AUFGABENSAMMLUNG – FERMIRECHNUNGEN UND ABSCHÄTZUNGEN

Einleitung

Die Bezeichnung *Fermiproblem* oder *Fermirechnung* geht auf den Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (Abbildung 1) zurück. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um größenordnungsmäßige Abschätzungen, also um Abschätzungen, bei denen vor allem die Größe der Zehnerpotenz eine Rolle spielt. Sie werden dann durchgeführt, wenn auf Grund der Komplexität eines Problems eine genaue Lösung aussichtslos ist, beziehungsweise wenn gar nicht alle benötigten Daten vorliegen. Wenn Sie diese „Ungenauigkeiten“ akzeptieren, steht Ihnen das weite Feld der einfachen quantitativen Erklärungen offen. Versuchen Sie, bei den Abschätzungen immer in Größenordnungen und Gleitkommadarstellung zu rechnen. Ein Tag hat zum Beispiel 86 400 Sekunden oder in Gleitkommadarstellung $8{,}64 \cdot 10^4$ Sekunden. Wenn man es grob haben möchte, könnte man auf $9 \cdot 10^4$ oder sogar auf 10^5 runden. Das wäre dann die oben mehrfach angesprochene Größenordnung.

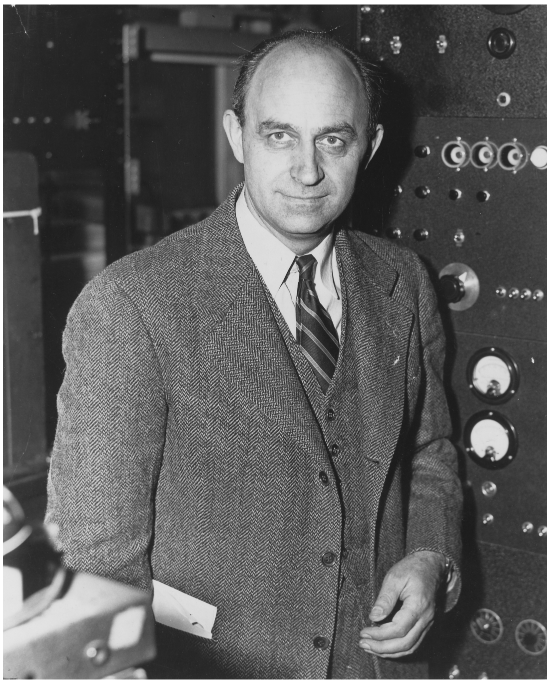

Abbildung 1. Der Physiker und Nobelpreisträger Enrico Fermi (1901-1954)

Datum: 10. September 2023.

1. Mensch & Körper

1.1. **Wie oft schlägt das Herz im Laufe des Lebens?** Das ist ein sehr gutes Beispiel für eine Fermirechnung, weil eine exakte Antwort natürlich vollkommen unmöglich ist. Die Herzfrequenz hängt unter anderem von Alter, Geschlecht, Lebenswandel oder Trainingszustand ab. Mit einer einfachen Abschätzung kann man aber eine Größenordnung eruieren, die für alle Menschen gültig ist. Tippen Sie zunächst ohne zu rechnen spontan auf einen Wert.

Hilfestellung. Schätzen Sie, wie oft das Herz in einer Minute schlägt, oder messen Sie ihren Puls. Die Anzahl der Pulsschläge ergibt sich dann über der (vernünftig geschätzten) Anzahl der Minuten, die ein Mensch lebt. [1]

Weiterführende Hinweise. Die Größenordnung „Milliarden Schläge“ gilt übrigens interessanterweise für alle Wirbeltiere, wobei der Mensch mit 3 Milliarden Schlägen hervorsticht. Zwei Extrembeispiele dazu: Elefanten haben einen Puls von 25 bis 30 Schlägen pro Minute und werden 60 bis 70 Jahre alt. In Summe macht das $0{,}8 \cdot 10^9$ bis $1{,}1 \cdot 10^9$ Schläge im Laufe des Lebens. Die Etruskerspitzmaus hat einen Puls von 1200 Schlägen in der Minute! Bei einer Lebenserwartung von 2 Jahren kommt sie auf $2{,}4 \cdot 10^9$ Schläge. In beiden Fällen beträgt die Größenordnung also Milliarden Schläge.

1.2. **Aus wie vielen Atomen besteht der Mensch?** Auch hier ist natürlich keine exakte Antwort möglich. Jede einzelne Zelle im menschlichen Körper hat etwa 10^{13} Atome. Trotzdem lässt sich auf einfachem Wege eine sehr brauchbare Größenordnung ermitteln. Tippen Sie zunächst wieder ganz spontan und aus dem Bauch heraus auf einen Wert.

Hilfestellungen.

- Überlegen Sie, aus welchen Hauptbestandteilen sich der menschliche Körper zusammensetzt und vereinfachen Sie dabei stark.
- Je nach Alter, Geschlecht und Körperzusammensetzung besteht der Mensch aus 50 bis 75 % Wasser. Man kann die Schätzung daher vereinfachen und annehmen, dass der Mensch zu 100 % aus Wasser besteht. Wenn er angenommen 80 kg hat, könnte man die Frage daher auch so stellen: Aus wie vielen Atomen bestehen 80 kg Wasser?
- Die Molmasse eines Stoffes in Gramm entspricht zahlenmäßig seiner relativen Massenzahl. Diese ist in Abbildung 2 als Kommazahl unter dem Elementnamen angegeben. Ein Mol Wasserstoff hat also zum Beispiel $1{,}0079\,\text{g} \approx 1\,\text{g}$. Überlegen Sie mit Hilfe der Abbildung, wie viel Gramm ein Mol Wasser hat. Ein Mol hat wiederum $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

[1] Auf den letzten Seiten des Dokuments befinden sich Lösungsvorschläge.

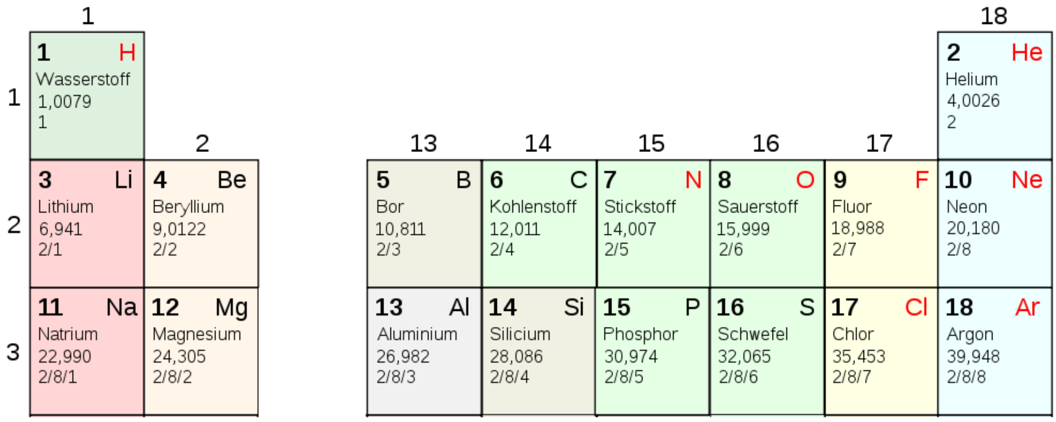

Abbildung 2. Ausschnitt aus dem Periodensystem

Weiterführende Hinweise. In Tabelle 1 ist eine genauere Aufschlüsselung der Elemente zu sehen, aus denen sich der Mensch zusammensetzt. Wenn man damit dieselbe Rechnung wie oben durchführt, kommt man auf genau dieselbe Größenordnung, nämlich 10^{28} Atome. Diesen Wert findet man daher auch durchgängig in der Literatur.

Element	Massen-Prozent	absolute Masse	Körpermasse
		60 kg	80 kg
Sauerstoff (O)	64 %	38,4 kg	51,2 kg
Kohlenstoff (C)	20 %	12 kg	16 kg
Wasserstoff (H)	10 %	6 kg	8 kg
Stickstoff (N)	3 %	1,8 kg	2,4 kg
Calcium (Ca)	1,5 %	0,9 kg	1,2 kg
Phosphor (P)	1 %	0,6 kg	0,8 kg
Rest	0,5 %	0,3 kg	0,4 kg

Tabelle 1. Die Massenanteile des Menschen nach Elementen sortiert. Zur besseren Anschaulichkeit sind in der letzten Spalte die absoluten Massenwerte für zwei konkrete Beispiele angegeben. Die Zahlen sind als Richtwerte zu sehen.

1.3. **Wie schnell wachsen Haare in m/s? Wie viele Atomschichten müssen dazu pro Sekunde unten „angebaut“ werden?** Jeder weiß aus Erfahrung, wie viel Haare innerhalb eines Jahres in etwa nachwachsen. Schätzen Sie diese Zahl ab, und rechnen Sie dann die Einheit von cm/Jahr in m/s um. Schätzen Sie außerdem ab, wie vielen Atomschichten das entspricht.

Hilfestellungen.

- Die Wachstumsgeschwindigkeit von Haaren beträgt etwa 10 bis 15 cm pro Jahr. Wenn man einen mittleren Wert von 12 cm pro Jahr nimmt, kommt man auf den Wert von 1 cm/Monat.
- Um die Wachstumsgeschwindigkeit auf Atome pro Sekunde umrechnen zu können, müssen Sie den typischen Atomdurchmesser kennen, der bei 10^{-10} m liegt (siehe auch Aufgabe 3.1).

Abbildung 3. Wie schnell wachsen Haare in m/s?

