AUFGABENSAMMLUNG – FINANZMATHEMATIK

Inhaltsverzeichnis

1. Zinsrechnung 2
2. Kosten- und Preistheorie 8

Unterrichtsmaterialien – Finanzmathematik

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

✓ Arbeitsblatt – Zinsrechnung

✓ Arbeitsblatt – Kosten- und Preistheorie

Wie darf ich die Aufgaben verwenden?

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der AHS bzw. BHS.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 11. Juli 2024

1. Zinsrechnung

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Zinsrechnung

1.1

Du eröffnest ein Sparbuch mit 400 € Kapital, das effektiv mit 1,85 % p. a. verzinst wird.
Mit b_n wird das Kapital nach n Jahren (Verzinsungen) bezeichnet.

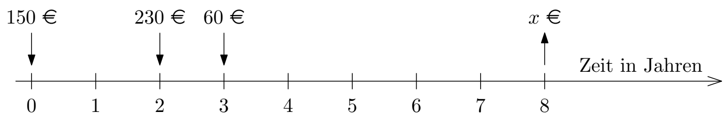
a) Gib ein rekursives und ein explizites Bildungsgesetz der Folge (b_n) an.

b) Berechne die Verdopplungszeit.

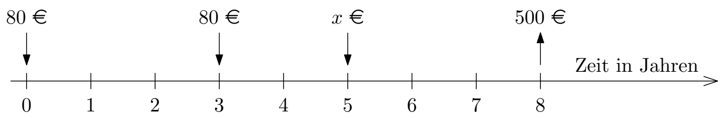
1.2

Die Ein- und Auszahlungen sind auf einer Zeitachse dargestellt. Der effektive jährliche Zinssatz ist $i = 1{,}2\,\%$.

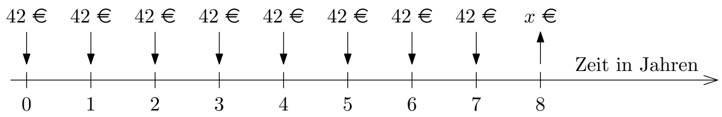
a) Nach 8 Jahren lässt du dir den vollständigen Betrag auszahlen. Wie groß ist dieser Betrag?



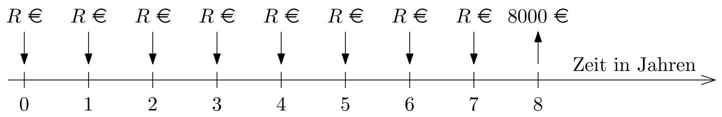
b) Nach 8 Jahren möchtest du 500 € angespart haben. Wie groß muss die Einzahlung x sein?



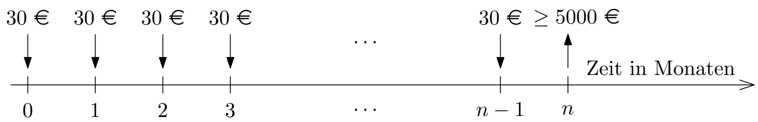
c) Du zahlst regelmäßig ein. Berechne den Endwert x. Hinweis: Verwende die Summenformel für geometrische Reihen.



d) Wie groß muss die jährliche Rate R sein, damit du nach 8 Jahren insgesamt 8000 € angespart hast?



e) Du zahlst zu Beginn jedes Monats 30 € ein. Am Ende welchen Monats hast du erstmals 5000 € angespart?



1.3

Ein Sparbuch mit 2000 € Kapital wird 5 Jahre lang mit fixem Zinssatz verzinst. Der Endwert beträgt 2138 €.
Berechne den effektiven jährlichen Zinssatz und den jährlichen Zinssatz vor Abzug der 25 % KESt.

1.4

Zu Jahresbeginn startest du eine private Pensionsvorsorge mit einer Laufzeit von 40 Jahren.
Jedes Monatsende zahlst du 50 € auf das Pensionskonto ein.

a) Berechne den Endwert, wenn das Pensionskonto nicht verzinst ist.

