x) = -12 \cdot 0{,}98^t$ **2)** $f(x) = 3 \cdot 1{,}0012^t$ **3)** $f(x) = -5 \cdot 0{,}42^t$ **4)** $f(x) = -6 \cdot 1{,}05^t$

2.8 MmF

Die *Radiokarbonmethode* (C14-Methode) funktioniert folgendermaßen: Lebende Organismen haben einen näherungsweise konstanten Anteil an C14-Atomen. Nach dem Tod nimmt die Anzahl der noch vorhandenen C14-Atome exponentiell mit der Halbwertszeit 5730 Jahre ab. Aus der noch vorhandenen Anzahl an C14-Atomen kann man zurückrechnen, wie lange der Organismus schon tot ist.
Beim im Jahr 1991 in den Ötztaler Alpen gefunden „Ötzi“ waren noch rund 53 % der C14-Atome vorhanden.
Wie viele Jahre war Ötzi demnach zu diesem Zeitpunkt schon tot?

2.9 MmF

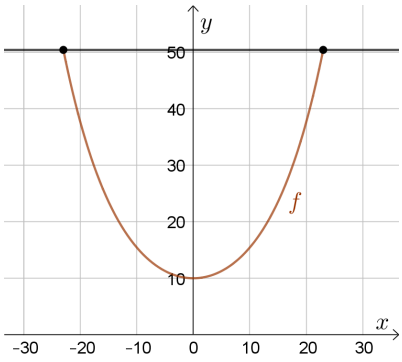
Begründe jeden Schritt in der folgenden Gleichungskette:

$$3^{\log_3(4) \cdot \log_4(3)} = \left(3^{\log_3(4)}\right)^{\log_4(3)} = 4^{\log_4(3)} = 3$$

Welche Zahl ist also $\log_3(4) \cdot \log_4(3)$?
Ob das ein Zufall ist? Stelle eine allgemeine Vermutung auf und beweise sie.

2.10

Wenn ein Seil durchhängt, dann nimmt es eine wie links unten dargestellte Kurvenform an.



Die Funktion f ist dabei *keine* quadratische Funktion, sondern hat die folgende Funktionsgleichung:

$$f(x) = \frac{e^{a\cdot x} + e^{-a\cdot x}}{2\cdot a}$$

Der Parameter $a > 0$ wird durch das Material festgelegt.
Das links verwendete Seil verläuft durch den Punkt $(0 \mid 10)$.

a) Berechne a.

b) Löse die Gleichung $f(x) = 42$.

Hinweis: Wenn du beide Seiten mit $e^{a\cdot x}$ multiplizierst und $u = e^{a\cdot x}$ substituierst, dann erhältst du eine quadratische Gleichung in u.

2.11

Für die Herstellung von Joghurt werden Milchsäurebakterien verwendet. Das Wachstum der Milchsäurebakterien kann durch die folgende Funktion N beschrieben werden:

$$N(t) = 20 \cdot 1{,}023\,37^t$$

t ... Zeit in min
$N(t)$ ... Bakterienmasse zur Zeit t in Mikrogramm (μg)

a) Geben Sie das prozentuelle Wachstum pro Minute an.

b) Berechnen Sie die Masse der Bakterien nach 1 Stunde. Geben Sie das Ergebnis in Gramm in der Form $a \cdot 10^k$ mit $1 \le a < 10$ an.

c) Begründen Sie, warum der nachstehend dargestellte Rechenschritt falsch ist.

$$\frac{a}{20} = 1{,}023\,37^t \quad \Longrightarrow \quad \frac{\log(a)}{\log(20)} = t \cdot \log(1{,}023\,37)$$

2.12

Einem Patienten werden Medikamente mit einer bestimmten wirksamen Substanz verabreicht. Die Abnahme der Konzentration W der wirksamen Substanz im Blut kann mit der folgenden Funktion W beschrieben werden:

$$W(t) = 45 \cdot e^{-0{,}223\cdot t}$$

t ... Zeitdauer nach Einnahme des Medikaments in Stunden (h)
$W(t)$ ... Konzentration der wirksamen Substanz zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml) Blut

a) Formen Sie die gegebene Gleichung nach der Zeit t um.

b) Berechnen Sie diejenige Zeit, nach der noch 20 % der ursprünglichen Konzentration vorhanden sind.

2.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Es wird ein Kuchen aus Hefeteig gebacken. Für den Teig benötigt man ein sogenanntes „Dampfl“ aus Hefe, warmer Milch und Zucker. Diese Zutaten werden verrührt und in ein 12 cm hohes zylindrisches Gefäß gegeben.
Man lässt das Gemisch einige Zeit t in warmer Umgebung ruhen. Die Höhe des Dampfls im Gefäß beträgt zu Beginn 4 cm. Das Dampfl dehnt sich durch die Wärme aus.
Nach der Zeit von 11 Minuten erreicht das Dampfl eine Höhe von 7 cm. Dieses „Aufgehen des Dampfls“ kann mit dem Modell des exponentiellen Wachstums beschrieben werden:

$$h(t) = h_0 \cdot e^{\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$h(t)$ ... Höhe des Dampfls zur Zeit t in cm

1) Ermitteln Sie die Parameter h_0 und λ

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Höhe pro Minute wächst.

2.14

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In manchen Orten Österreichs, z. B. in der steirischen Gemeinde Eisenerz, nimmt die Bevölkerungszahl ab. Zur mathematischen Beschreibung dieser Entwicklung können verschiedene Modelle verwendet werden.
In der nachstehenden Tabelle sind die Bevölkerungszahlen von Eisenerz für den Beginn des Jahres 1981 und den Beginn des Jahres 2014 angegeben:

Beginn des Jahres ...	1981	2014
Bevölkerungszahl	10068	4524

Die Entwicklung der Bevölkerungszahl soll näherungsweise durch eine Exponentialfunktion N_3 beschrieben werden.

1) Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen Exponentialfunktion N_3, die die Bevölkerungszahl in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren seit Beginn des Jahres 1981 beschreibt.

2) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion N_3, welche Bevölkerungszahl für den Beginn des Jahres 2030 zu erwarten ist.

2.15

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Höhe eines Strauches wird in den ersten Tagen nach dem Auspflanzen durch die Funktion h beschrieben:

$$h(t) = 0{,}08 \cdot e^{0{,}03 \cdot t} \quad \text{mit } 0 \leq t < 55$$

t ... Zeit in Tagen
$h(t)$ ... Höhe des Strauches zur Zeit t in m

a) 1) Berechnen Sie, nach wie vielen Tagen der Strauch eine Höhe von 40 cm aufweist.

b) Die Funktionsgleichung der Funktion h wurde fehlerhaft logarithmiert:

$$\lg(h(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03 \cdot \lg(e) + t \cdot \lg(e)$$

1) Stellen Sie die logarithmierte Gleichung richtig.

2.16

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

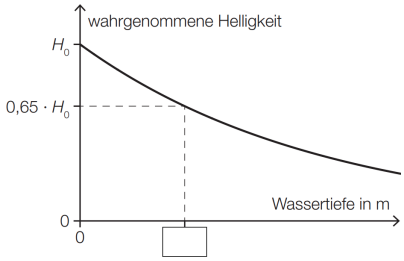
Mit Stand 1. Jänner 2011 lebten in Österreich 8,402 Millionen Menschen. Die Bevölkerung wächst jedes Jahr um jeweils 0,3 % des Vorjahreswertes.

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung auf, die die Entwicklung der Bevölkerung in Österreich ab 1. Jänner 2011 modelliert.

2) Berechnen Sie, für welches Kalenderjahr das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen vorhersagt.

2.17

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung



Die *Leuchtdichte* ist ein Maß für den Helligkeitseindruck, der von beleuchteten Flächen ausgeht. Sie wird in der Einheit Candela pro Quadratmeter ($\mathrm{cd/m^2}$) angegeben.

Unter bestimmten Bedingungen nimmt die wahrgenommene Helligkeit unter Wasser pro Meter Tiefe um 7 % des vorherigen Wertes ab. Die wahrgenommene Helligkeit an der Wasseroberfläche ist H_0.
In der nebenstehenden Abbildung ist diese Abnahme dargestellt.

1) Tragen Sie den fehlenden Wert in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

2.18

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden.
Ein Modell zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck ist die barometrische Höhenformel:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{7991}}$$

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in Metern (m)
$p(h)$ ... Luftdruck in der Höhe h in Hektopascal (hPa)

1) Zeigen Sie, dass p_0 der Luftdruck auf der Höhe des Meeresspiegels ist.