Weiterführende Hinweise. An den Haarwurzeln ist also ganz schön was los. Das ist auch der Grund, warum es bei bestimmten Formen der Chemotherapie zu Haarausfall kommen kann. Viele der zur Therapie eingesetzten Medikamente, sogenannte Zytostatika, wirken besonders auf schnell wachsende und sich häufig teilende Zellen. Sie unterscheiden dabei nicht zwischen Krebszellen und Haarwurzelzellen und das lässt leider auch die Haare ausfallen.

2. Ernährung & Gesundheit

2.1. **Wie viel Kilogramm kann man bei Nulldiät in einer Woche maximal abnehmen?** Es wird immer wieder behauptet, dass man in einer Woche 5 kg abnehmen kann. Stimmt das? Überprüfen wir mit der radikalsten und daher effizientesten (aber gleichzeitig ungesündesten) Diät von allen: der Nulldiät. Ob man zu- oder abnimmt wird nur über die Energiebilanz geregelt. Fließt weniger Energie in den Körper hinein (Energieinput) als umgesetzt wird (Energieoutput), dann holt sich der Körper den fehlenden Betrag aus den Fettdepots und umgekehrt. Man nimmt immer dann ab, wenn die Energiebilanz negativ ist. Wie viel nimmt man in einer Woche ab, wenn man gar nichts isst?

Hilfestellungen.

- Ein typischer Tagesbedarf für einen Erwachsenen liegt bei etwa 10 000 kJ.
- Ein Kilogramm Körperfettgewebe hat einen Brennwert von etwa 30 000 kJ. Das ist etwas weniger als der Brennwert von reinem Fett (39 000 kJ). Das liegt daran, dass Körperfettgewebe auch Wasser- und Eiweißanteile aufweist.

Weiterführende Hinweise. Man muss generell zwischen „abnehmen“ (= die Waage zeigt weniger) und „abspecken“ (= Fett abnehmen) unterscheiden. Abnehmen kann sehr schnell gehen, etwa wenn man

Wasser verliert. Bei starkem Schwitzen kann man bis zu 2 l Wasser in der Stunde verlieren. Bei einer radikalen Diät können auch bis zu 0,4 kg Muskelmasse pro Tag verloren gehen. Diese Effekte sind erstens nicht erwünscht und zweitens sehr limitiert. Man kann zum Beispiel nur wenige Liter Wasser verlieren ohne dass es lebensgefährlich wird. In unserem Beispiel oben schätzen wir das Abspecken ab. Es kann daher durchaus sein, dass man in einer Woche 5 kg abnimmt, es ist aber auszuschließen, dass man 5 kg abspeckt, wie das in den Medien oft vorgegaukelt wird.

2.2. **Wie viele Kilometer muss man laufen, damit man 1 kg Fett verliert?** Laufen ist eine sehr gute Betätigung, um abzunehmen. Aber wie schnell geht das? Wie weit muss man für 1 kg Fett laufen? Schätzen Sie unter der Voraussetzung ab, dass sich sonst nichts an Ihrem Leben ändert.

Abbildung 4. Laufen – ein sehr effizienter Weg um abzunehmen

Hilfestellungen.

- Den Brennwert von 1 kg Körperfett können Sie in Frage 2.1 nachsehen.
- Es gibt eine sehr brauchbare Faustregel für den Energieumsatz beim Laufen, die vom italienischen Physiologen Rudolfo Margaria stammt. Pro kg und pro km setzt man 1 kcal (= 4,2 kJ) um. Eine Person mit beispielsweise 70 kg setzt also auf einer Laufstrecke von 1 km etwa 70 kcal (= 294 kJ) um. Weil der Körper beim Laufen bei jedem Schritt gehoben wird, ist der Energieumsatz von der Masse abhängig und muss individuell berechnet werden.

Weiterführende Hinweise. Laufen ist eine der effizientesten Möglichkeiten, um abzunehmen. Trotzdem muss man für 1 kg Fett überraschend viel investieren. Angenommen, Sie laufen jeden Tag einen Kilometer. Dann brauchen Sie 100 Tage, also über drei Monate, damit sie 1 kg Fett abnehmen. Das macht klar, dass man nicht – wie oft behauptet – mit wenigen Minuten Sport pro Tag bald sichtbare Effekte erzielen kann.

2.3. **Wie viel Fettgewebe nimmt man im Laufe eines Jahres ab, wenn man jeden Tag zweimal zu Fuß in den 4. Stock geht?** Obwohl man leider durch Sport und Bewegung weniger abnimmt, als man denkt, ist der Faktor Bewegung trotzdem das Zünglein an der Waage. Wichtig ist der Faktor Zeit. Für dieses Beispiel müssen Sie mit Hilfe der potentiellen Energie abschätzen und dürfen den Wirkungsgrad nicht vernachlässigen.

Hilfestellungen.

- Die Formel für die Hebearbeit lautet
$$W_H = m \cdot g \cdot h\,.$$
Für die Fallbeschleunigung g können Sie den gerundeten Wert $10\,\mathrm{m/s^2}$ verwenden.
- Diese Formel gibt aber nur die Nettoarbeit an. Leider muss der Körper wesentlich mehr Energie aufwenden, weil ein Großteil in Form von Wärme verloren geht. Wie groß der Verlust ist, beschreibt der Wirkungsgrad. Bei Treppensteigen liegt dieser bei etwa 25 %. Das bedeutet, dass 25 % der Energie für die eigentliche Tätigkeit genutzt werden können, während 75 % als Wärme verloren gehen. Den Brennwert für 1 kg Körperfett können Sie in Frage 2.1 nachschlagen.

Weiterführende Hinweise. Man darf die kleinen Effekte nicht vernachlässigen. Wenn man den Tagesbedarf im Schnitt um 1 % überschreitet, summiert sich das im Laufe eines Jahres (bei einem angenommenen Tagesbedarf von 10 000 kJ) auf $100\,\mathrm{kJ} \cdot 365 = 36\,500\,\mathrm{kJ}$, was wiederum etwa mehr als 1 kg Fett entspricht. Das gilt wie im Beispiel oben auch umgekehrt.

2.4. **Wie stark verdünnt sind Homöopathika?** Wenn man den Ausgangsstoff auf 1 : 100 verdünnt, dann nennt man das in der Homöopathie C1. Wenn man das noch mal macht, dann ist vom Ausgangsstoff nur mehr $1 : 10^4$ da. Das nennt man C2. Bei einer Verdünnung von C12 ist vom Ausgangsstoff zum Beispiel nur mehr $1 : 10^{24}$ da.

Allgemein gilt: CN entspricht $1 : 10^{2N}$. Schätzen Sie ab, ab welcher Verdünnung CN sich in einem homöopathischen Fläschchen kein einziges Atom des Wirkstoffes befindet.

Abbildung 5. Wie stark verdünnt sind Homöopathika?

Hilfestellungen.

- Nehmen Sie vereinfacht an, dass die Ausgangssubstanz vor der Verdünnung eine Menge von 1 Mol besitzt. 1 Mol Wasser entspricht zum Beispiel 18 g (siehe Aufgabe 1.2). Das entspricht 1,8 cl und somit etwa der Menge, die man in ein Schnapsglas bekommt.

Abbildung 6. Wenn man ein Schnapsglas nicht ganz mit Wasser füllt, befindet sich etwa 1 Mol darin

- Ein Mol hat $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Um leichter rechnen zu können, runden Sie auf 10^{24} Teilchen auf.

Weiterführende Hinweise. Es gilt heute als wissenschaftlich unbestritten, dass die Wirkung von Homöopathika nicht über den Placeboeffekt hinausgeht. Das heißt, die Wirkung wird salopp gesagt nur im Kopf erzeugt, es gibt aber keinen Wirkstoff, der wirkt. Eine der ersten, großen Metastudien zu diesem Thema wurde 2005 in The Lancet veröffentlicht.

2.5. **Wie viele Atome müssen jede Sekunde in eine menschliche Eizelle eingelagert werden, damit diese innerhalb von 19 Jahren zu einem erwachsenen Menschen heranwächst?** Eine weibliche Eizelle (Abbildung 7) ist extrem winzig, kaum größer als $\frac{1}{10}$ mm – so klitzeklein beginnt unsere Existenz. Trotzdem kann man abschätzen, dass sie schon aus etwa 1017 Atomen besteht. Nehmen wir an, ein Mensch ist mit 19 Jahren ausgewachsen und legen für die vorgeburtliche Entwicklung noch ein gerundetes Jahr dazu. Wie viele Atome müssen dazu im Schnitt jede Sekunde in den Körper eingelagert werden?

Hilfestellungen.

- Ein erwachsener Mensch besteht aus etwa 10^{28} Atomen (siehe Aufgabe 1.2).

2.6. **Wie viele Atome müssen jede Sekunde in Ihrem Körper ausgetauscht werden, damit sich dieser regenerieren und reparieren kann?** Im Schnitt müssen jede Sekunde 10^{19} Atome in den Körper eingelagert werden müssen, damit er innerhalb von 20 Jahren auf 10^{28} Atome kommt (Aufgabe 1.2). Aber wenn man dann endlich ausgewachsen ist, ist die Sache noch lange nicht vorbei.

Abbildung 7. Eine befruchtete Eizelle

Der Körper ist ein Leben lang eine riesige Baustel-le. Der Großteil der Zellen erneuert sich pausenlos und hat dabei teilweise eine überraschend kurze Lebensdauer (Tabelle 2). Schätzen Sie ab, wie viele Atome dabei jede Sekunde abgebaut und wieder neu eingelagert werden müssen.

Zelltyp	**Lebensdauer**
Schleimhaut Dünndarm	2 bis 4 Tage
Magen	2 bis 9 Tage
Lungenbläschen	8 Tage
Geschmacksknospen	10 Tage
Oberhaut	10 bis 30 Tage
Rote Blutkörperchen	4 Monate
Leber	6 bis 12 Monate
Muskelzellen	15 bis 20 Jahre
Knochen	25 bis 30 Jahre
Linsenzellen und Netzhaut	werden nie ausgetauscht
Nervenzellen	werden nie ausgetauscht

Tabelle 2. Wie lange die einzelnen Typen von Körperzellen leben

Hilfestellungen.