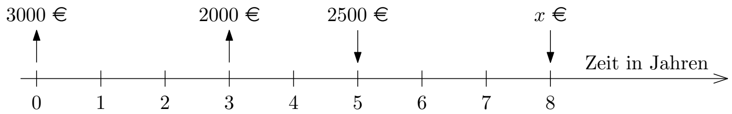
b) Berechne den Endwert E, wenn die jährliche Verzinsung effektiv 3,25 % beträgt.

c) Nach Ablauf der 40 Jahre wählst du statt einer einmaligen Auszahlung des Endwerts E eine „ewige monatliche Rente“. Das heißt: Jeden Monatsbeginn erhältst du vom Endwert einen fixen Betrag R ausgezahlt.
Der Betrag R ist so gewählt, dass du durch die Verzinsung am Monatsende wieder den Betrag E am Konto hast. Berechne die ewige Rente R, wenn die jährliche Verzinsung weiterhin effektiv 3,25 % beträgt.

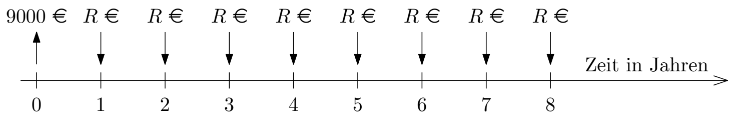
1.5

Die Ein- und Auszahlungen sind auf einer Zeitachse dargestellt. Der effektive jährliche Zinssatz ist $i = 3{,}5\,\%$.

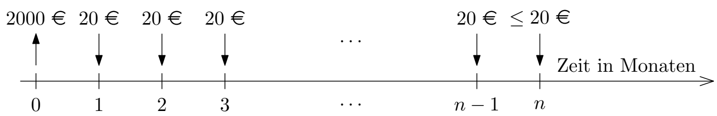
a) Nach 8 Jahren zahlst du die verbleibenden Schulden zurück. Wie groß ist dieser Betrag?



b) Wie groß muss die Rate R sein, damit der Kredit nach 8 Jahren abbezahlt ist?



c) Nach wie vielen Monaten ist der Kredit vollständig abbezahlt?



1.6

Annika und Michael nehmen zu Jahresbeginn jeweils einen Kredit in Höhe von $K = 12\,000$ € mit einem effektiven Zinssatz von $i = 2{,}25\,\%$ p. a. auf.

a) Berechne nach wie viel Jahren die Schulden von Annika erstmals mehr als 16 000 € betragen, wenn sie kein Geld zurückzahlt.

b) Michael möchte seine Schulden durch fixe monatliche Raten in Höhe von $R = 100$ € tilgen.
Stelle den Zahlungsverlauf auf einer Zeitachse dar. Wie lange dauert es, bis Michael den Kredit abbezahlt hat?

1.7

Frau Eberharter muss für die Renovierung ihrer Wohnung einen Kredit in Höhe von 30 000 € aufnehmen.
Eine Bekannte bietet Frau Eberharter privat einen Kredit in Höhe von 30 000 € zu einem Zinssatz von 2 % p. a. an. Frau Eberharter soll diesen Kredit folgendermaßen zurückzahlen:
8000 € nach einem Jahr und 2 gleich hohe Raten, eine davon nach 3 Jahren und die andere nach 4 Jahren.

1) Stellen Sie diese Zahlungen auf einer Zeitachse dar.

2) Berechnen Sie die Ratenhöhe.

1.8

Ein Kredit von 25 000 € wird jährlich mit einem effektiven Zinssatz von 4 % verzinst.
Du möchtest jedes Monatsende eine fixe Rate R bezahlen.

a) Wie groß muss die monatliche Rate R sein, damit der Kredit nach 20 Jahren abbezahlt ist?
Wie viel Geld zahlst du insgesamt an die Bank zurück?

b) Du zahlst monatlich $R = 250$ € zurück an die Bank. Nach wie vielen Monaten ist der Kredit abbezahlt?

1.9

a) Von einem Sparbuch soll über 10 Jahre hinweg jeweils am Monatsende ein Betrag von 200 € abgehoben werden. Unmittelbar nach der letzten Abhebung sollen noch 1500 € am Sparbuch verbleiben. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

1) Berechnen Sie die Höhe desjenigen Betrages, der zu Beginn auf das Sparbuch einbezahlt werden muss (ohne Berücksichtigung der KESt.).

b) Auf ein Sparbuch wird einmalig ein Betrag von 10 000 € und 5 Jahre später einmalig ein Betrag x einbezahlt. Nach insgesamt 8 Jahren soll ein Betrag von 20 000 € zur Verfügung stehen. Der Zinssatz beträgt 1,5 % p. a.