2) Berechnen Sie diejenige Seehöhe, bei der der Luftdruck genau die Hälfte von p_0 beträgt.

2.1 **a)** $\ln(x)+2\cdot\ln(y+z)$ **b)** $6\cdot\lg(x)-3\cdot\lg(y-1)$ **c)** $2\cdot\log_{42}(x+1)-\log_{42}(y^2+1)$ **d)** $2\cdot\lg(x)+3\cdot\lg(y)+\frac{1}{2}\cdot\lg(z)$ **e)** $\lg(x+y)-2\cdot\lg(z)$ **f)** $\frac{3}{5}\cdot\lg(x)+\frac{2}{5}\cdot\lg(z)-\frac{1}{5}\cdot\lg(y)$ **g)** $\lg(x+y)+\lg(x-y)-{}^{z}/_{3}$

2.2 $M_S \approx M_E + 5{,}5$, also ist M_S um ca. 5,5 größer als M_E.

2.3 **1)** $\lg\left(\frac{x^5\cdot z}{2\cdot y^2}\right)$ **2)** $\lg\left(125\cdot x^{12}\right)$ **3)** $\lg\left(a^{42}\cdot x^2\right)$

2.4 **a)** $x = 0{,}7124...$ **b)** $x = 1{,}4518...$ **c)** $x = 0{,}3218...$ **d)** $x = 2{,}5007...$ **e)** $x_1 = 0{,}0573...,\ x_2 = 3{,}942...$

2.5 **a)** $x \approx 5{,}5805$ **b)** $x \approx 5{,}8870$ **c)** $x \approx -1{,}8390$ **d)** $x \approx 21{,}6096$ **e)** $x \approx 0{,}0536$ **f)** $x \approx 0{,}0320$ **g)** $x \approx 4{,}3305$ **h)** $x \approx 0{,}4926$ **i)** $x = 1{,}5$ **j)** $x = 0$

2.6

$n(t) = 250\cdot e^{-0{,}05\cdot t}$	$n(t) = 250\cdot 0{,}95123^t$	$n(t) = 250\cdot\left(1-\frac{4{,}877}{100}\right)^t$
$n(t) = 3\,500\cdot e^{-0{,}08338\cdot t}$	$n(t) = 3\,500\cdot 0{,}92^t$	$n(t) = 3\,500\cdot\left(1-\frac{8}{100}\right)^t$
$n(t) = 137\cdot e^{0{,}03922\cdot t}$	$n(t) = 137\cdot 1{,}04^t$	$n(t) = 137\cdot\left(1+\frac{4}{100}\right)^t$
$n(t) = 250\cdot e^{-3\cdot 10^{-4}\cdot t}$	$n(t) = 250\cdot 0{,}9997^t$	$n(t) = 250\cdot\left(1-\frac{0{,}0003}{100}\right)^t$
$n(t) = 1{,}2\cdot 10^3\cdot e^{0{,}05259\cdot t}$	$n(t) = 1{,}2\cdot 10^3\cdot 1{,}054^t$	$n(t) = 1{,}2\cdot 10^3\cdot\left(1+\frac{5{,}4}{100}\right)^t$
$n(t) = 2{,}3\cdot 10^4\cdot e^{-0{,}01309\cdot t}$	$n(t) = 2{,}3\cdot 10^4\cdot 0{,}987^t$	$n(t) = 2{,}3\cdot 10^4\cdot\left(1-\frac{1{,}3}{100}\right)^t$

2.7 **a)** **1)** $f(t) = 5\cdot 1{,}521...^t \to \infty$ **2)** $f(t) = 6\cdot 0{,}423...^t \to 0$ **3)** $f(t) = -3\cdot 0{,}860...^t \to 0$ **4)** $f(t) = -2\cdot 2{,}459...^t \to -\infty$

b) **1)** $f(t) = -12\cdot e^{-0{,}0202...\cdot t} \to 0$ **2)** $f(t) = 3\cdot e^{0{,}001\,19...\cdot t} \to \infty$ **3)** $f(t) = -5\cdot e^{-0{,}8675...\cdot t} \to 0$ **4)** $f(t) = -2\cdot e^{0{,}0487...\cdot t} \to -\infty$

2.8 ≈ 5248 Jahre

2.9 Rechenregel für Potenzen
$3^{(.)}$ und $\log_3(.)$ sind Umkehrfunktionen voneinander.
$4^{(.)}$ und $\log_4(.)$ sind Umkehrfunktionen voneinander.
$\log_a(b)\cdot\log_b(a) = 1$

2.10 **a)** $a = 0{,}1$ **b)** $u_1 = 8{,}27... \implies x_1 = 21{,}13...$ $\quad u_2 = 0{,}120... \implies x_2 = -21{,}13...$

2.11 **a)** Wachstum um 2,337 % pro Minute **b)** $\approx 8\cdot 10^{-5}$ g **c)** Linke Seite müsste $\log\left(\frac{a}{20}\right)$ oder $\log(a) - \log(20)$ sein.

2.12 **a)** $t = \dfrac{\ln\left(\frac{W}{45}\right)}{-0{,}223}$ **b)** $t = 7{,}217...$ h

2.13 **1)** $h_0 = 4$ $\lambda = 0{,}050\,87...$ **2)** Wachstum um 5,2... % pro Minute.

2.14 $N_3(t) = 10\,068\cdot 0{,}976...^t$ oder $N_3(t) = 10\,068\cdot e^{-0{,}024\cdot t}$
Gemäß diesem Modell ist für den Beginn des Jahres 2030 eine Bevölkerungszahl von etwa 3070 Personen zu erwarten.

2.15 **a)** 53,6... Tage **b)** $\lg(h(t)) = \lg(0{,}08) + 0{,}03\cdot t\cdot\lg(e)$

2.16 **1)** $A(t) = 8{,}402\cdot 1{,}003^t$ $\quad t\ldots$ Anzahl der vergangenen Jahre seit dem 1. Jänner 2011 $\quad A(t)\ldots$ Einwohnerzahl nach t Jahren in Millionen

2) Für das Jahr 2069 prognostiziert das Modell erstmals eine Bevölkerungszahl von mehr als 10 Millionen.

2.17 5,9

2.18 **a)** $p(0) = p_0\cdot e^{-\frac{0}{7991}} = p_0\cdot 1 = p_0$ $\quad \frac{p_0}{2} = p_0\cdot e^{-\frac{h}{7991}}$ $\quad h = 7991\cdot\ln(2) = 5538{,}9\ldots$

b) $f(h) = 1013 - \dfrac{1}{10}\cdot h$

3. Logarithmusfunktionen & Logarithmusgleichungen

MmF-Materialien MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

3.1

MmF

Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $3 \cdot \ln(4 \cdot x + 2) - 5 = 0$ **b)** $\dfrac{1 + \lg(x/4)}{3} = 2$

3.2

MmF

Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^{\lg(x)} = 42$

b) $7 \cdot \lg(x) - 2 \cdot \lg(x^3) = 42$

c) $\lg(x-1) - \lg(x+1) = \lg(2)$

d) $(\lg(x))^2 - \lg(x) - 6 = 0$

e) $(\lg(x))^2 + \lg(x^6) = 7$

f) $\lg(x) + \lg(10 \cdot x) + \lg(100 \cdot x) = -3$

g) $x^{2+4 \cdot \lg(x)} = 100$

h) $\log_x(4) - 2 \cdot \log_4(x) = 1$

i) $\lg(x) \cdot \lg(10 \cdot x) = \lg(x^3)$

3.3

MmF

„Das Team der Genetikerin Tina Wang von der Universität von Kalifornien hat anhand von DNA-Tests die neue Formel zur Altersberechnung erstellt. […] Wollen Sie das Alter Ihres eigenen Vierbeiners errechnen? Dann holen Sie am besten den Taschenrechner mit Logarithmus-Taste raus: Tippen Sie das Alter Ihres Hundes ein und drücken Sie „ln“. Das Ergebnis multiplizieren Sie mit 16 *und addieren* 31.“ (Kronen-Zeitung, 19.11.2019)

a) H ist das Alter in Hundejahren. $M(H)$ ist das Hundealter in Menschenjahren.
Stelle aus dem Text eine Funktionsgleichung von M auf.