- Im Körper gibt es etwa 10^{14} Zellen.
- Grob geschätzt sterben jeden Tag etwa 70 Milliarden Zellen.

3. Umwelt & Mobilität

3.1. **Wie viele Schichten Atome verliert ein Autoreifen pro Umdrehung?** Die Gummireifen eines Autos nutzen sich mit der Zeit ab und das Profil wird immer niedriger. Nehmen wir vereinfacht

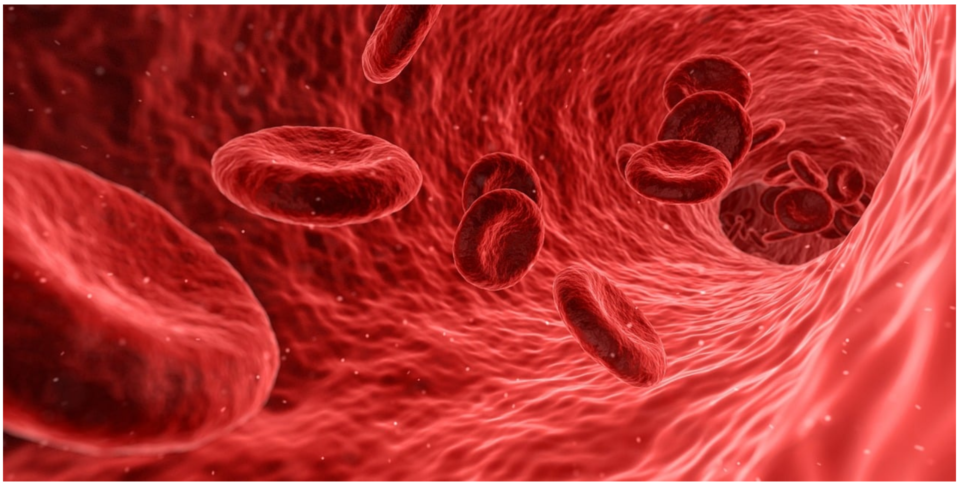

Abbildung 8. Rote Blutkörperchen

an, dass dieser Profilverlust kontinuierlich passiert. Wie stark ist die Abnutzung pro Umdrehung des Reifens? Geben Sie diese Abnutzung als Anzahl von Atomschichten an.

Hilfestellungen.

- Überlegen Sie, wie viele Kilometer man mit einem Reifen fahren kann, bevor man ihn erneuern muss und wie stark die Abnutzung dabei ist. Um die Anzahl der Umdrehungen zu bekommen, müssen Sie den Umfang eines Autoreifens abschätzen.
- Um die Abnutzung in Atomschichten umrechnen zu können, müssen Sie den typischen Atomdurchmesser kennen, der bei 10^{-10} m liegt.

Weiterführende Hinweise. Für Deutschland wird die Gesamtabriebmenge an Gummi pro Jahr ermittelt: 110 000 Tonnen! Für Österreich kann man $1/10$ annehmen, also immerhin rund 11 000 t.

3.2. **Wie stark steigt der CO_2-Anteil in der Atmosphäre an?** Momentan setzt im Schnitt jeder Mensch etwa 5 Tonnen CO_2 pro Jahr frei. Aktuell leben 7,7 Milliarden Menschen auf der Erde (Stand Juli 2019). Nehmen Sie an, dass die Hälfte des emittierten Kohlenstoffs in der Atmosphäre verbleibt und der Rest von der Landbiosphäre und dem Ozean aufgenommen wird. Die mittlere Molmasse von Luft beträgt 29 g.

Hilfestellungen.

- Ein Mol hat $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen.
- Sauerstoff (O) hat die relative Massenzahl 16, Kohlenstoff 12. Ein CO_2-Molekül hat daher die relative Masse 44 und ein Mol CO_2 somit 44 g.

Abbildung 9. Ein steigender Anteil von CO_2 ist mitverantwortlich für die globale Erwärmung.

3.3. **Welche Effekte hätte es, wenn man auf der Autobahn statt mit** 130 km/h **mit** 140 km/h **fahren darf?** Im Frühjahr 2019 wurden auf Initiative des damaligen Verkehrsministers Teststrecken für Tempo 140 km/h auf der Autobahn eingerichtet. Überlegen Sie, welche Auswirkungen das auf den Zeitgewinn, den Benzinverbrauch und den Bremsweg haben würde und schätzen Sie ab, wie sinnvoll eine solche Maßnahme daher – vor allem auch aus ökologischer Sicht – wäre. Schätzen Sie mit Hilfe von Proportionen ab. Überlegen Sie auch, was umgekehrt eine Reduktion auf 120 km/h bedeuten würden.

Abbildung 10. Die erlaubte Höchstgeschwindigkeit hat nicht zuletzt Auswirkungen auf das Gefahrenpotenzial

Hilfestellungen.

- Der Kraft, die man beim Fahren überwinden muss, kommt durch den Rollwiderstand und den Luftwiderstand zustande. Den Rollwiderstand kann man bei großen Geschwindigkeiten vernachlässigen.
- Die Luftwiderstandskraft wird mit der Formel
$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$
berechnet. Dabei steht ρ für die Luftdichte, c_w für den Luftwiderstandsbeiwert (der letztlich die Windschlüpfrigkeit angibt), A für die Anströmfläche und v für die Fahrgeschwindigkeit in m/s. Überlegen Sie, welche dieser Werte durch unterschiedliches Tempo beeinflusst wird, und arbeiten Sie mit Proportionen. Außerdem gilt allgemein `Arbeit = Kraft mal Weg`.
- Beim Bremsen muss die gesamte kinetische Energie $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ in Wärme umgewandelt werden. Pro bestimmter Bremsstrecke kann nur eine bestimme Menge an kinetischer Energie in Wärme umgewandelt werden. Diese Menge hängt von Zustand und Leistungsfähigkeit der Bremsen ab.

3.4. **Wie kann man die maximale Geschwindigkeit eines Objekts beim realistischen freien Fall mit Luftwiderstand abschätzen? Wie schnell wird zum Beispiel ein Fallschirmspringer im freien Fall?** Die Fallbeschleunigung beträgt rund $10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$ (exakt sind es in unseren Breiten $9{,}81\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}^2}$). Pro Sekunde wird ein frei fallendes Objekt also um $10\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ schneller. Ohne Luftwiderstand würde also zum Beispiel ein Fallschirmspringer nach 34 Sekunden $340\,{}^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$ erreichen und die Schallmauer durchbrechen. Das ist natürlich unrealistisch. Welche Geschwindigkeit erreicht aber ein Fallschirmspringer? Und wovon hängt seine Maximalgeschwindigkeit ab?

Abbildung 11. Welche Geschwindigkeit erreicht ein Fallschirmspringer im freien Fall?

Hilfestellungen.

- Beim freien Fall treten zwei Kräfte auf: Die Gewichtskraft und die Luftwiderstandskraft. Die beiden Kräfte zeigen in die Gegenrichtung, also F_G hinunter und F_L hinauf.
- Die Gewichtskraft berechnet man mit $F_G = m \cdot g$, die Luftwiderstandskraft mit $F_L = \frac{1}{2}\,\varrho\, c_w\, A\, v^2$. Dabei steht ϱ für die Luftdichte, c_w für den Luftwiderstandsbeiwert (der letztlich die Windschlüpfrigkeit angibt), A für die Anströmfläche und v für die Fahrgeschwindigkeit in $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{s}}$.
- F_L ist zu Beginn null und wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit an. Wenn der Betrag von F_L so groß geworden ist wie G, dann heben einander beide Kräfte auf. Die Beschleunigung sinkt auf null ab und die Maximalgeschwindigkeit ist erreicht.

3.5. **Welche maximale Beschleunigung von 0 auf 100 km/h ist möglich?** Ein Formel-1-Bolide hat über den Daumen eine Leistung von etwa 600 kW (800 PS). Das Problem ist nun, die entstehenden Kräfte auf die Straße zu bringen. Denn Kraft ist nicht alles, es kommt auch auf die Reibung an. Die Reibungskraft zwischen Reifen und Boden ist der leistungslimitierende Faktor, und die Antriebskraft kann die Reibungskraft niemals überschreiten. Nehmen Sie als Extrembeispiel, der Bolide stünde auf blankem Eis. Er würde sich aufgrund der fehlenden Reibung nicht vom Fleck rühren. Wie groß ist die maximale erzielbare Beschleunigung bzw. welche Beschleunigungszeit von 0 auf 100 km/h kann nicht unterschritten werden, egal welche Leistung das Auto hat?

Abbildung 12. Der Bugatti Chiron Super Sport

Hilfestellungen.

- Reibungskraft ist Reibungskoeffizient mal Gewicht, also $F_R = \mu \cdot G$. Das Gewicht ist wiederum Masse mal Erdbeschleunigung ($g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$), also $G = m \cdot g$. Daraus folgt $F_R = \mu \cdot m \cdot g$.
- Für Gummi und trockenen Asphalt beträgt der Reibungskoeffizient im Extremfall 1,1.
- Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen auftretender Kraft F und daraus resultierender Beschleunigung a wird durch das 2. Newtonsche Grundgesetz beschrieben und lautet $F = m \cdot a$. Wenn man diese Gleichung nach a umformt $\left(a = \dfrac{F}{m}\right)$, sieht man nebenbei erwähnt

sofort, warum mit der Tankfüllung im Grand Prix geknausert wird, denn die Beschleunigung ist indirekt proportional zu Masse.