1) Erstellen Sie eine Zeitlinie, die diesen Sachverhalt darstellt.

2) Berechnen Sie die Höhe des Betrages x ohne Berücksichtigung der KESt.

3) Begründen Sie, warum sich die Höhe des Betrages x verringert, wenn er bereits nach 2 Jahren einbezahlt wird.

1.10

Um ein zusätzliches Einkommen zu erwirtschaften, kauft ein Landwirt eine kleine Waldfläche. Er erwirbt eine Waldfläche mit einem Flächeninhalt von 18,6 Hektar (ha). Der Preis liegt bei 0,95 € pro Quadratmeter; der durchschnittliche Erlös pro Jahr soll 300 € pro Hektar betragen. Der Landwirt legt den Erlös an jedem Jahresende auf ein Sparbuch mit einem Jahreszinssatz i.

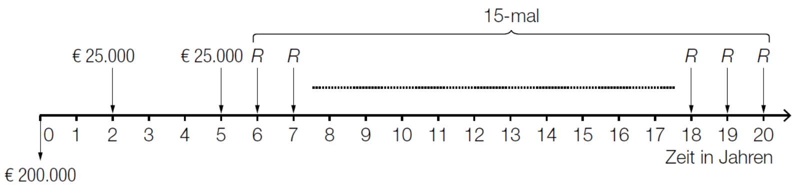
1) Berechnen Sie den Kaufpreis.

2) Erstellen Sie eine Gleichung, mit deren Hilfe man die Zeitdauer in Jahren, bis der Landwirt Gewinn erzielt, berechnen kann.

3) Berechnen Sie den Gewinn 40 Jahre nach dem Kauf des Waldes bei einem Zinssatz von 0,8 % p. a.

1.11

Ein Hersteller landwirtschaftlicher Geräte entwickelt innovative Produkte.
Für den Bau einer Produktionshalle muss das Unternehmen einen Kredit in Höhe von 200 000 € aufnehmen.
Die folgende Grafik stellt das Angebot einer Rückzahlungsvariante dar:



1) Berechnen Sie die Höhe der Rate R bei einem Zinssatz von 4 % p. a.

1.12

Für die Finanzierung größerer Anschaffungen ist es oft nötig, einen Geldbetrag anzusparen. Im Folgenden wird die Kapitalertragsteuer nicht berücksichtigt.

a) Andrea möchte einen Geldbetrag E ansparen.
Dazu legt sie einen Geldbetrag B, der mit dem jährlichen Zinssatz i verzinst wird, für n Jahre auf einem Sparkonto an.

1) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von E, wenn B, n und i bekannt sind.

2) Formen Sie diese Formel nach dem Zinssatz i um.

b) Bernhard möchte auf einem Konto in 4 Jahren 4000 € angespart haben. Dazu will er sofort 1000 € auf das Konto legen, nach 1 Jahr 1500 € und nach 3 Jahren den nötigen Restbetrag R. Der Zinssatz beträgt 3 % p. a.

1) Veranschaulichen Sie diesen Zahlungsstrom auf einer Zeitachse.

2) Erklären Sie in Worten (ohne Rechnung), warum der Restbetrag R kleiner als 1500 € sein muss.

3) Berechnen Sie den Restbetrag R.

c) Cornelia führt für ihren Ansparplan folgende Rechnung durch:

$$5000 \cdot 1{,}035^5 + 1000 \cdot 1{,}035^2 \approx 7009{,}66$$

1) Beschreiben Sie diesen Ansparplan hinsichtlich der Zahlungen, des Zinssatzes, der Verzinsungsdauer und des angesparten Geldbetrags in Worten.

d) Daniel möchte in 2 Jahren insgesamt 10 000 € angespart haben. Seine Ersparnisse betragen derzeit 4000 €. Den Restbetrag will er ansparen, indem er jeweils am Ende jedes Monats einen gleichbleibenden Betrag anspart.

1) Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn die Beträge nicht verzinst werden.

2) Ermitteln Sie die Höhe dieses gleichbleibenden Betrags, wenn alle Beträge zu einem Zinssatz von 0,25 % p. m. veranlagt werden.