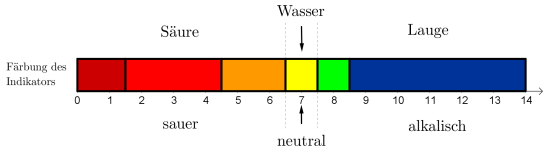
b) Welches Alter in Menschenjahren hat gemäß diesem Modell ein 6 Jahre alter Hund?

c) Wie alt ist gemäß diesem Modell ein Hund, wenn sein Alter 42 Menschenjahre beträgt?

3.4

MmF

Der sogenannte pH-Wert einer Flüssigkeit ist definiert als der negative dekadische Logarithmus (Zehnerlogarithmus) der Konzentration c von H_3O^+-Ionen in mol/L.

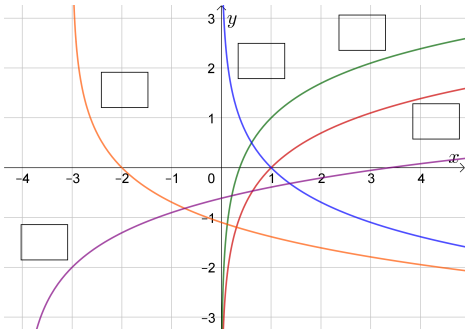


In der nebenstehenden Abbildung sind die möglichen Färbungen eines Indikatorstreifens zur Überprüfung des pH-Werts abgebildet.

a) Stelle mithilfe von c eine Formel zur Berechnung des pH-Werts einer Flüssigkeit auf: $\mathrm{pH}(c) =$ ⬚

b) Begründe mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen: Um wie viel ändert sich der pH-Wert einer Flüssigkeit, wenn die Konzentration von H_3O^+-Ionen auf das Tausendfache ansteigt.

3.5



Ordne jeder Funktionsgleichung ihren Funktionsgraphen zu.

$f_1(x) = \ln(x) + 1$

$f_2(x) = \ln(x)$

$f_3(x) = -\ln(x)$

$f_4(x) = -\ln(x+3)$

$f_5(x) = \ln(x+4) - 2$

3.6

Für welche reellen Zahlen $x > 0$ gelten die Ungleichungen?

a) $1 \leq \lg(x) < 2$ **b)** $3 \leq \lg(x) < 5$ **c)** $-3 < \lg(x) \leq 2$ **d)** ☆ $-\frac{1}{2} < \log_{\frac{1}{4}}(x) < 2$

3.7

Erdbebenstärken werden heutzutage mit verschiedenen Skalen angegeben – die gebräuchlichste ist dabei die sogenannte „Richterskala“ (auch: „Lokalmagnituden-Skala“). Die Magnitude M_L dieser Skala (angegeben in Punkten) berechnet sich dabei aus der maximal gemessenen Amplitude $A_{\max}$ im Seismogramm:

$$M_L = \lg\left(\frac{A_{\max}}{A_0}\right)$$

A_0 ist dabei ein Korrekturfaktor für die Entfernung bzw. die Dämpfung der Erdbebenwelle.

a) Vergleiche die Amplituden zweier Beben, deren Magnituden sich um einen Punkt unterscheiden.

Mit folgender Formel lässt sich der Zusammenhang zwischen der Magnitude M_L eines Bebens und der dazu äquivalenten Energie E in Tonnen TNT beschreiben:

$$M_L = 2 + \frac{2}{3} \cdot \lg(E)$$

b) Vergleiche die Energie zweier Beben, deren Magnituden sich um einen Punkt unterscheiden.

c) Vergleiche die Magnituden zweier Beben, deren Energie sich um den Faktor 1000 unterscheiden.

Die Kernkraftwerke in Fukushima (Japan) wurden baulich auf Magnituden bis etwa 8,25 ausgelegt. Tatsächlich hatte das Erdbeben in Japan am 11.03.2011 eine Magnitude von 9,0.

d) Um welchen Faktor hat die Amplitude dieses Bebens jene Amplitude überschritten, auf die die Kraftwerke ausgelegt waren?

e) Um welchen Faktor hat die bei diesem Beben freigesetzte Energie jene überschritten, für die die Kraftwerke ausgelegt waren?

3.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Oberfläche von Wasser verhält sich ähnlich einer gespannten, elastischen Folie. Diese Oberflächenspannung von Wasser ist abhängig von dessen Temperatur und kann näherungsweise durch die folgende Funktion σ beschrieben werden:

$$\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right) \qquad \text{mit } 273{,}15 \leq T \leq 370$$

T ... Wassertemperatur in Kelvin (K)
$\sigma(T)$ ... Oberflächenspannung bei einer Wassertemperatur T in Mikronewton pro Meter

$e^{\sigma(T)} = e^{59{,}2} + 53{,}8 \cdot \left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$	☐
$\sigma(T) - 59{,}2 = 53{,}8 \cdot \frac{\ln(644 - T)}{\ln(273{,}15)}$	☐
$273{,}15 \cdot e^{\frac{\sigma(T) - 59{,}2}{53{,}8}} = 644 - T$	☐
$\frac{\sigma(T)}{53{,}8} = 59{,}2 + \ln(644 - T) - \ln(273{,}15)$	☐
$\sigma(T) - 59{,}2 + \ln(273{,}15) = 53{,}8 \cdot \ln(644 - T)$	☐

273,15 Kelvin entsprechen 0 Grad Celsius (°C).
Eine Temperaturveränderung um 1 Kelvin entspricht einer Veränderung um 1 °C.

a) Berechnen Sie die Oberflächenspannung von Wasser bei 25 °C.

b) Ausgehend von $\sigma(T) = 59{,}2 + 53{,}8 \cdot \ln\left(\frac{644 - T}{273{,}15}\right)$ wurden Umformungen durchgeführt.

– Kreuzen Sie rechts diejenige Umformung an, die korrekt ist.

3.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Sonne ist das Zentrum unseres Sonnensystems.
Für die Berechnung der Distanz r eines Sterns zur Erde kann die Differenz zwischen scheinbarer (m) und absoluter (M) Helligkeit eines Sterns nach der folgenden Formel benützt werden:

$$m - M = 5 \cdot \log_{10}(r) - 5$$

m ... scheinbare Helligkeit in Magnituden (mag)
M ... absolute Helligkeit in Magnituden (mag)
r ... Entfernung eines Sterns von der Erde in Parsec (pc)
$1\,\text{pc} = 30{,}856 \cdot 10^{12}\,\text{km}$

1) Berechnen Sie die Entfernung Sonne - Erde in km, wenn die Sonne eine scheinbare Helligkeit $m = -26{,}73\,\text{mag}$ und eine absolute Helligkeit $M = 4{,}84\,\text{mag}$ besitzt.

3.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Schallpegel in einer Ausstellungshalle soll durch zusätzliche Absorptionsflächen vermindert werden. Dabei gilt:

$$L(A) = 10 \cdot \lg\left(1 + \frac{A}{10}\right)$$

A ... Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche in m^2
$L(A)$ ... Schallpegelminderung bei einer zusätzlichen Absorptionsfläche A in Dezibel (dB)

1) Berechnen Sie den Inhalt der zusätzlichen Absorptionsfläche, die für eine Schallpegelminderung um 10 dB benötigt wird.

3.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Als Schalldruck p werden die Druckschwankungen eines kompressiblen Schallübertragungsmediums (üblicherweise Luft) bezeichnet, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten. Eine für das Hörempfinden relevante Größe ist der Schalldruckpegel L_p.

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

L_p ... Schalldruckpegel in Dezibel (dB)
p ... Schalldruck in Pascal (Pa)
p_0 ... Bezugswert für Luftschall ($p_0 = 20\,\mu\text{Pa}$)

1) Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Logarithmen und der angegebenen Formel, dass eine Verdoppelung des Schalldrucks p eine Erhöhung des Schalldruckpegels L_p um etwa 6 dB bewirkt.

3.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels
$I(x)$ ... Lichtintensität in der Entfernung x
I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels
λ ... positive Konstante

Um den Intensitätsverlust in einem Lichtwellenleiter zu bestimmen, wird die nach 1 km noch vorhandene Intensität gemessen. Die Größe zur Beschreibung des Intensitätsverlusts ist die Dämpfung D, die in Dezibel angegeben wird:

$$D = 10 \cdot \lg\left(\frac{I_0}{I}\right) \quad \text{in Dezibel (dB)}$$

I_0 ... Anfangsintensität
I ... noch vorhandene Intensität nach 1 km

Ein modernes Glasfaserkabel weist nach 1 km noch eine Intensität von 95,5 % des Anfangswertes I_0 auf.