3.6. **Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Leistung eines Autos und seiner maximalen Geschwindigkeit?** Man kennt das auch vom Fahrradfahren: Je schneller man fährt, desto stärker wird der Luftwiderstand. Deshalb erreicht man irgendwann eine Maximalgeschwindigkeit, die durch die Muskelleistung begrenzt ist. Beim Auto ist es vergleichbar. Wenn man den Luftwiderstand kennt, dann kann man mit Hilfe der Motorleistung die Endgeschwindigkeit berechnen. Um welchen Faktor muss man die Motorleistung erhöhen, damit sich die Endgeschwindigkeit verdoppelt?

Leistung	1600 PS (1177 kW)
c_W-Wert im Top-Speed-Setup	0,36
Anströmfläche	2,1 m^2

Tabelle 3. Die Parameter des Bugatti Chiron Super Sport (siehe auch Abbildung 12)

Hilfestellungen.

- Leistung ist allgemein Arbeit (bzw. Energieumsatz) pro Zeit: $P = \frac{W}{t}$.
- Arbeit ist allgemein Kraft mal Weg: $W = F \cdot s$.
- Der Rollwiderstand spielt bei der Maximalgeschwindigkeit nur eine marginale Rolle. Die bei der Maximalgeschwindigkeit auftretende Kraft ist letztlich nur die Luftwiderstandskraft:

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot c_W \cdot A \cdot v^2$$

Dabei ist ϱ die Luftdichte (auf Meeresniveau etwa 1,2 kg/m^3), c_W ist der dimensionslose Luftwiderstandsbeiwert (kurz auch c_W-Wert genannt), A die Anströmfläche in m^2 und v die Anströmgeschwindigkeit der Luft in m/s.

4. Erde und Weltall

4.1. **Wie viele Atome gibt es im sichtbaren Universum?** Mit dem Urknall entstanden praktisch nur zwei Elemente, die auch noch heute die beiden häufigsten im Universum sind: Wasserstoff (etwa 92 % aller Atome) und Helium (7,8 %). Nur der kleine Rest von etwa 0,2 % sind schwerere Elemente. Gehen Sie in Ihrer Abschätzung daher vereinfacht davon aus, dass das Universum nur aus Wasserstoff besteht. Wie viele Atome befinden sich davon im sichtbaren Universum?

Hilfestellungen.

Abbildung 13. Das Hubble Extreme Deep Field (XDF) entstand, indem Aufnahmen des Hubble-Weltraumteleskops über einen Zeitraum von zehn Jahren zusammengefügt wurden. Es umfasst Aufnahmen von einer Gesamtbelichtungszeit von zwei Millionen Sekunden. Auf dem Bild sind insgesamt 5500 Galaxien zu sehen.

- Nehmen Sie zusätzlich zur Vereinfachung, dass das Universum nur aus Wasserstoff besteht, auch an, dass die Sonne ein ganz durchschnittlicher Stern im sichtbaren Universum ist. Die Sonne hat eine Masse von $2 \cdot 10^{30}$ kg.
- In unserer Galaxie befinden sich etwa $2 \cdot 10^{11}$ Sterne. Im sichtbaren Universum befinden sich wiederum mindestens 10^{11} Galaxien. Nehmen Sie vereinfacht an, dass unsere Milchstraße eine durchschnittliche Galaxie ist.

Weiterführende Hinweise. Diese errechnete Zahl bezieht sich nur auf die Atome im sichtbaren Universum. Wie viele Atome es im gesamten Universum gibt, ist nicht bekannt. Es besteht sogar die nicht unwahrscheinliche Möglichkeit, dass das Universum unendlich groß ist. In diesem Fall wäre die Anzahl der Atome natürlich ebenfalls unendlich.

4.2. **Kann man die Chinesische Mauer vom Mond aus sehen?** Es wird immer wieder behauptet, dass die Chinesische Mauer das einzige Bauwerk sei, das man mit bloßem Auge vom Mond aus sehen könne. Kann das stimmen? Versuchen Sie, eine Abschätzung zu machen. Gehen Sie von der vereinfachten Vorstellung aus, dass man ein Objekt dann sehen kann, wenn es zumindest eine Sehzelle auf der Netzhaut vollkommen abdeckt!

Abbildung 14. Die Chinesische Mauer ist über 21 000 km lang und etwa 10 m breit

Hilfestellungen.

- Die Entfernung Erde-Mond beträgt im Schnitt 380 000 km. Der Durchmesser eines Auges beträgt etwa 2 cm. Eine Sehzelle auf der Netzhaut hat einen Durchmesser von $3 \cdot 10^{-6}$ m.
- Verwenden Sie den Strahlensatz wie in Abbildung 15 unten. Bis auf G sind alle Werte bekannt.

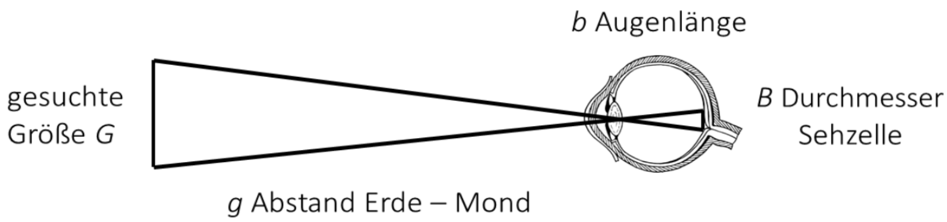

Abbildung 15. Geometrische Überlegungen

Weiterführende Hinweise. Hilft die Länge der Mauer, um sie zu erkennen? Nein! Die Chinesische Mauer vom Mond aus gesehen ist so dünn wie ein Haar aus rund 4 km Entfernung. Auch hier spielt es keine Rolle, wie lang das Haar ist – es ist einfach viel zu dünn, um gesehen zu werden. Es würde aber eventuell helfen, wenn man die Mauer mit sehr sehr starken Scheinwerfern bestrahlt, um den Kontrast zu erhöhen (siehe Aufgabe 4.3).

4.3. **Welche Bildgröße erzeugt ein naher Stern auf der Netzhaut, etwa Sirius A?.** Der Stern Sirius A hat 1,7 Sonnenradien oder einen absoluten Radius von $1{,}2 \cdot 10^9$ m und befindet sich in einer Entfernung von nur 8,6 Lichtjahren. Wie groß ist das Bild, das er auf der Netzhaut erzeugt?

Warum ist das Ergebnis etwas überraschend? Überlegen Sie mit Hilfe von Frage 4.2. Berechnen Sie die Länge eines Lichtjahres (Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$) oder sehen Sie in der Hilfe nach.

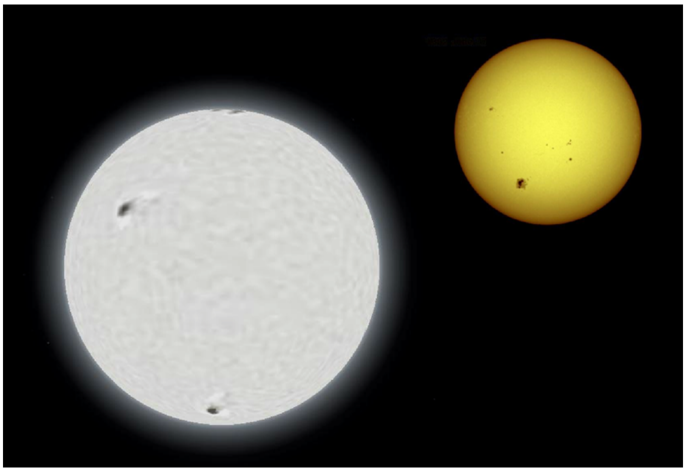

Abbildung 16. Größenvergleich zwischen Sirius A und der Sonne

Hilfestellungen. Ein Jahr hat in Summe

$$60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 = 31{,}5 \cdot 10^6\,\text{Sekunden}\,.$$

In dieser Zeit legt das Licht somit

$$31{,}5 \cdot 10^6\,\mathrm{s} \cdot 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s} = 9{,}46 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m}$$

zurück.

Weiterführende Hinweise. Warum ist das überraschend? Wenn man die Größe des Bildes für die Chinesische Mauer rechnet (Breite $= 10\,\mathrm{m}$), dann kommt man auf

$$B = \frac{G \cdot b}{g} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{3{,}8 \cdot 10^8}\,\mathrm{m} \approx 5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,,$$

also praktisch auf dasselbe Ergebnis. Sirius A erzeugt also auf der Netzhaut ein ziemlich gleich großes Bild wie die Dicke der Chinesischen Mauer. Weil er aber zur Umgebung einen extremen Kontrast aufweist, kann man ihn trotzdem sehen. Die einzige Möglichkeit, die Chinesische Mauer vom Mond aus zu sehen wäre also, sie sternhell zu beleuchten.

4.4. **Welche Masse hat die Atmosphäre?** Schätzen Sie mit Hilfe der Abbildung die Masse der Erdatmosphäre ab.

Abbildung 17. Mit diesem russischen Barometer sind Messungen in hPa und mmHg (das entspricht in sehr guter Näherung der Einheit Torr) möglich.

Hilfestellungen.

- Der Luftdruck wird in SI-Einheiten in hPa (Hektopascal) angegeben. Der normale Luftdruck auf Meeresniveau liegt bei 1013 hPa, was 760 Torr (Torricelli; veraltete Nicht-SI-Einheit) entspricht.
- Es gilt einerseits $1\,\mathrm{Pa} = \frac{1\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{m}^2}$, andererseits für die Gewichtskraft $G = m \cdot g$, wobei g den Wert $9{,}81\,\mathrm{m/s}^2$ hat.
- Die Formel für die Kugeloberfläche lautet $O = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$.