1.13

Ein Unternehmen schafft für den Materialzuschnitt neue Maschinen an.
Durch den Kauf einer neuen Zuschnittmaschine erwartet man in den ersten 2 Jahren jeweils einen Gewinn von 60 000 €, in den weiteren 3 Jahren einen Gewinn von je 50 000 € und im 6. Jahr einen Gewinn von 35 000 €. Darüber hinaus erwartet man, dass am Ende des 6. Jahres die Maschine um 40 000 € verkauft werden kann.
Der Anschaffungspreis beträgt 284 000 €.
Die Gewinne werden vereinfachend als jährlich nachschüssig angenommen.

1) Erstellen Sie eine Zeitlinie für diesen Sachverhalt.

2) Berechnen Sie die Differenz zwischen dem Wert des Anschaffungspreises und dem insgesamt erwirtschafteten Gewinn am Ende des 6. Jahres bei einem Zinssatz von 3 % p. a.

1.14

Der Außenbereich eines Kindergartens wird vergrößert und zu einem Erlebnisgarten umgestaltet.
Für die Gartengestaltung muss ein Kredit aufgenommen werden.
Die Rückzahlungsraten werden wie folgt jeweils am Ende des Jahres bei einem Jahreszinssatz von 4,5 % p. a. vereinbart:

	1. Jahr	2. Jahr	3. Jahr	4. Jahr	5. Jahr
Rate	€ 4.000	€ 5.000	€ 3.000	€ 0	€ 4.500

1) Berechnen Sie den Barwert dieser Ratenzahlung.

2) Dokumentieren Sie, wie man die Höhe einer gleichwertigen monatlichen nachschüssigen Rückzahlungsrate berechnen kann, wenn eine konstante Ratenhöhe und eine gleichbleibende Laufzeit angenommen werden.

1.15

Ein Landwirt möchte einen größeren Stall bauen. Der Kostenvoranschlag beläuft sich auf 375 000 €.

a) Er spart seit 14 Jahren jährlich vorschüssig 2800 €, die zu 2,3 % p. a. verzinst werden. Zusätzlich hat er vor 22 Jahren 65 000 € auf ein Sparbuch gelegt, das jährlich mit 1,8 % verzinst wird.

1) Berechnen Sie, wie viel Geld er für den Stallbau zusätzlich zu seinem vorhandenen Kapital aufbringen muss.

b) Der Landwirt nimmt einen Kredit zur Begleichung der Gesamtkosten von 375 000 € auf. Es werden nachschüssige Jahresraten R gleicher Höhe bei konstantem Zinssatz über einen Zeitraum von 30 Jahren vereinbart.
Er kann die 6., die 7. und die 8. Rate nicht bezahlen. Der Zahlungsausfall wird gleichmäßig auf die Raten der restlichen Laufzeit aufgeteilt.

1) Erstellen Sie eine exakte Zeitlinie zur Beschreibung des Zahlungsverlaufs.

Die ursprüngliche Rate beträgt gerundet $R = 23\,841$ €. Der Zinssatz ist 4,8 % p. a.

2) Berechnen Sie die neue Ratenhöhe R_{neu}. (Runden Sie das Ergebnis auf ganze Euro.)

c) Die Bank bietet zur Rückzahlung des Kredits von 375 000 € folgende Möglichkeit an:
5 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags wird einmalig eine Zahlung in Höhe von x € entrichtet. Der Rest wird durch eine 10 Jahre nach Auszahlung des Kreditbetrags beginnende Rente mit vorschüssigen Jahresraten R über 20 Jahre abgedeckt.
Es ist bei allen Zahlungen von einem durchschnittlichen Jahreszinssatz i auszugehen.

1) Modellieren Sie eine Formel zur Berechnung des Einmalbetrags x.

1.16

Frau Simon möchte eine Wohnung kaufen. Sie benötigt dazu einen Kredit und holt deswegen bei Banken verschiedene Angebote ein.
Bank A bietet Frau Simon einen Kredit zu einem Zinssatz von 3 % p. a. an. Die monatlichen Raten sind nach Auszahlung der Kreditsumme von 120 000 € jeweils am Ende jedes Monats fällig. Die Kreditlaufzeit beträgt 20 Jahre. (Spesen und Gebühren werden nicht berücksichtigt.)

1) Ermitteln Sie den für die Berechnung notwendigen Monatszinssatz.

2) Berechnen Sie die Höhe der Monatsraten.