1) Berechnen Sie, welcher Dämpfung dies entspricht.

Bei älteren Glasfaserkabeln stellte man pro Kilometer Kabellänge eine Dämpfung von 20 dB fest.

2) Berechnen Sie, wie viel Prozent der Anfangsintensität I_0 nach 1 km noch vorhanden waren.

Für die Dämpfung wird oft auch die Formel $D_1 = 10 \cdot \lg(\frac{I}{I_0})$ angegeben.

3) Zeigen Sie mithilfe der Rechengesetze für Logarithmen: $D_1 = -D$.

3.13

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Als Datenübertragungsrate wird die digitale Datenmenge, die innerhalb einer Zeiteinheit übertragen wird, bezeichnet. Das Shannon-Hartley-Gesetz beschreibt die theoretische Obergrenze C der Datenübertragungsrate in Abhängigkeit von der Bandbreite B und dem Verhältnis von Signalleistung zu konstanter Rauschleistung $\frac{S}{N}$.

$$C = B \cdot \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right)$$

C ... maximale Datenübertragungsrate in Bit pro Sekunde (Bit/s)
$\frac{S}{N}$ ... Verhältnis von Signalleistung und konstanter Rauschleistung (dimensionslos)
B ... Bandbreite in Hertz (Hz)

1) Beschreiben Sie, wie sich C ändert, wenn das Argument $1 + \frac{S}{N}$ verdoppelt wird.

Anstelle von $\frac{S}{N}$ wird oft die logarithmierte Größe SNR in Dezibel (dB) (Signal-zu-Rausch-Verhältnis) verwendet.

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)$$

2) Ermitteln Sie, wie viele kBit/s bei einer Bandbreite B von 1000 Hz und einem Signal-zu-Rausch-Verhältnis von 40 dB maximal übertragen werden können.

3.1 **a)** $x = 0{,}823\ldots$ **b)** $x = 400\,000$

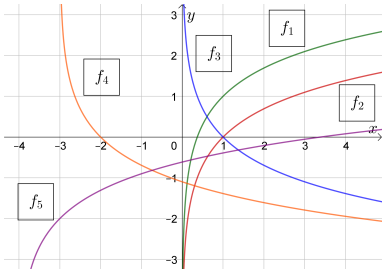
3.2 **a)** $x_1 = 18{,}79\ldots$, $x_2 = 0{,}0532\ldots$ **b)** $x = 10^{42}$ **c)** $x = -3$ **d)** $x_1 = -0{,}01$, $x_2 = 1000$ **e)** $x_1 = 10$, $x_2 = 10^{-7}$ **f)** $x = \frac{1}{100}$
g) $x_1 = \frac{1}{10}$, $x_2 = \sqrt{10}$ **h)** $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{4}$ **i)** $x_1 = 1$, $x_2 = 100$

3.3 **a)** $M(H) = 16 \cdot \ln(H) + 31$ **b)** 59,6... Menschenjahre **c)** 1,98... Hundejahre

3.4 **a)** $\mathrm{pH}(c) = -\lg(c)$

b) $\mathrm{pH}(1000 \cdot c) = \cdots = \mathrm{pH}(c) - 3 \implies$ Der pH-Wert sinkt also um 3.

3.5



3.6 **a)** $10 \leq x < 100$ **b)** $1000 \leq x < 100\,000$ **c)** $\frac{1}{1000} < x \leq 100$ **d)** $0{,}0625 = 2^{-4} < x < 2$

3.7 **a)** $M_L = \lg(\frac{A_{\max}}{A_0}) \implies A_{\max} = A_0 \cdot 10^{M_L}$
$A_{\max}(M_L + 1) = A_0 \cdot 10^{M_L+1} = 10 \cdot A_0 \cdot 10^{M_L} = 10 \cdot A_{\max}(M_L)$
Die Amplituden unterscheiden sich also um den Faktor 10.

b) $M_L = 2 + \frac{2}{3} \cdot \lg(E) \implies E = 10^{\frac{3}{2} \cdot (M_L - 2)}$
$E(M_L + 1) = 10^{\frac{3}{2} \cdot (M_L + 1 - 2)} = 10^{\frac{3}{2}} \cdot 10^{\frac{3}{2} \cdot (M_L - 2)} = 10^{\frac{3}{2}} \cdot E(M_L) \approx 32 \cdot E(M_L)$
Die Energien unterscheiden sich also etwa um den Faktor 32.

c) $M_L(1000 \cdot E) = 2 + \frac{2}{3} \cdot \lg(1000 \cdot E) = 2 + \frac{2}{3} \cdot (3 + \lg(E)) = 2 + 2 + \frac{2}{3} \cdot \lg(E) = 2 + M_L(E)$
Die Beben unterscheiden sich um 2 Skalenpunkte.

d) $\frac{A_{\max}(9{,}0)}{A_{\max}(8{,}25)} = \frac{A_0 \cdot 10^{9{,}0}}{A_0 \cdot 10^{8{,}25}} \approx 5{,}6$
Die Amplitude war etwa um den Faktor 5,6 zu groß.

e) $\frac{E(9{,}0)}{E(8{,}25)} = \frac{10^{\frac{3}{2} \cdot (9{,}0 - 2)}}{10^{\frac{3}{2} \cdot (8{,}25 - 2)}} \approx 13{,}3$
Die Energie war etwa um den Faktor 13,3 zu groß.

3.8 **a)** $71{,}89\ldots\ \mu\mathrm{N/m}$ **b)** 3.Antwort

3.9 $1{,}497\ldots \cdot 10^8$ km

3.10 $90\,\mathrm{m}^2$

3.11 $L_{2p} = 20 \cdot \lg\left(\frac{2 \cdot p}{p_0}\right) = \cdots = 6{,}02\ldots + L_p \implies L_{2p} \approx L_p + 6\,\mathrm{dB}$

3.12 $D = 10 \cdot \lg(\frac{I_0}{0{,}955 \cdot I_0}) = 0{,}19\ldots$
Die Dämpfung beträgt rund 0,2 dB.
$20 = 10 \cdot \lg(\frac{I_0}{I})$
$I = I_0 \cdot 10^{-2}$
Nach 1 km war noch 1 % der Anfangsintensität vorhanden.
$D_1 = 10 \cdot \lg(\frac{I}{I_0}) = 10 \cdot (\lg(I) - \lg(I_0))$
$D_1 = -10 \cdot (\lg(I_0) - \lg(I)) = -10 \cdot \lg(\frac{I_0}{I}) \implies D_1 = -D$

3.13 $C_{\mathrm{neu}} = C + B$, also wird C um B größer. $C = 13{,}287\ldots\ \mathrm{kBit/s}$

4. Beschränktes Wachstum

MmF-Materialien MmF

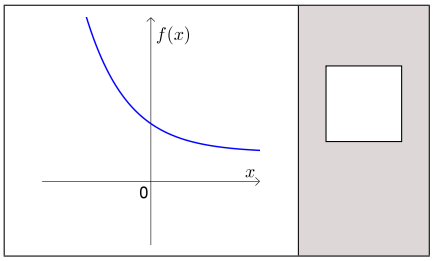
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

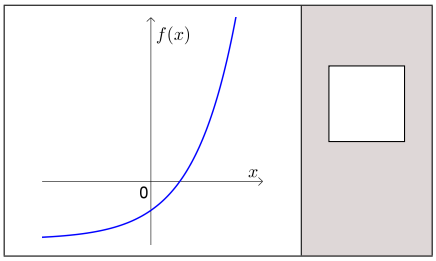
✓ Arbeitsblatt – Beschränktes Wachstum

4.1

MmF

Ordne den beiden Graphen jeweils die passende Funktionsgleichung aus A bis D zu.