5. Gedankenspiele

5.1. **Kann man sich nach 8 Sekunden im freien Fall durch Festhalten mit den Händen abbremsen?** Im Film Lara Croft: Tomb Raider aus dem Jahr 2001 fällt die Hauptdarstellerin in eine Höhle. Nach 8 Sekunden im freien Fall gelingt es ihr, sich an einer Liane festzuhalten und abzubremsen. Ist das möglich? Schätzen Sie ohne Luftwiderstand ab.

Abbildung 18. In dieser Tempelanlage in Kambodscha fällt Lara Croft in eine Höhle

Hilfestellungen.

- Wenn man nur am Tempo interessiert ist, braucht man gar keine Formel, sondern muss sich nur überlegen, was die Fallbeschleunigung $g \approx 10\,\mathrm{m/s^2}$ für die Geschwindigkeitszunahme bedeutet. Wie kommt es zu der Einheit $\mathrm{m/s^2}$ und was bedeutet diese?
- Wenn man auch an der Falltiefe interessiert ist, ist der Zusammenhang zwischen Fallzeit t und Falltiefe s wichtig, der durch die Formel
$$s = \frac{g}{2} \cdot t^2$$
beschrieben wird.

Weiterführende Hinweise. Wie realistisch ist es, wenn man den Luftwiderstand vernachlässigt? Im freien Fall wird man bei der typischen „Fallschirmspringerposition“ in waagrechter Lage etwa 180 bis 200 km/h schnell. In senkrechter Position, wie das aber im Film gezeigt ist, wird man etwa 300 km/h schnell. Die Abschätzung ist also auch ohne Luftwiderstand realistisch und liegt in der richtigen Größenordnung.

5.2. **Wie lange dauert es, um in einen Kubikmeter kleine Würfeln von je $1\,\mathrm{mm}^3$ einzuschlichten?** Nehmen Sie an, Sie wollen eine Schachtel mit dem Volumen von $1\,\mathrm{m}^3$ mit kleinen Würfeln von je $1\,\mathrm{mm}^3$ einschlichten. Sie schaffen dabei einen Würfel pro Sekunde und machen keine Pause. Wie lange dauert das? Rechnen Sie möglichst einfach und in eine Einheit um, unter der man sich etwas vorstellen kann. Geben Sie vorher einen schnellen Tipp ab ohne zu rechnen!

5.3. **Welche Verdünnung erhält man, wenn man ein Schnapsglas voll Wasser in den Weltmeeren verdünnt?** Das ist eine Fortführung von Aufgabe 5, die zeigen soll, wie absurd stark die Verdünnungen in der Homöopathie sind. Gehen Sie bei Ihren Überlegungen wieder davon aus, dass sich in dem Schnapsglas gerundet 1 Mol Wasser befindet. Sie können versuchen, die Wassermenge auf der Erde (Radius 6370 km) selbst abzuschätzen oder Sie sehen in der Hilfe nach.

Abbildung 19. Wasser in den Weltmeeren verdünnen

Hilfestellungen. Der Radius der Erde beträgt 6370 km, also etwa $6{,}4 \cdot 10^6$ m. Die Kugeloberfläche berechnet sich mit $A = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$ und ist bei der Erde somit etwa $5{,}14 \cdot 10^{14}$ m^2. Wenn man annimmt, dass durchschnittlich $2/3$ der Erdoberfläche mit Wasser bedeckt sind, kommt man auf $3{,}43 \cdot 10^{14}$ m^2. Wenn man weiters annimmt, dass die Meere im Durchschnitt 4000 m tief sind, ergibt das ein Wasservolumen von $1{,}4 \cdot 10^{18}$ m^3. Das ist auch der Wert, den man in der Literatur findet.

Weiterführende Hinweise. Die Homöopathie macht aber bei C12 nicht Halt! Die Verdünnungen reichen oft bis weit über C30 (siehe auch Frage 2.4). Bei C30 ist der Ausgangsstoff auf $1 : 10^{60}$ verdünnt. Würde man das ganze Sonnensystem (10^{57} Atome) auf C30 verdünnen, dann wäre statistisch gesehen nur mehr $1/1000$ Teilchen da. Und ab C40 könnte man die gesamte Materie im sichtbaren Universum (siehe Aufgabe 4.1) praktisch in Nichts auflösen.

5.4. **Wie viele Atome von Einstein befinden sich in jedem Menschen? Welcher homöopathischen Verdünnung entspricht das?** Unser Körper befindet sich in einem ständigen Umbau. Größenordnungsmäßig werden jede Sekunde 10^{19} bis 10^{20} Atome durch absterbende Zellen umgruppiert (Aufgabe 2.6). Das ist sehr beeindruckend. Noch beeindruckender ist aber, dass viele Atome, die jetzt gerade in Ihrem Körper sind, früher einmal in den Körpern von Newton, Buddha, Shakespeare, Mozart oder Einstein waren.

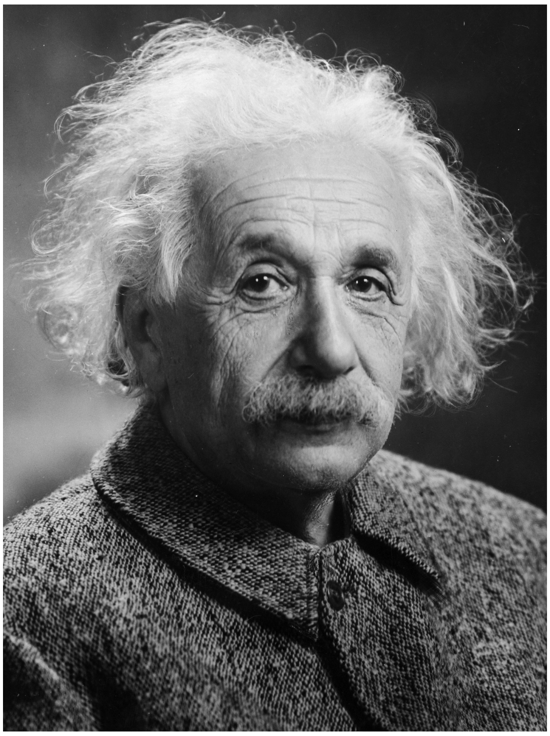

Abbildung 20. Albert Einstein (1879 – 1955)

Warum kann man das behaupten? Ein Mensch tauscht ja bereits während seines Lebens ständig Atome mit der Umgebung aus. Und wenn er stirbt, dann zerfällt er irgendwann zu Staub. All diese Atome verteilen sich nach und nach gleichmäßig über die Erde und werden Teil des irdischen Atomcocktails. Die Atome werden aber perfekt recycelt und von neu heranwachsenden Lebewesen wiederverwendet. Es ist im Prinzip ähnlich wie beim kosmischen Recycle-Kreislauf, aber in viel kleinerem Maßstab und wesentlich höherem Tempo. Schätzen Sie ab, wie viele Atome von Einstein oder einer anderen Person ihrer Wahl sich in Ihrem Körper befinden.

Hilfestellungen.

- Je nach Alter, Geschlecht und Körperzusammensetzung besteht der Mensch aus 50 bis 75 % Wasser. Man kann die Schätzung daher vereinfachen und annehmen, dass der Mensch zu 100 % aus Wasser besteht (siehe auch Aufgabe 1.2).
- Ein Mensch hat etwa 10^{28} Atome (Aufgabe 1.2).
- Der Großteil des Wassers der Erde befindet sich in den Meeren. Diese bestehen aus etwa $8 \cdot 10^{22}$ Mol Wasser. Ein Mol hat immer $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen.

5.5. **Wie viele Atome von Einsteins letztem Atemzug befinden sich in diesem Augenblick in Ihrer Lunge? Welcher homöopathischen Verdünnung entspricht das?** Diese Aufgabe ist ähnlich wie Aufgabe 5.4, aber hier geht es um die Atmosphäre (Abbildung 21). Welche Verdünnung hat Einsteins letzter Atemzug in dieser?

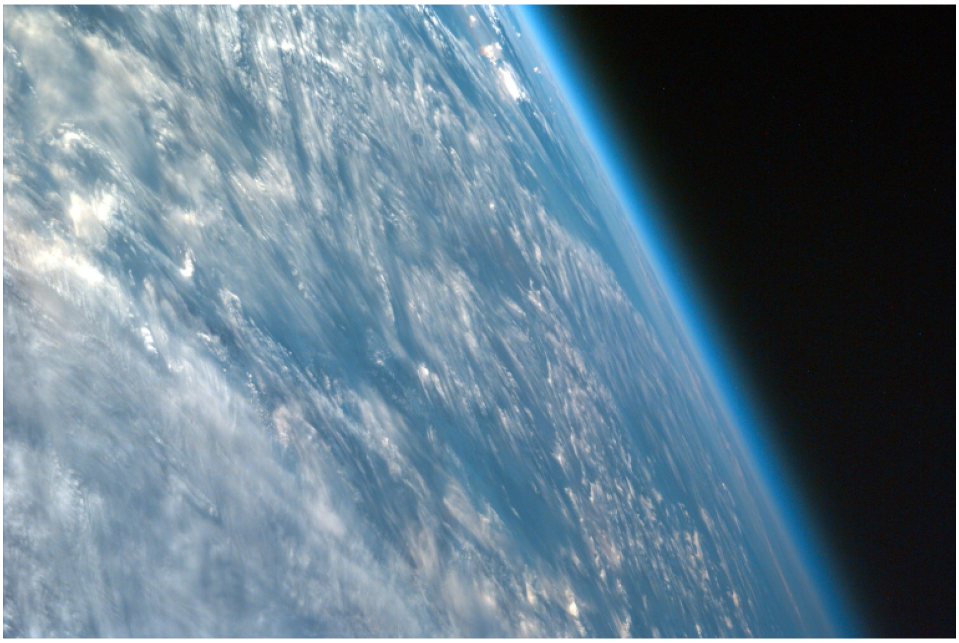

Abbildung 21. Die Atmosphäre der Erde dünnt sich immer mehr aus und reicht einige 100 km weit. Die Grenze zum Weltall wurde mehr oder weniger willkürlich bei 100 km gezogen.