1.1 **a)** Rekursive Darstellung: $b_{n+1} = b_n \cdot 1{,}0185$, $b_1 = 407{,}4$ € (oder: $b_0 = 400$ €)
Explizite Darstellung: $b_n = 400 \cdot 1{,}0185^n$ $(oder: b_n = 407{,}4 \cdot 1{,}0185^{n-1})$

b) 37,81... Jahre

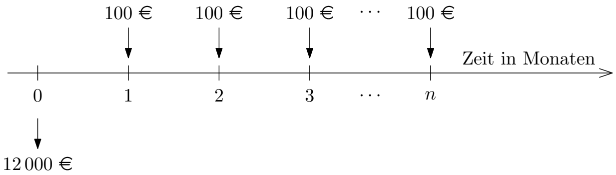
1.2 **a)** 475,77... € **b)** 315,57... € **c)** 354,66... € **d)** 947,38... € **e)** $n = 154{,}2\ldots \implies$ am Ende des 155. Monats

1.3 Effektiver jährlicher Zinssatz: 1,34... % Jährlicher Zinssatz vor Abzug der KESt: 1,79... %

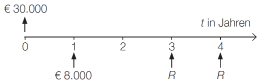
1.4 **a)** 24 000 € **b)** $E = 48\,602{,}23\ldots$ € **c)** 129,36... €

1.5 **a)** 3554,00... € **b)** 1309,28... € **c)** $n = 118{,}04\ldots \implies$ nach 119 Monaten

1.6 **a)** Nach 13 Jahren sind die Schulden erstmals über 16 000 €.

b) 

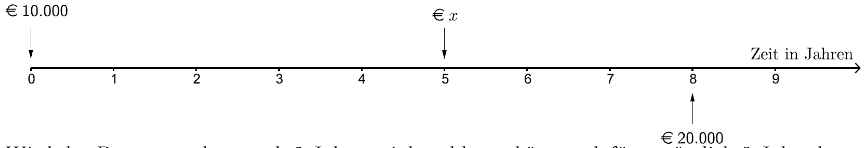
Der Kredit ist nach rund 136 Monaten abbezahlt.

1.7 **1)** 

2) $R = 11\,872{,}92\ldots$ €

1.8 **a)** $R = 150{,}55\ldots$ € Gesamtbetrag: 36 133,12... € **b)** Der Kredit ist nach 122 Monaten abbezahlt. (121,3... Monate)

1.9 **a)** 23 577,50... €

b) 

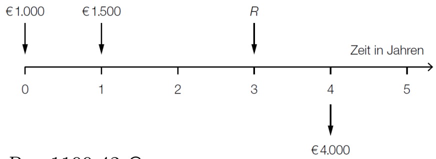
$x = 8353{,}49\ldots$ €

Wird der Betrag x schon nach 2 Jahren einbezahlt, so können dafür zusätzlich 3 Jahre lang Zinsen lukriert werden.

1.10 **1)** $K = 176\,700$ € **2)** $E \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = K \cdot q^n$ nach n auflösen **3)** 18 795,56... €

1.11 $R = 17\,107{,}60\ldots$ €

1.12 **a)** $E = B \cdot (1 + i)^n \iff i = \sqrt[n]{\frac{E}{B}} - 1$

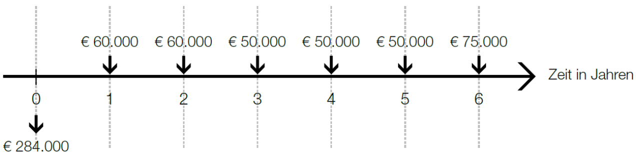
b) 

Der Restbetrag muss kleiner als 1500 € sein, da die Einzahlungen verzinst werden.

$R \approx 1199{,}42$ €

c) 5000 € werden 5 Perioden lang mit einem Zinssatz von 3,5 % pro Periode veranlagt. Nach 3 Perioden kommen noch 1000 € dazu. Nach 5 Perioden beträgt der angesparte Geldbetrag 7009,66 €.

d) Ohne Verzinsung: 250 € Mit Verzinsung: ≈ 232,89 €

1.13 

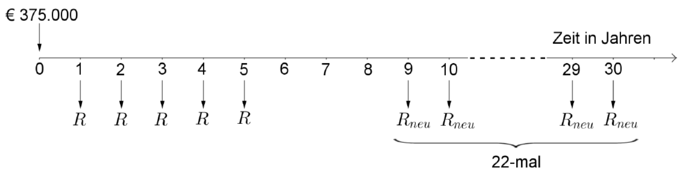
Gewinn: 32 157,47... €

1.14 $B \approx 14\,646{,}32$ €
Man berechnet den gleichwertigen monatlichen Aufzinsungsfaktor $r_{12} = \sqrt[12]{1{,}045}$.
Nach 60 Monaten muss der Wert der Einzahlungen gleich groß sein wie der Wert der Auszahlungen, also:

$$B \cdot r_{12}^{60} = R \cdot r_{12}^{59} + R \cdot r_{12}^{58} + \cdots + R \cdot r_{12} + R$$