A	$f(x) = 1{,}2^x + 1$
B	$f(x) = 2^x - 2$
C	$f(x) = 0{,}8^x - 2$
D	$f(x) = 0{,}5^x + 1$

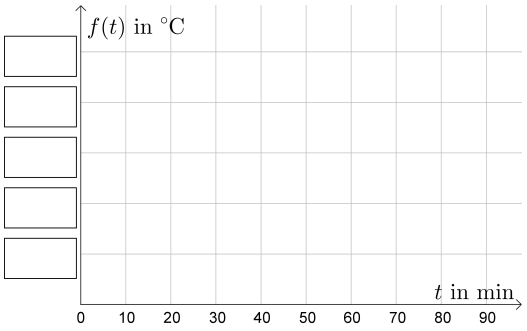
4.2

MmF

Der Temperaturverlauf eines zum Zeitpunkt $t = 0$ aus dem Kühlschrank entnommenen Getränks wird durch folgende Funktion f modelliert:

$$f(t) = 15 \cdot \left(1 - e^{-0{,}038 \cdot t}\right) + 7$$

t ... Zeit in min
$f(t)$ ... Temperatur in °C nach $t \geq 0$ Minuten



a) Berechne die Temperatur des Getränks bei Entnahme aus dem Kühlschrank.

b) Berechne die Temperatur nach 10, 30, 50 und 70 Minuten.

c) Begründe anhand der Funktionsgleichung, welchem Wert sich die Temperatur des Getränks annähert.

d) Skaliere die vertikale Achse im Bild rechts oben geeignet und zeichne den Funktionsgraphen ein.

4.3

MmF

Ein Fass mit Volumen $V = 60\,\text{L}$ ist vollständig mit destilliertem Wasser (ohne Salz) gefüllt. Salzwasser mit einer Konzentration von $25\,\text{g/L}$ wird konstant in das Fass gepumpt, wodurch das Fass durchgehend überläuft.
Die im Fass vorhandene Salzmenge (in g) zum Zeitpunkt t (in Minuten) wird näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$S(t) = c \cdot (1 - e^{-0{,}08 \cdot t}) + d$$

a) Bestimme die Parameter c und d.

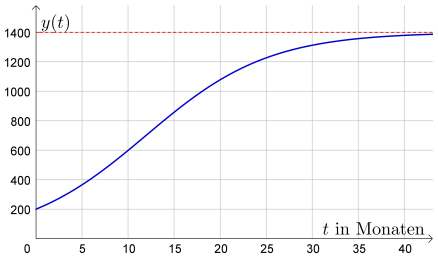
b) Berechne, wie viel Gramm Salz sich nach 10 Minuten im Fass befinden.

4.4

Die Fischpopulation in einem Teich folgt näherungsweise einem logistischen Wachstumsvorgang:

$$y(t) = \frac{y_0 \cdot K}{y_0 + (K - y_0) \cdot e^{-0{,}15 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Monaten
$y(t)$ ... Fischanzahl zum Zeitpunkt t



Der Funktionsgraph ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

a) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $y_0 = y(0)$ gilt.

b) Begründe anhand der Funktionsgleichung, warum $K = \lim_{t \to \infty} y(t)$ gilt.

c) Lies die Parameter y_0 und K aus der Grafik ab.

d) Berechne die Größe der Fischpopulation nach 3 Jahren.

e) Berechne nach wie vielen Monaten sich die Fischpopulation vervierfacht hat.

4.5

Du stellst zum Zeitpunkt $t = 0$ ein Getränk in den Kühlschrank.
Der Temperaturverlauf des Getränks wird durch die folgende Funktion f modelliert:

$$f(t) = a \cdot 0{,}982^t + b$$

t ... Zeit in Minuten ($t \geq 0$)
$f(t)$ ... Getränketemperatur in °C zum Zeitpunkt t

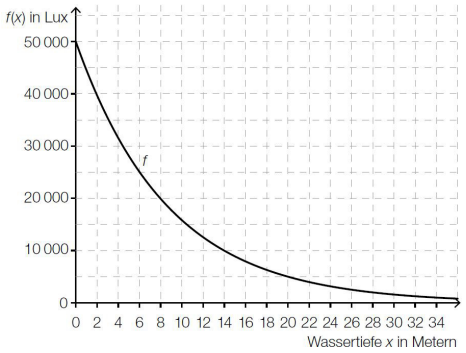
Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat das Getränk die Temperatur 21 °C.
Die Temperatur im Kühlschrank ist konstant 6 °C.
Langfristig kommt die Temperatur des Getränks der Temperatur im Kühlschrank beliebig nahe.

a) Ermittle a und b.

b) Wie viele Minuten dauert es, bis die Getränketemperatur 10 °C beträgt?

4.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung



Die Abnahme der Beleuchtungsstärke erfolgt unter Wasser exponentiell und kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.
Der Graph von f ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.

1) Lesen Sie aus der Abbildung ab, in welcher Tiefe die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % ihres Anfangswerts beträgt.

2) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

4.7

Die zeitliche Entwicklung des Akku-Ladestands beim Aufladen lässt sich näherungsweise durch die Funktion A beschreiben:

$$A(t) = 100 - 85 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

t ... Zeit nach Beginn des Aufladens in h
$A(t)$ ... Akku-Ladestand zur Zeit t in Prozent
λ ... positiver Parameter

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich die Funktionswerte von A mit wachsendem t dem Wert 100 annähern.

2 Stunden nach Beginn des Aufladens beträgt der Akku-Ladestand 80 %.

2) Berechnen Sie λ.

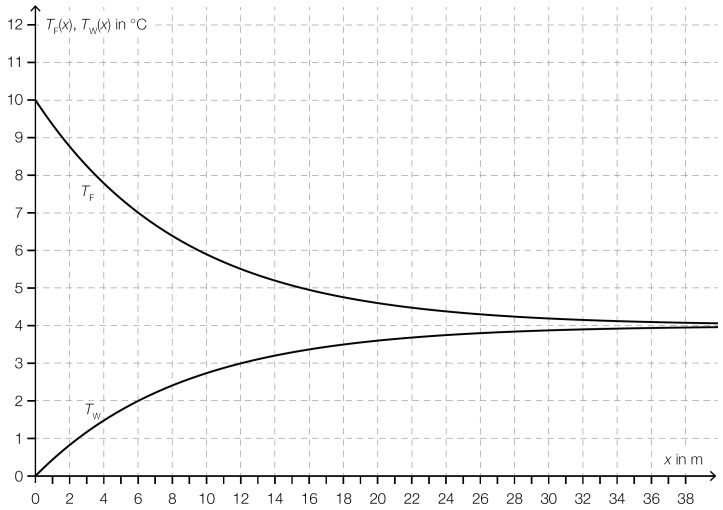
3) Berechnen Sie, zu welcher Zeit nach Beginn des Aufladens der Akku-Ladestand 90 % beträgt.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

4.8

Die Limnologie erforscht wichtige Kenngrößen von stehenden Gewässern wie etwa Temperatur oder Dichte.

Die nebenstehende Abbildung zeigt modellhaft die Wassertemperatur eines Sees in Abhängigkeit von der Tiefe x im Frühling (T_F) und im Winter (T_W). Die Wassertemperatur nähert sich in beiden Fällen asymptotisch dem Wert 4 °C.



Die Wassertemperatur des Sees im Frühling kann in Abhängigkeit von der Tiefe x näherungsweise durch eine Exponentialfunktion T_F mit

$$T_F(x) = a + b \cdot e^{c \cdot x}$$

beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a, b und c der Funktion T_F.

Für ein bestimmtes x_1 gilt: $T_F(x_1) - T_W(x_1) = 5$

2) Ermitteln Sie x_1 mithilfe der obigen Abbildung.

4.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nachstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.
Betrachtet man alle 12 Zahlenpaare, so lässt sich die Entwicklung der Anzahl der insgesamt verkauften E-Reader näherungsweise durch eine logistische Funktion V beschreiben:

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1310
6	1700
7	2055
8	2280
9	2470
10	2500
11	2540
12	2545

$$V(t) = \frac{2608}{1 + 20{,}28 \cdot e^{-0{,}6151 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

1) Begründen Sie anhand der gegebenen Funktion, warum die Funktionswerte sich mit wachsendem t dem maximalen Wert 2608 annähern.

2) Berechnen Sie, um wie viel der logistische Funktionswert $V(8)$ vom gegebenen Tabellenwert bei 8 Wochen abweicht.

4.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein digitales Thermometer wird zur Messung der Temperatur des Wassers in einem Becken verwendet. Ausgehend von einem Startwert nähert sich die angezeigte Temperatur der tatsächlichen Temperatur des Wassers an. Zu Beginn der Messung zeigt das digitale Thermometer eine Temperatur von 33,0 °C an. Nach 4 s zeigt es eine Temperatur von 36,0 °C an. Der zeitliche Verlauf der angezeigten Temperatur bei dieser Messung kann durch die Funktion g beschrieben werden.

$$g(t) = c - a \cdot e^{-0{,}275 \cdot t}$$

t ... Zeit nach Beginn der Messung in s
$g(t)$ ... angezeigte Temperatur zur Zeit t in °C

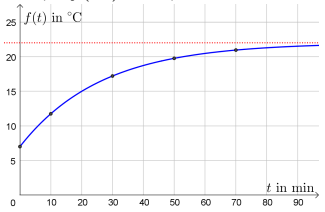
1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und c.