Hilfestellungen.

- Die Masse der Atmosphäre beträgt $5{,}2 \cdot 10^{18}$ kg (Aufgabe 3.2).
- Die Atmosphäre besteht zum Großteil (rund 80 %) aus Stickstoff (N_2). Die Molmasse von Stickstoff kann aus Abbildung 2 abgelesen werden.
- Ein Mol ($N = 6 \cdot 10^{23}$) eines Gases hat bei Zimmertemperatur ein Volumen von etwa 24 l
- Bei normaler Atmung werden etwa 0,5 Liter Luft ein- und wieder ausgeatmet.

5.6. **Wie groß ist die Leistung, wenn man einen Marathon im Weltrekordtempo läuft?** Der Weltrekord im Marathonlauf (42,2 km) liegt bei den Frauen bei 2:14:04 (Brigid Kosgei, 50 kg) und bei Männern bei 2:01:09 (Eliud Kipchoge, 52 kg; bei Zeiten Stand Juni 2023). Schätzen Sie mit Hilfe dieser Daten ab, welche Leistung in Watt für die Weltrekorde nötig war.

Hilfestellungen.

- Eine sehr brauchbare Faustregel für den Energieumsatz beim Laufen lautet (siehe auch Aufgabe 2.2): Pro kg und pro km setzt man 1 kcal (= 4,2 kJ) um.
- 1 Watt entspricht dem Energieumsatz von 1 Joule in einer Sekunde: $1\,\mathrm{W} = \frac{1\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{s}}$.

Lösungsvorschläge

1.1 Ein Tag hat $60 \cdot 24 = 1440$ Minuten. 80 Jahre entsprechen $1440 \cdot 365 \cdot 80 \approx 4{,}2 \cdot 10^6$ Minuten. Nimmt man 70 Schläge pro Minute an, so kommt man auf $4{,}2 \cdot 10^6$ Minuten $\cdot$ 70 Schläge/Minute $\approx 3 \cdot 10^9$ Schläge.

Das Herz eines Menschen schlägt also 3 Milliarden Mal – oder, noch gröber gesagt, einige Milliarden Mal im Leben. Vergleichen Sie die Lösung mit ihrem Tipp!

1.2 1 Mol Wasser (H_2O) besteht aus zwei Atomen Wasserstoff (Molmasse rund 1 g) und einem Atom Sauerstoff (Molmasse rund 16 g) und hat daher 18 g oder 0,018 kg. 80 kg Wasser entsprechen daher 4444 Mol. 1 Mol hat $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen. 4444 Mol (Körpergewicht von 80 kg) entsprechen daher $4444 \cdot 6 \cdot 10^{23} \approx 2,7 \cdot 10^{27}$ Molekülen. Ein Molekül Wasser (H_2O) hat 3 Atome. Der Mensch besteht daher aus $2{,}7 \cdot 3 \cdot 10^{27} \approx 10^{28}$ Atomen.

1.3

$$\begin{aligned} 1\,\mathrm{cm/Monat} &= 10^{-2}\,\mathrm{m} \,/\, (60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 30)\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 10^{-2}\,\mathrm{m} \,/\, (2{,}6 \cdot 10^6)\,\mathrm{m/s} \\ &\approx 4 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m/s} \end{aligned}$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit beträgt also einige Nanometer pro Sekunde. Da der Atomdurchmesser in der Größenordnung 10^{-10} m liegt, entspricht das 40 Atomschichten, die pro Sekunde quasi unten an der Haarwurzel „angebaut“ werden müssen.

2.1 Die Lösung ist verblüffend einfach. Bei Nulldiät werden jeden Tag 10 000 kJ umgesetzt und verlassen als Wärme den Körper, aber nichts wird von außen zugeführt. Nach drei Tagen sind daher 30 000 kJ abgeflossen, die aus den Fettdepots genommen werden müssen. Diese Energiemenge entspricht wiederum dem Brennwert von 1 kg Fettgewebe. In drei Tagen kann man daher 1 kg Fett abnehmen, in der Woche also etwas über 2 kg. Mehr ist nicht einmal bei Nulldiät möglich.

2.2 Nehmen wir als Beispiel eine Person mit 70 kg. Ihr Energieumsatz pro Kilometer liegt dann also bei 294 kJ. Um 1 kg Körperfett abzunehmen, müssen in Summe 30 000 kJ umgesetzt werden. Die Person muss daher $\frac{30\,000\,\mathrm{kJ}}{294\,\mathrm{kJ/km}} \approx 100\,\mathrm{km}$ laufen, um 1 kg abzuspecken. Das ist verblüffend weit.

2.3 Wenn 4 Stockwerke 12 m hoch sind, beträgt die erstiegene Gesamthöhe in einem Jahr

$$12 \cdot 2 \cdot 365\,\mathrm{m} = 8760\,\mathrm{m} \approx 9 \cdot 10^3\,\mathrm{m}\,.$$

Man besteigt also quasi den Mount Everest!

Rechnen wir nun für eine Person mit 80 kg. Die Nettohebearbeit beträgt in diesem Fall $6{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{J} = 7{,}2 \cdot 10^3\,\mathrm{kJ}$. Weil der Wirkungsgrad 25 % beträgt, muss der Körper „innen drinnen“ die vierfache Energie umsetzen, also etwa 29 000 kJ. Das entspricht ziemlich genau dem Brennwert von 1 kg Körperfett.

2.4 Eigentlich muss man gar nicht rechnen. Bei einer Verdünnung von C12 ist vom Ausgangsstoff nur mehr $1/10^{24}$ da. Wenn man von 1 Mol (10^{24} Teilchen) ausgeht, ist also nur mehr ein einziges Teilchen da. Bei höheren Verdünnungen ab C12 ist also kein Teilchen der Wirksubstanz mehr vorhanden. Man verdünnt dann gewissermaßen das Nichts. In der Homöopathie sind Verdünnungen bis C200 ($1 : 10^{400}$) üblich!

2.5 In 20 Jahren muss die Zahl der Atome, aus denen dann letztlich ein Erwachsener besteht, auf 10^{28} anwachsen. Die „Startgröße“ von 10^{17} Atomen ist hierbei komplett zu vernachlässigen. 20 Jahre haben $60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 20 \approx 10^9$ Sekunden. Pro Sekunde müssen daher im Schnitt im Körper beachtliche $10^{28} : 10^9 = 10^{19}$ Atome eingelagert werden. Könnte man auf Atomgröße zusammenschrumpfen und sich diese Wachstumsprozesse vor Ort ansehen, müsste das ein furioses Tohuwabohu sein!

2.6 Der menschliche Körper besteht aus 10^{28} Atomen. Jede der 10^{14} Zellen im Körper hat also im Schnitt 10^{14} Atome. Nehmen wir an, jeden Tag sterben 70 Milliarden Zellen, die dementsprechend erneuert werden müssen. Dabei werden $7 \cdot 10^{10} \cdot 10^{14} = 7 \cdot 10^{24}$ Atome umgebaut. Ein Tag hat 86 400 Sekunden, also rund 105 Sekunden. Pro Sekunde werden also $7 \cdot 10^{19}$ Atome umgebaut.

3.1 Die Profiltiefe von Neureifen hängt vom jeweiligen Hersteller und dem entsprechenden Reifenmodell ab. In der Regel haben fabrikneue Autoreifen eine Profiltiefe von 8 bis 9 mm. Bei einem Sommerreifen darf die Profiltiefe nicht unter 1,6 mm absinken. Es dürfen also etwa 7 mm ($7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$) Profil abgefahren werden. Wenn Sie die Profiltiefe mit 1 cm abgeschätzt haben, sind Sie auf jeden Fall in der richtigen Größenordnung.

Der Reifen hat einen Durchmesser von etwa 50 cm und somit einen Umfang von rund 1,6 m. Er dreht sich daher pro Kilometer etwa 625 Mal. Ein neuer Satz Reifen hält – abhängig von seiner Härte – in der Regel etwa 30 000 km ($3 \cdot 10^4\,\mathrm{km}$). Ein Reifen ist daher nach $3 \cdot 10^4\,\mathrm{km} \cdot 625\,\mathrm{U/km} \approx 2 \cdot 10^7$ Umdrehungen abgefahren. Pro Umdrehung gehen daher $7 \cdot 10^{-3} : (2 \cdot 10^7) = 3{,}5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$ oder – in anderen Worten – 3 bis 4 Atomschichten verloren. Wenn man sehr stark bremst, dann wird der Abrieb so stark, dass er sogar sichtbar wird (siehe Abbildung 22).

Abbildung 22. Bei sehr starken Beschleunigungen ist der Abrieb sogar mit freiem Auge sichtbar.

3.2 Die Masse der Erdatmosphäre beträgt $5{,}2 \cdot 10^{18}$ kg (siehe Aufgabe 4.4). Luft hat eine mittlere Molmasse von 29 g. In der Atmosphäre befinden sich also $\frac{5{,}2 \cdot 10^{18}\,\text{kg}}{0{,}029\,\text{kg/Mol}} \approx 1{,}8 \cdot 10^{20}$ Mol Luft.

Ein Mol hat wiederum $6 \cdot 10^{23}$ Teilchen. Die Atmosphäre besteht daher aus $1{,}8 \cdot 10^{20} \cdot 6 \cdot 10^{23} = 1{,}08 \cdot 10^{44}$ Molekülen.