Aus dieser Gleichung kann R berechnet werden. (R herausheben und geometrische Reihe. $R = 272{,}45\ldots$ €)

1.15 **a)** 232 073,15 €

b) 

$R_{\text{neu}} \approx 29\,436$ €

c) $q = 1 + i$ $x = 375\,000 \cdot q^5 - R \cdot q \cdot \dfrac{q^{20} - 1}{q - 1} \cdot \dfrac{1}{q^{25}}$

1.16 Monatlicher Zinsatz: 0,246... % Monatsrate: 663,08... €

2. Kosten- und Preistheorie

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Kosten- und Preistheorie

2.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Baseball-Verein überlegt, Fan-Shirts über eine Online-Plattform zu vertreiben. Die Kosten für die Herstellung eines T-Shirts belaufen sich auf € 6,40. Für Betreuung und Servermiete der Online-Plattform sind monatlich € 570 zu zahlen.

1) Stellen Sie die zugehörige lineare Kostenfunktion K auf.

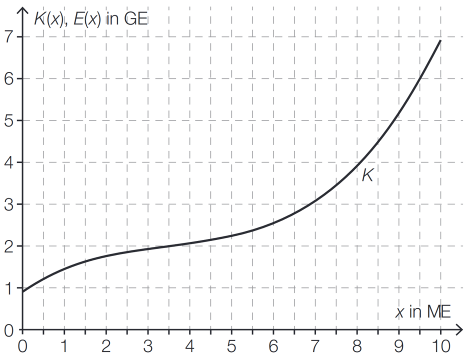
x ... Anzahl der T-Shirts
$K(x)$ ... monatliche Kosten bei x T-Shirts in Euro (€)

Man rechnet damit, dass 75 T-Shirts pro Monat produziert und auch verkauft werden.

2) Bestimmen Sie denjenigen Verkaufspreis pro Stück, ab dem die T-Shirts ohne Verlust verkauft werden können.

2.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung



In der nebenstehenden Abbildung ist der Funktionsgraph einer Kostenfunktion K dargestellt. Das Produkt wird zu einem fixen Preis pro Mengeneinheit (ME) verkauft.

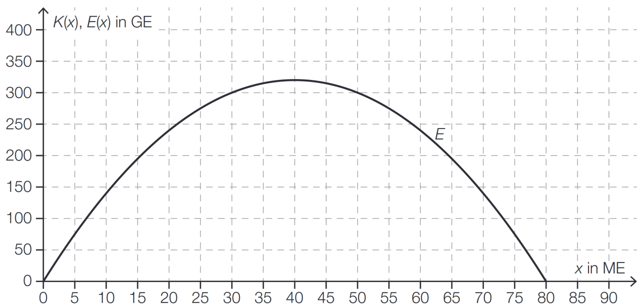
1) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung den Graphen derjenigen Erlösfunktion ein, für die die untere Grenze des Gewinnbereichs bei 3,5 ME liegt.

2) Geben Sie an, zu welchem Preis pro ME das Produkt in diesem Fall verkauft werden muss.

2.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Unternehmen verkauft Wagenheber eines bestimmten Modells. Der Erlös kann in Abhängigkeit von der verkauften Menge x näherungsweise durch die quadratische Erlösfunktion E beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Die Fixkosten dieser Produktion betragen 100 GE.
Die obere Gewinngrenze beträgt 50 ME.

1) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der linearen Kostenfunktion K ein.

2) Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung den maximalen Gewinn ab.

2.4

Der Kaffeevollautomat Divo kostet € 800. Die verwendeten Kaffeebohnen kosten 18 €/kg. Für eine Tasse Kaffee werden 10 g Kaffeebohnen benötigt. Die Kosten für x Tassen Kaffee setzen sich aus den Kosten für den Kaffeevollautomaten und den Kosten für die Kaffeebohnen zusammen und können durch die Funktion K_1 beschrieben werden.

x ... Anzahl der Tassen Kaffee
$K_1(x)$ ... Kosten für x Tassen Kaffee in Euro

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_1 auf.