2) Berechnen Sie die Parameter a und c.

4.1 Links: D Rechts: B

4.2 **a)** $f(0) = 7\,^\circ\text{C}$ **b)** $f(10) \approx 11{,}74\,^\circ\text{C}$, $f(30) \approx 17{,}20\,^\circ\text{C}$, $f(50) \approx 19{,}76\,^\circ\text{C}$, $f(70) \approx 20{,}95\,^\circ\text{C}$

c) $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-0{,}038\cdot t} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 15\cdot(1-0)+7 = 22\,^\circ\text{C}$ **d)**



4.3 **a)** $c = 1500,\ d = 0$ **b)** $\approx 826\,\text{g}$

4.4 **a)** $y(0) = \dfrac{y_0\cdot K}{y_0+(K-y_0)\cdot 1} = \dfrac{y_0\cdot K}{K} = y_0$ **b)** $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-0{,}15\cdot t} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} y(t) = \dfrac{y_0\cdot K}{y_0} = K$ **c)** $y_0 = 200,\ K = 1400$ **d)** Die Fischpopulation besteht aus ca. 1363 Fischen. **e)** 13,86... Monate

4.5 **a)** $a = 15,\ b = 6$

b) 72,76... min

4.6 **1)** In einer Tiefe von 20 Metern beträgt die Beleuchtungsstärke nur mehr 10 % des Anfangswerts.

2) Entweder: $f(x) = c\cdot a^x \rightsquigarrow f(x) = 50\,000\cdot 0{,}8912\ldots^x$ Oder: $f(x) = c\cdot e^{\lambda\cdot x} \rightsquigarrow f(x) = 50\,000\cdot e^{-0{,}1151\ldots\cdot x}$

4.7 **1)** $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-\lambda\cdot t} = 0$, weil $\lambda > 0$ ist. Damit gilt: $\lim\limits_{t\to\infty} A(t) = 100 - 85\cdot 0 = 100$ ✓ **2)** $\lambda = 0{,}723\,45\ldots$ **3)** 2,9... h

4.8 **1)** $a = 4,\ b = 6,\ c = -0{,}1155\ldots$ **2)** $x_1 = 6$

4.9 Da für großes t der Wert $e^{-0{,}6151\cdot t}$ gegen null geht, nähert sich der Nenner der Zahl 1 und $V(t)$ damit 2608.
Der logistische Funktionswert weicht um ca. 8 Stück vom gegebenen Tabellenwert ab.

4.10 **1)** I : $g(0) = 33$, II : $g(4) = 36$ **2)** $a = 4{,}49\ldots,\ c = 37{,}49\ldots$

5. Logarithmische Skalierung

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

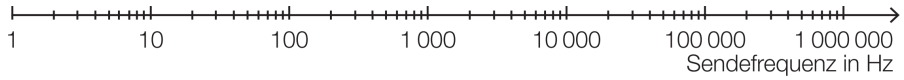
✓ Arbeitsblatt – Logarithmische Skalierung

5.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Läufer verwendet den Fußweg zur Aussichtsplattform als Trainingsstrecke. Mithilfe eines Brustgurts misst er seine Herzfrequenz. Diese wird an seine Pulsuhr mit einer Sendefrequenz von 5 Kilohertz (kHz) übermittelt.

1) Tragen Sie in der nachstehenden logarithmischen Skala die Sendefrequenz des Brustgurts ein.



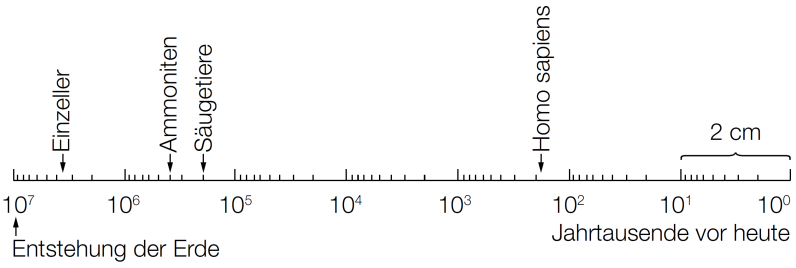
5.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Wichtige erdgeschichtliche Entwicklungen werden mit dem erstmaligen Auftreten von Tierarten festgehalten. Einige sind in der folgenden Tabelle aufgelistet.

Ereignis	Jahrtausende vor heute
Einzeller	3,8 Millionen
Eukaryoten	1,5 Millionen
Ammoniten	400 000
Säugetiere	200 000
Homo sapiens	190

Diese Entwicklungen seit Entstehung der Erde sind auf einer logarithmisch skalierten Zeitachse dargestellt. Die logarithmische Achse hat eine Gesamtlänge von 14 cm.
Auf dieser Achse ist der Zeitraum von der Entstehung der Erde (vor 10^7 Jahrtausenden) dargestellt.



Man schätzt, dass die Photosynthese erstmals vor 2400 Millionen Jahren auftrat.

1) Markieren Sie das erstmalige Auftreten der Photosynthese auf der obigen Zeitachse.

Die Markierung für das erstmalige Auftreten von Affen würde sich auf der obigen Zeitachse 9,2 cm von 100 entfernt befinden.

2) Ermitteln Sie, vor wie vielen Jahren das erste Mal Affen aufgetreten sind. Geben Sie das Ergebnis auf Millionen Jahre gerundet an.

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

5.3

Der pH-Wert von Wasser wird mithilfe der Konzentration c der Wasserstoffionen berechnet. Auf der nachstehenden logarithmischen Skala ist die Konzentration c_1 einer Wasserprobe aus dem Attersee eingetragen.

1) Lesen Sie den Wert von c_1 ab.

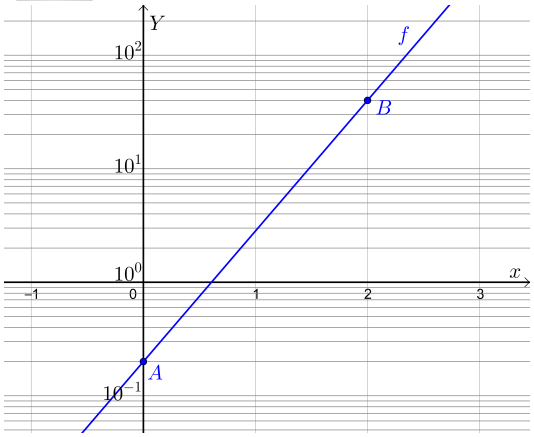
$c_1 =$ _____ mol/L

Für den Zusammenhang zwischen der Konzentration c und dem pH-Wert gilt: $\text{pH} = -\lg(c)$.
Eine andere Wasserprobe wird untersucht. Das Messgerät zeigt dabei einen pH-Wert von 8,0 an. Aufgrund der Messungenauigkeit muss der tatsächliche pH-Wert der Wasserprobe zwischen 7,9 und 8,1 liegen. Die Konzentration, die einem pH-Wert von 8,0 entspricht, wird mit c_2 bezeichnet.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Konzentration der Wasserprobe höchstens unter bzw. über der Konzentration c_2 liegt.

5.4

MmF



Der Graph einer Exponentialfunktion f mit

$$f(x) = c \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

ist links in einem ordinatenlogarithmischem Koordinatensystem dargestellt.

a) Lies die Koordinaten der Gitterpunkte A und B ab.

$A = \left(\square \mid \square\right)$ $B = \left(\square \mid \square\right)$

b) Ermittle die Parameter c und λ der Exponentialfunktion.

5.5

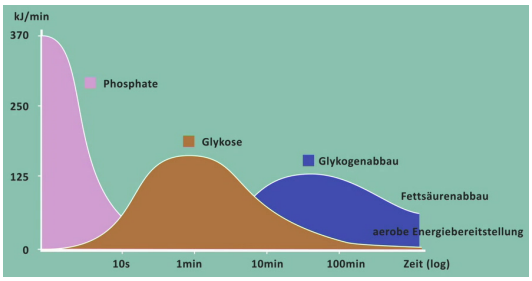
MmF

Bei der ORF-Sendung „Fakt oder Fake“ vom 21.10.2022 wurde das nebenstehende Diagramm gezeigt.