Die Bevölkerung auf der Erde macht 7,7 Mrd aus (Stand Juli 2019). Jede Person setzt pro Jahr 5 Tonnen oder $5 \cdot 10^3$ kg CO_2 frei. Das macht in Summe also $3{,}85 \cdot 10^{13}$ kg. CO_2 hat eine Molmasse von 44 g. Die zusätzliche freigesetzte Menge an CO_2 entspricht daher $8{,}75 \cdot 10^{14}$ Mol oder $5{,}25 \cdot 10^{38}$ CO_2-Molekülen.

Der momentane jährliche Zuwachs an CO_2 beträgt daher $5{,}25 \cdot 10^{38} / 1{,}08 \cdot 10^{44} = 4{,}86 \cdot 10^{-6}$. Das sind also 4,86 ppm. Wenn davon die Hälfte wieder gebunden wird, dann beträgt die jährliche Steigerung etwa 2,4 ppm, und das entspricht ziemlich genau dem tatsächlichen Wert.

3.3 Welchen Zeitgewinn kann man erwarten? Die Formel für Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Strecke und Zeit lautet $v = \frac{s}{t}$. Es gilt also $v \sim \frac{1}{t}$ oder umgekehrt $t \sim \frac{1}{v}$. Geschwindigkeit und Zeitdauer verhalten sich also indirekt proportional. Eine Erhöhung von 130 km/h auf 140 km/h entspricht einer Erhöhung um den Faktor 1,077, also einer Erhöhung um 7,7 %. Die benötigte Zeit, um mit der höheren Geschwindigkeit eine bestimmte Strecke zu durchfahren sinkt dadurch um den Faktor $t \sim \frac{1}{1{,}077} = 0{,}929$, also um 7,1 %.

Die Luftwiderstandskraft wird durch die Formel

$$F_L = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot c_w \cdot A \cdot v^2$$

beschrieben. Weil weder Luftdichte, Windschlüpfrigkeit noch Anströmfläche durch das Tempo verändert werden, hängt die zu überwindende Kraft nur von v^2 ab und es gilt daher $F_L \sim v^2$. Auch die Arbeit, die verrichtet werden muss, um eine bestimmte Strecke zurückzulegen, hängt daher vom Quadrat der Geschwindigkeit ab und wächst nicht linear. Diese zu verrichtende Arbeit entspricht aber wiederum dem Energieumsatz und somit dem Benzinverbrauch. Eine Erhöhung der Geschwindigkeit um 7,7 % bedeutet eine Erhöhung von F_L um den Faktor 1,16, also um 16 %. Mit anderen Worten: Während die Zeitdauer nur um 7,1 % absinkt, steigt der Benzinverbrauch um 16 % an. Die Maßnahme der Tempoerhöhung von 130 km/h auf 140 km/h ist daher ökologisch nicht zu rechtfertigen.

Umgekehrt würde eine Reduktion auf 120 km/h die Zeitdauer um 8,3 % erhöhen, aber den Benzinverbrauch um etwa 15 % reduzieren, was wiederum aus ökologischer Sicht großen Sinn machen würde.

Beim Bremsen wird die gesamte kinetische Energie in Wärme umgewandelt. Pro Bremsstrecke kann dabei nur eine ganz bestimmte Menge an Joule umgewandelt werden. Ein konkretes Beispiel: Angenommen, ein Auto mit 1000 kg samt Insassen kommt bei einer Vollbremsung mit 50 km/h (etwa 13,9 m/s) auf einer Strecke von 20 m zum Stillstand. Es hat vorher die kinetische Energie von rund $9,6 \cdot 10^4$ J, die beim Bremsen komplett in Wärme umgewandelt wurde. Dieses Auto ist daher generell in der Lage, bei einer Vollbremsung pro Meter 4800 J kinetische Energie in Wärme umzuwandeln. Weil die kinetische Energie aber proportional zu v^2 ist, wächst daher auch der Bremsweg mit v^2 an. Eine Geschwindigkeitserhöhung um 7,7 % bedeutet also ein Anwachsen des Bremsweges um 16 %. Eine solche Geschwindigkeitserhöhung ist also auch aus Sicherheitspolitischen Gründen nicht sinnvoll. Umgekehrt würde eine Geschwindigkeitsreduktion auf 120 km/h dem Bremsweg um 15 % reduzieren.

3.4 Um v_{max} zu berechnen, muss man nur die beiden Kräfte gleichsetzen und nach v auflösen: Aus $F_G = F_L$ folgt $\frac{1}{2}\,\varrho\, c_w\, A\, v^2 = m\, g$ und $v_{max} = \sqrt{\frac{2\, m\, g}{\varrho\, c_w\, A}}$. Je größer die Masse, desto größer die Endgeschwindigkeit. Das ist logisch, weil eine größere Masse nicht so leicht vom Luftwiderstand beeinflusst wird. Je größer Luftdichte, Luftwiderstandsbeiwert und Anströmfläche, desto kleiner die Endgeschwindigkeit. Auch das ist logisch, weil die Erhöhung dieser drei Werte den Luftwiderstand erhöht.

Um die absolute Endgeschwindigkeit zu berechnen, muss man die konkreten Werte kennen. Die Luftdichte auf Meeresniveau beträgt etwa 1,2 kg/m³. Das ist leicht zu recherchieren. Etwas schwieriger wird es bei c_w und A. In der typischen Position wie in Abb. 11 sind $c_w = 0{,}8$ und $A = 1\,\mathrm{m}^2$ vernünftige Werte. Bei einer Masse von 100 kg inklusive Ausrüstung erhält man dann eine v_{max} von 50 m/s (180 km/h).

3.5 Setzt man beide Formeln für die Kraft gleich ($F = F_R$), erhält man für die maximale Beschleunigung $a = \mu \cdot g$.

Die Beschleunigung ist also proportional zum Reibungskoeffizienten. Für Gummi und trockenen Asphalt beträgt der Reibungskoeffizient im Extremfall 1,1.

Man kann daher für die Beschleunigung 1,1 g oder $a = 10{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ berechnen, das bedeutet also, dass man von 0 auf 100 km/h (27,8 m/s) in 2,6 Sekunden beschleunigen kann.

Größere Beschleunigungen sind nur aus drei Gründen möglich:

1) Das Auto erzeugt aufgrund seiner Aerodynamik einen sehr starken Abtrieb. Durch den größeren Anpressdruck können größere Reibungskräfte erzielt werden. Das funktioniert aber nur bei größeren Geschwindigkeiten, also je näher man den 100 km/h kommt. Dann kann man noch das eine oder andere Zehntel einsparen und kommt eventuell auf 2,4 Sekunden.
2) Die Reibung zwischen Straße und Reifen wird größer, etwa durch Gummiabrieb oder spezielle Kleber, die auf den Asphalt aufgebracht werden.
3) Autos, bei denen die Krafterzeugung nicht über die Räder erfolgt, sondern zum Beispiel durch ein Düsentriebwerk, können im Prinzip beliebig große Beschleunigungen erreichen.

3.6 Wenn man die Formeln ineinander einsetzt, dann bekommt man

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot c_W \cdot A \cdot v^2 \cdot s}{t}.$$

Jetzt gilt aber auch $v = \frac{s}{t}$. Man kann daher schreiben

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot c_W \cdot A \cdot v^2 \cdot \frac{s}{t} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot c_W \cdot A \cdot v^2 \cdot v \\ &= \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot c_W \cdot A \cdot v^3 \end{aligned}$$

Wenn man nach v auflöst, dann bekommt man

$$v = \sqrt[3]{\frac{P}{\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot c_W \cdot A}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot P}{\varrho \cdot c_W \cdot A}}$$

Die Endgeschwindigkeit ist also proportional zur dritten Wurzel der Leistung. Wird die Motorleistung bei gleichen anderen Parametern verdoppelt, kann man also die Endgeschwindigkeit um etwa 26 % verbessern. Um die Endgeschwindigkeit zu verdoppeln, muss man die Leistung um den Faktor 8 vergrößern!

Wenn man die konkreten Werte für den Bugatti Chiron Super Sport aus Tabelle ?? einsetzt, dann erhält man eine theoretische Endgeschwindigkeit von

$$v = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot P}{\varrho \cdot c_W \cdot A}} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot 1\,177\,000}{1{,}2 \cdot 0{,}36 \cdot 2{,}1}} = 137{,}4\,\mathrm{m/s} = 494\,\mathrm{km/h}$$

Der Hersteller gibt eine Maximalgeschwindigkeit von 491 km/h an. Die Höchstgeschwindigkeit des Bugatti Chiron ist allerdings ab Werk elektronisch auf 420 km/h abgeregelt.

4.1 Wenn man annimmt, dass unsere Sonne ein durchschnittlicher Stern und die Milchstraße eine durchschnittliche Galaxie ist, dann kann man die Anzahl der Sterne im sichtbaren Universum mit

$$2 \cdot 10^{11} \cdot 10^{11} = 2 \cdot 10^{22}$$

abschätzen und ihre Gesamtmasse mit

$$2 \cdot 10^{22} \cdot 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} = 4 \cdot 10^{52}\,\mathrm{kg} = 4 \cdot 10^{55}\,\mathrm{g}\,.$$

1 Mol Wasserstoff hat 1 g (siehe Aufgabe **??**). Wenn man vereinfacht davon ausgeht, dass das Universum nur aus Wasserstoff besteht, dann entsprechen die $4 \cdot 10^{55}$ g also $4 \cdot 10^{55}$ Mol Wasserstoff, die eine Gesamtzahl von

$$4 \cdot 10^{55}\,\mathrm{Mol} \cdot 6 \cdot 10^{23}\,\mathrm{Atome/Mol} = 24 \cdot 10^{78}\,\mathrm{Atomen}$$

besitzen. Weil in dieser Schätzung sehr viele nicht genau bekannte Werte vorkommen, geben wir uns mit der Größenordnung von 10^{79} Atomen zufrieden.