In einem kleinen Büro wird die Kaffeemaschine Kapsello verwendet. Die Kosten für x Tassen Kaffee können durch die Funktion K_2 beschrieben werden.

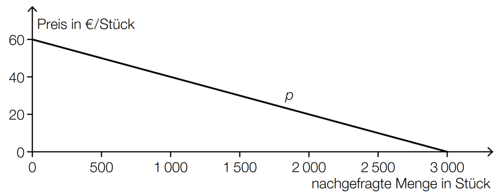
$$K_2(x) = 0{,}38 \cdot x + 160$$

x ... Anzahl der Tassen Kaffee
$K_2(x)$ ... Kosten für x Tassen Kaffee in Euro

2) Berechnen Sie diejenige Anzahl an Tassen Kaffee, ab der die Verwendung des Kaffeevollautomaten Divo günstiger als die Verwendung der Kaffeemaschine Kapsello wäre.

2.5

a) In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der Preisfunktion der Nachfrage p für Betonrohre des Modells A dargestellt.



1) Erstellen Sie mithilfe der obigen Abbildung eine Gleichung der Preisfunktion der Nachfrage p.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung von p im gegebenen Sachzusammenhang.

Die Betonrohre des Modells A werden um € 32 pro Stück verkauft.

3) Berechnen Sie die zugehörige Anzahl der nachgefragten Betonrohre des Modells A.

b) Für Betonrohre des Modells C geht man von einer kubischen Kostenfunktion K aus.

$$K(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

x ... Produktionsmenge in ME
$K(x)$ ... Kosten bei der Produktionsmenge x in GE

Die Fixkosten betragen 150 GE.
Bei einer Produktion von 20 ME ergeben sich Kosten von 530 GE.
Bei einer Produktion von 10 ME ergeben sich Grenzkosten von 17 GE/ME.
Bei einer Produktion von 30 ME ergeben sich Stückkosten von 22 GE/ME.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

2) Berechnen Sie diese Koeffizienten.

2.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Kosten bei der Produktion von Snowboards einer *limited edition* können durch die Funktion K, der Erlös beim Verkauf kann durch die Funktion E beschrieben werden:

$$K(x) = 0{,}27 \cdot x^3 - 15 \cdot x^2 + 591{,}67 \cdot x + 10\,000$$

$$E(x) = 1000 \cdot x$$

x ... Anzahl der Mengeneinheiten (ME)
$K(x)$ ... Gesamtkosten bei der Produktion von x ME in Geldeinheiten (GE)
$E(x)$ ... Erlös beim Verkauf von x ME in GE

Es wird angenommen, dass alle produzierten Snowboards auch verkauft werden.

1) Stellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion auf.

2) Berechnen Sie den maximalen Gewinn.

3) Ermitteln Sie den Gewinnbereich.

2.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Betrieb erhebt die Grenzkosten für unterschiedliche Produkte.

a) Für eine quadratische Grenzkostenfunktion K' mit $K'(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

Anzahl der produzierten Mengeneinheiten (ME)	20	50	60
Grenzkosten in Geldeinheiten/Mengeneinheit (GE/ME)	1 060	7 120	10 340

1) Interpretieren Sie den Grenzkostenwert 1060 im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Stellen Sie die Funktionsgleichung dieser Grenzkostenfunktion auf.

b) Für die Grenzkostenfunktion K' eines anderen Produkts gilt:

$$K'(x) = 0{,}3 \cdot x^2 - 4 \cdot x + 15$$

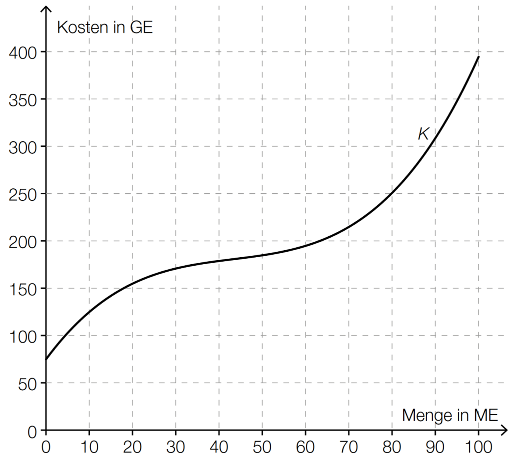
x ... Anzahl der produzierten ME
$K'(x)$ ... Grenzkosten bei x ME in GE/ME

1) Berechnen Sie die Kostenkehre.