Die Abstände zwischen benachbarten Beschriftungen sind auf den beiden Achsen jeweils gleich groß.

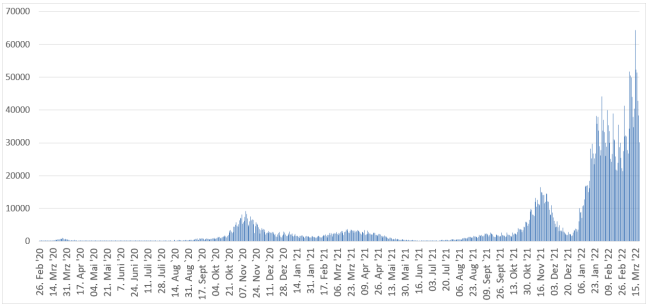
Finde auf beiden Achsen einen Fehler.

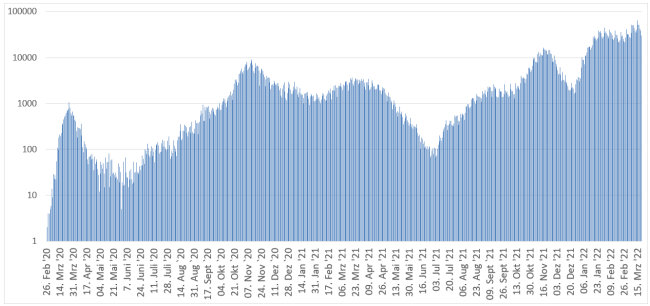
Bildquelle: ORF, Fakt oder Fake [21.10.2022]



5.6

In den beiden folgenden Diagrammen ist die Anzahl der täglichen COVID-19-Neuinfektionen in Österreich im Zeitraum von Februar 2020 bis März 2022 dargestellt.
Im linken Diagramm ist die vertikale Achse linear skaliert.
Im rechten Diagramm ist die vertikale Achse logarithmisch skaliert.





Datenquelle: https://ages.at [28.03.2022]

Das linke Diagramm erweckt den Eindruck, dass im Oktober 2020 die Infektionszahlen „explodierten“.
Begründe mithilfe des rechten Diagramms, warum die Infektionszahlen bereits seit Juni 2020 näherungsweise exponentiell gewachsen sind.

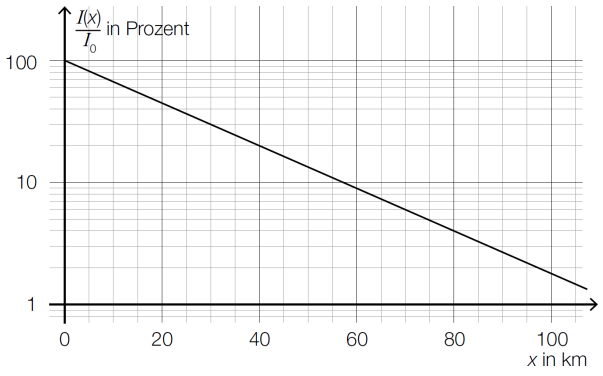
5.7

In einem Glasfaserkabel nimmt die Intensität des Lichts mit der Entfernung vom Anfangspunkt exponentiell ab. Dieser Zusammenhang kann durch die Funktion I beschrieben werden:

$$I(x) = I_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x}$$

x ... Entfernung entlang des Kabels vom Anfangspunkt des Kabels
$I(x)$ ... Lichtintensität in der Entfernung x
I_0 ... Lichtintensität am Anfangspunkt des Kabels
λ ... positive Konstante

Die Lichtintensität (in Prozent von I_0) in einem Glasfaserkabel in Abhängigkeit von x wird in einem ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem folgendermaßen dargestellt:



a) Ermitteln Sie, wie viel Prozent an Intensität das Licht nach 80 Kilometern (km) verloren hat.

Um Signale zu übertragen, muss die Lichtintensität noch mindestens 20 % der Lichtintensität I_0 betragen.

b) Lesen Sie die maximale Länge eines Lichtwellenleiters ab, der diese Bedingung erfüllt.

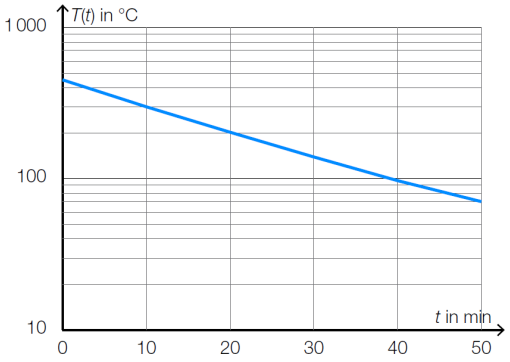
c) Ermitteln Sie den Wert des Parameters λ mithilfe der in der nebenstehenden Abbildung dargestellten Exponentialfunktion.

5.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Unternehmen stellt Dauermagneten für verschiedene technische Anwendungen her.
Ein Magnet aus dem Werkstoff Ferrit wird auf seinen Curie-Punkt erhitzt, in einer Spule magnetisiert, und anschließend wieder abgekühlt.
Die Abhängigkeit der Temperatur T von der Zeit t während des Abkühlungsprozesses lässt sich durch folgende Funktion beschreiben:

$$T(t) = 20 + 430 \cdot e^{-k \cdot t}$$



1) Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung des Funktionsgraphen von T die Temperatur zur Zeit $t = 10\,\text{min}$ ab.

2) Berechnen Sie k mithilfe des abgelesenen Werts.

5.9

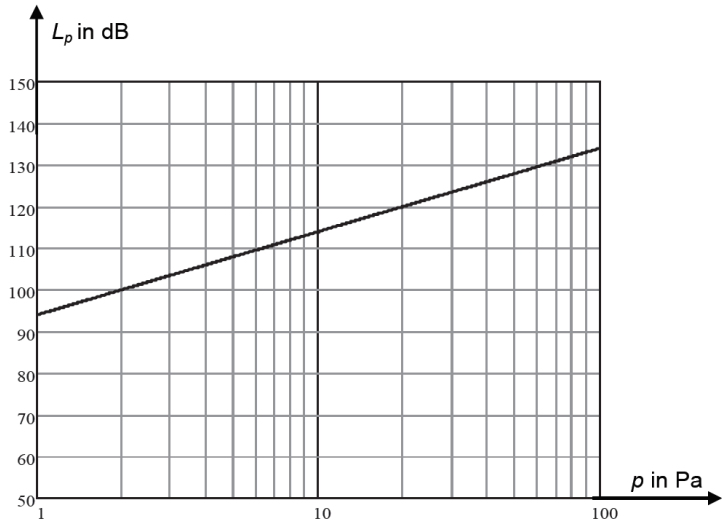
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Als Schalldruck p werden die Druckschwankungen eines kompressiblen Schallübertragungsmediums (üblicherweise Luft) bezeichnet, die bei der Ausbreitung von Schall auftreten. Eine für das Hörempfinden relevante Größe ist der Schalldruckpegel L_p.

$$L_p = 20 \cdot \lg\left(\frac{p}{p_0}\right)$$

L_p ... Schalldruckpegel in Dezibel (dB)
p ... Schalldruck in Pascal (Pa)
p_0 ... Bezugswert für Luftschall ($p_0 = 20\ \mu\,\text{Pa}$)

Das nachstehende Diagramm zeigt die Abhängigkeit des Schalldruckpegels vom Schalldruck nach obiger Formel. Ab einem Schalldruck p von etwa 20 Pa können bereits bei kurzfristiger Einwirkung Gehörschäden auftreten.



1) Ermitteln Sie aus der Grafik den Schalldruckpegel L_p für diesen Schalldruck.

In der Grafik ist der Abstand zwischen 1 Pa und 10 Pa auf der horizontalen Achse 5 cm.