4.2 Es gilt

$$\frac{G}{g} = \frac{B}{b}$$

und daher

$$G = \frac{B \cdot g}{b} = \frac{3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m} \cdot 3{,}8 \cdot 10^{8}\,\mathrm{m}}{2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} \approx 6 \cdot 10^{4}\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{km}\,.$$

Ein Gebäude mit kreisförmiger Grundfläche und einem Durchmesser von 60 km (!) würde also vom Mond aus gesehen trotzdem gerade mal eine Sehzelle ausfüllen. Die Chinesische Mauer ist aber bloß etwa 10 m breit, da liegt fast ein Faktor 10^4 dazwischen. Deshalb ist es unmöglich, mit freiem Auge die Mauer vom Mond aus zu sehen.

4.3 8,6 Lichtjahre entsprechen $8{,}1 \cdot 10^{16}$ m. Wenn Sie mithilfe der geometrischen Überlegungen in Abbildung 23 den Strahlensatz auf Frage **??** anwenden, bekommen Sie daher

$$B = \frac{G \cdot b}{g} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{9} \cdot 2 \cdot 10^{-2}}{8{,}1 \cdot 10^{16}} \approx 6 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\,.$$

So klein ist der Durchmesser des Bildes (Beugungseffekte nicht berücksichtigt).

4.4 Runden wir die 1013 hPa auf 1000 hPa ab. Pro Quadratmeter lastet also eine Luftsäule mit einem Gewicht von 100 000 N. Wenn man g vereinfacht mit $10\,\mathrm{m/s^2}$ annimmt, hat diese Luftsäule eine Masse von 10^4 kg.

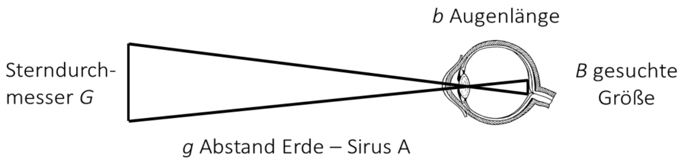

Abbildung 23. Geometrische Überlegungen zu optischen Abbildungen

Die Erde hat einen Radius von etwa $6{,}4 \cdot 10^6$ m. Deshalb hat ihre Oberfläche den Wert $5{,}14 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^2$. Auf jedem dieser Quadratmeter lastet eine Säule mit 10^4 kg. Für die Masse der Erdatmosphäre ergibt sich daher in Summe eine Masse von etwa $5{,}2 \cdot 10^{18}$ kg.

5.1 Im freien Fall ohne Luftwiderstand nimmt die Geschwindigkeit pro Sekunde um 10 m/s zu. Am Ende der ersten Sekunde hat man also 10 m/s, am Ende der zweiten Sekunde 20 m/s und so weiter. Eine Zunahme der Geschwindigkeit um 10 m/s pro Sekunde sind also (10 m/s)/s oder $10\,\mathrm{m/s}^2$. Wenn Lara Croft also 8 Sekunden im freien Fall unterwegs ist, hat sie dann eine Geschwindigkeit von 80 m/s oder 288 km/h. Es ist unmöglich, sich durch einen Griff an die Liane bei diesem Tempo abzubremsen. Außerdem müsste die Höhle 320 m tief sein.

5.2 Im Prinzip geht es hier vor allem um die Umrechnung zwischen $1\,\mathrm{m}^3$ und $1\,\mathrm{mm}^3$. Am einfachsten ist es sich zu überlegen, dass 1 m 1000 mm $= 10^3$ mm hat. Ein $1\,\mathrm{m}^3$ hat dann $(10^3\,\mathrm{mm})^3 = 10^9\,\mathrm{mm}^3$. Man benötigt also eine Milliarde Sekunden. Darunter kann man sich allerdings gar nichts vorstellen.

Ein Tag hat $60 \cdot 60 \cdot 24\,\mathrm{s} = 86\,400\,\mathrm{s}$, also aufgerundet 10^5 s. Die Einräumarbeit von 10^9 s entspricht also umgerechnet rund 10^4 Tagen. Darunter kann man sich allerdings ebenfalls nichts vorstellen.

Nachdem wir vorher die Sekunden pro Tag aufgerundet haben, ist der Wert 10^4 Tage etwas zu niedrig (exakt wären es 11 574). Deshalb runden wir jetzt ab und sagen, ein Jahr hat 1000/3 Tage. 10^4 Tage sind daher $10^4/(10^3/3) = 30$ Jahre. Wenn man es genau rechnet, erhält man 31,7 Jahre.

Sie müssten also ohne Pause fast die Hälfte ihre Lebens einschlichten, um $1\,\mathrm{m}^3$ mit den kleinen Würfelchen anzufüllen.

5.3 $1{,}4 \cdot 10^{18}\,\mathrm{m}^3$ entsprechen $1{,}4 \cdot 10^{21}$ kg. 1 Mol Wasser hat 18 g. 1 kg Wasser entspricht daher rund 56 Mol und in den Weltmeeren befinden sich in Summe daher etwa $7{,}7 \cdot 10^{22}$ Mol. Runden wir zur einfacheren Berechnung auf 10^{23} Mol auf. Wenn man 1 Mol in den Ozeanen verdünnt, erhält man daher eine Verdünnung von rund $1 : 10^{23}$. Weil $1 : 10^{2N}$ der Verdünnung CN entspricht, entsprechen $1 : 10^{23}$ gewissermaßen der Verdünnung C11,5 (die es natürlich in der Homöopathie nicht gibt) und das liegt ganz knapp an C12. Das Beispiel zeigt, wie absurd bereits solche Verdünnungen sind.

5.4 Ein Mensch hat 10^{28} Atome. In den Meeren befinden sich $8 \cdot 10^{22}$ Mol Wasser, somit $4{,}8 \cdot 10^{46}$ Wassermoleküle bzw. $1{,}44 \cdot 10^{47}$ Atome. Rechnen wir nur mit der Größenordnung. Wenn ein Mensch stirbt, dann verteilen sich seine Atome nach und nach gleichmäßig auf der Erde. Weil wir annehmen, dass er aus 100 % Wasser besteht, verteilen sich also sein 10^{28} Atome gleichmäßig in den 10^{47} Atomen des Wasserreservoirs der Erde. Das Verhältnis beträgt also $1 : 10^{19}$. Jedes 10^{19}te Atom, das man im Wasser findet, stammt also zum Beispiel von Einstein. Im Menschen herrscht daher dasselbe Ver-teilungsverhältnis. Jedes 10^{19}te Atom von 10^{28} Atomen macht 10^{9} Atome. Größenordnungsmäßig befinden sich also eine Milliarde Atome von Einstein in uns.

Vertiefung:
In der (nicht funktionierenden) Homöopathie gilt folgendes: Wenn man den Ausgangsstoff auf $1 : 100$ verdünnt, dann nennt man diese Verdünnung C1. Wenn man das noch einmal macht, dann ist vom Ausgangsstoff nur mehr $1 : 10^{4}$ da. Das nennt man C2. Bei einer Verdünnung von C10 ist vom Ausgangsstoff zum Beispiel nur mehr $1 : 10^{20}$ da. Etwas überspitzt kann man also behaupten, dass Einstein in unserem Körper in einer homöoptischen Verdünnung von etwa C10 vorhanden ist.

5.5 Wir gehen vereinfacht davon aus, dass die Luft nur aus Stickstoff besteht und rechnen zuerst sowohl die Atmosphäre als auch den Atemzug in Atome um. Ein Mol Stickstoff hat eine Masse von 14 g ($= 14 \cdot 10^{-3}$ kg). Die Atmosphäre enthält daher $5{,}2 \cdot 10^{18}\,\text{kg}/14 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} = 2{,}89 \cdot 10^{20}$ Mol N, also etwa $1{,}4 \cdot 10^{44}$ N-Atome. Der Atemzug hat 0,5 l, das ist $\frac{1}{48}$ Mol. Der Atemzug besteht daher aus $1{,}25 \cdot 10^{22}$ N-Atomen. Das Verhältnis der Atome im Atemzug zur gesamten Atmosphäre beträgt daher $1{,}25 \cdot 10^{22}/1{,}4 \cdot 10^{44} \approx 10^{22}$.

Wenn Einstein also seinen letzten Atemzug macht, dann stammt später jedes 10^{22}te Atom in der Atmosphäre aus diesem Atemzug. Wir atmen mit jedem Atemzug größenordnungsmäßig 10^{22} Atome ein. Statistisch gesehen, befindet sich also in jedem Atemzug, den wir machen, ein Atom aus Einsteins letztem Atemzug.

5.6 Die Weltrekordzeit bei den Frauen beträgt 2:14:04 oder umgerechnet 8044 s. Brigid Kosgei hat eine Masse von 50 kg und setzt daher beim Laufen pro Kilometer 50 kcal = 210 kJ um. Über die Marathonstrecke ergibt sicher daher ein Gesamtumsatz von 8862 kJ ($= 8862 \cdot 10^{3}$ J).

Die Leistung beträgt daher $P = 8862 \cdot 10^3\,\mathrm{J}/8044\,\mathrm{s} = 1102\,\mathrm{W}$.

Die Weltrekordzeit bei den Männer beträgt 2:01:09 oder umgerechnet 7269 s. Eliud Kipchoge hat eine Masse von 52 kg und setzt daher beim Laufen pro Kilometer 52 kcal = 218,4 kJ um. Über die Marathonstrecke ergibt sicher daher ein Gesamtumsatz von 9216 kJ ($= 9216 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$). Die Leistung beträgt daher $P = 9216 \cdot 10^3\,\mathrm{J}/7269\,\mathrm{s} = 1268\,\mathrm{W}$.