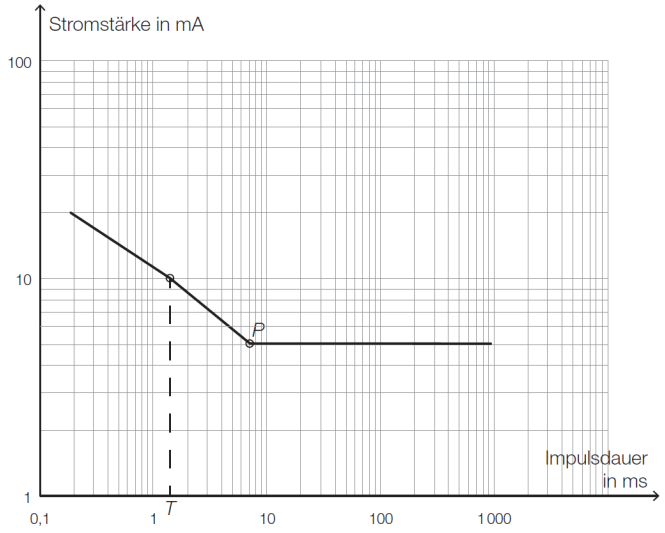
2) Berechnen Sie den Abstand zwischen 10 Pa und 50 Pa in cm auf der logarithmisch skalierten horizontalen Achse.

3) Zeigen Sie anhand der Funktionsgleichung, dass der Funktionsgraph in einem abszissenlogarithmischen Koordinatensystem eine lineare Funktion ist.

5.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Einsatz von Reizstrom ist eine gebräuchliche medizinische Behandlungsmethode.
Für die Diagnose von Muskellähmungen werden die Impulsdauer und die Stromstärke, die minimale Muskelzuckungen hervorrufen, untersucht. Die so erhaltenen Wertepaare werden in logarithmisch skalierten Diagrammen eingetragen.



1) Lesen Sie die Koordinaten des Punktes P ab.

Die Stelle T liegt genau in der Mitte zwischen den beiden benachbarten Teilstrichen.

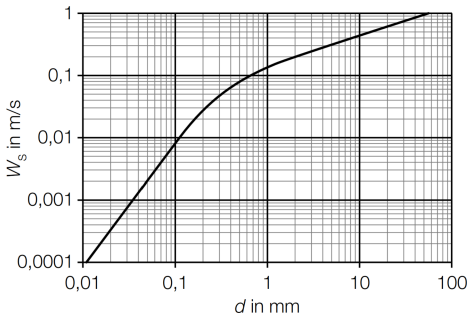
2) Setzen Sie eines der Zeichen $=$, $>$ oder $<$ so ein, dass eine wahre Aussage entsteht: T ☐ 1,5

3) Zeigen Sie, dass eine Potenzfunktion $y = c \cdot x^a$ in einem doppeltlogarithmischen Koordinatensystem als lineare Funktion dargestellt wird.

5.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Sedimente sind in Flüssigkeiten enthaltene Teilchen, die sich unter dem Einfluss der Schwerkraft ablagern.



Die Sinkgeschwindigkeit W_S von kugelförmigen Sandkörnern in Wasser hängt von deren Durchmesser d ab (siehe nachstehende Abbildung). Die Dichte ρ eines Sandkorns beträgt $2650\,\text{kg/m}^3$. Ein bestimmtes kugelförmiges Sandkorn hat eine Sinkgeschwindigkeit von $0{,}2\,\text{m/s}$.

1) Ermitteln Sie mithilfe der nebenstehenden Abbildung die Masse m dieses Sandkorns. Geben Sie das Ergebnis in der Einheit Gramm an.

Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Settling_velocity_quartz.png [15.03.2019] (adaptiert).

$W_S(d) = a \cdot c^d$	☐
$W_S(d) = \frac{a}{d}$	☐
$W_S(d) = a \cdot d^c$	☐
$W_S(d) = a \cdot d + c$	☐
$W_S(d) = a \cdot \ln(d) + c$	☐

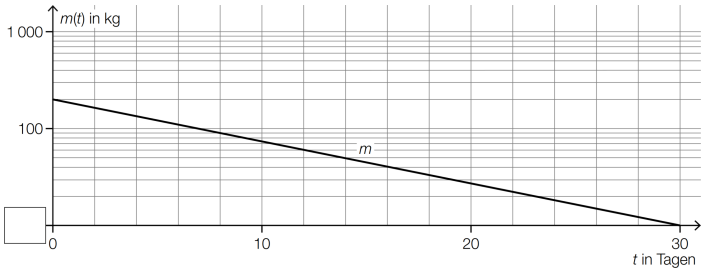
Im Bereich $0{,}01\,\text{mm} < d < 0{,}1\,\text{mm}$ ist der in der obigen Abbildung dargestellte Verlauf geradlinig. Daher kann die Sinkgeschwindigkeit W_S in Abhängigkeit vom Durchmesser d in diesem Bereich durch eine der nebenstehenden Funktionsgleichungen beschrieben werden.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung an. [1 aus 5]
a, c ... positive Konstanten

5.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Gesamtmasse der Fische in einem bestimmten Fischteich sinkt infolge einer Hitzewelle. Die Gesamtmasse der Fische in diesem Teich kann in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion m beschrieben werden.



t ... Zeit in Tagen mit $0 \leq t \leq 30$
$m(t)$ ... Gesamtmasse der Fische zur Zeit t in kg

Im nebenstehenden ordinatenlogarithmischen Koordinatensystem ist der Graph der Funktion m dargestellt.

$m(t) = a \cdot \lg(t) + b$	☐
$m(t) = -a \cdot t + b$	☐
$m(t) = a \cdot t^b$	☐
$m(t) = a \cdot b^t$	☐
$m(t) = a \cdot t + b$	☐

1) Tragen Sie im obigen Koordinatensystem die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

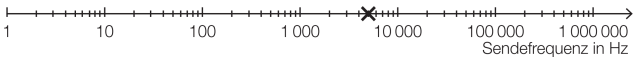
Im obigen Koordinatensystem ist der Graph von m eine Gerade.

2) Kreuzen Sie die zutreffende Funktionsgleichung von m an ($a > 0$, $b > 0$).

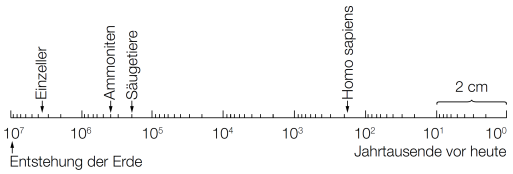
[1 aus 5]

3) Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion m.

5.1



5.2



Die ersten Affen traten vor rund 40 Millionen Jahren auf.

5.3 **1)** $c_1 = 2 \cdot 10^{-8}\,\text{mol/L}$

2) Die Konzentration der Wasserprobe liegt höchstens um 20,5... % unter c_2 und höchstens um 25,8... % über c_2.

5.4 **a)** $A = (0 \mid 0{,}2)$, $B = (2 \mid 40)$

b) $c = 0{,}2$ $\quad \lambda = 2{,}6491...$

5.5 Wenn die Abstände der Beschriftungen gleich groß sind, müsste auf der senkrechten Achse die oberste Beschriftung 375 sein.
Wenn die Abstände der Beschriftungen gleich groß sind, stimmt die Beschriftung 10 s auf der waagrechten Achse nicht, weil $10 \cdot 10\,\text{s}$ nicht 1 min ist.

5.6 Im rechten Bild ist ab Juni 2020 das Wachstum näherungsweise linear. Da die vertikale Achse aber logarithmisch skaliert ist, sind die Infektionszahlen näherungsweise exponentiell gewachsen.

5.7 **a)** Das Licht hat 96 % an Intensität verloren. **b)** Die maximale Länge des Lichtleiters beträgt 40 km. **c)** $\lambda = 0{,}040\,23...$

5.8 $T = 300\,^\circ\text{C}$ $\quad k = 0{,}042\,89...\,\text{min}^{-1}$

5.9 $L_p \approx 120$ dB $\quad d(50) - d(10) \approx 3{,}495$ cm
$L_p = 20 \cdot (\lg(p) - \lg(p_0)) = 20 \cdot \lg(p) - 20 \cdot \lg(p_0)$
$\Longrightarrow$ Lineare Funktion: $L_p = k \cdot P + d$ mit $P = \lg(p)$, $k = 20$ und $d = -20 \cdot \lg(p_0)$

5.10 $P = (7 \mid 5)$ $\quad T = \sqrt{2} \approx 1{,}414 < 1{,}5$
$y = c \cdot x^a \implies \lg(y) = \lg(c) + a \cdot \lg(x)$
$\Longrightarrow$ Lineare Funktion: $Y = k \cdot X + d$ mit $X = \lg(x)$, $Y = \lg(y)$, $k = a$ und $d = \lg(c)$

5.11 **a)** 0,0111... g **b)** $W_S(d) = a \cdot d^c$

5.12 **1)** 10 **2)** $m(t) = a \cdot b^t$ **3)** $a = 200$, $b = 0{,}9049...$

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at