Bei einer Produktionsmenge von 35 ME betragen die Gesamtkosten 2372,50 GE.

2) Berechnen Sie die zugehörige Kostenfunktion K.

2.8



Ein Unternehmen stellt Bügeleisen her. Die Produktionskosten lassen sich näherungsweise durch die folgende Funktion K beschreiben:

$$K(x) = 0{,}001 \cdot x^3 - 0{,}13 \cdot x^2 + 6{,}2 \cdot x + 75 \quad \text{mit } x \geq 0$$

$x \ldots$ Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x) \ldots$ Kosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

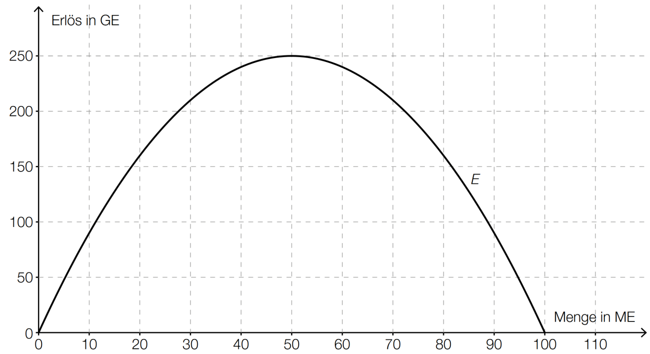
a) Im nebenstehenden Koordinatensystem ist der Graph der Kostenfunktion K dargestellt.
Ein Kostenverlauf heißt in einem Bereich degressiv, wenn der Graph der zugehörigen Kostenfunktion in diesem Bereich negativ gekrümmt (rechtsgekrümmt) ist.

1) Lesen Sie aus der nebenstehenden Grafik den gesamten Bereich ab, in dem der Kostenverlauf degressiv ist.

b) **1)** Ermitteln Sie diejenige Produktionsmenge, bei der die Stückkosten (Durchschnittskosten) minimal sind.

2) Zeigen Sie, dass bei dieser Produktionsmenge die Stückkosten (Durchschnittskosten) gleich den Grenzkosten sind.

c) Der Graph der Erlösfunktion E mit $E(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ für den Absatz von Bügeleisen ist in der nachstehenden Grafik dargestellt.



1) Argumentieren Sie mithilfe des Funktionsgraphen, dass der Koeffizient a negativ sein muss.

2) Stellen Sie mithilfe der nebenstehenden Grafik eine Gleichung dieser Erlösfunktion auf.

3) Berechnen Sie, für welche Produktionsmengen ein Gewinn in Höhe von 50 GE erzielt werden kann, wenn die oben definierte Kostenfunktion K zugrunde gelegt wird.

2.9

Ein Unternehmen produziert verschiedene Lampen. Die Kosten für die Produktion der Pendelleuchte *Ecos* lassen sich näherungsweise durch eine Kostenfunktion K beschreiben:

$$K(x) = 0{,}05 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 155$$

$x \ldots$ Anzahl der produzierten ME
$K(x) \ldots$ Kosten bei x produzierten ME in GE

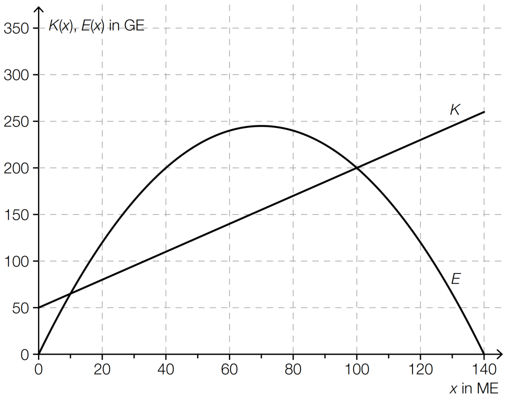
Die Pendelleuchte wird zu einem fixen Preis von 9 GE/ME verkauft.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der zugehörigen Gewinnfunktion.

2) Ermitteln Sie die Gewinngrenzen.

3) Ermitteln Sie den maximalen Gewinn.

2.10



In der nebenstehenden Abbildung sind die Funktionsgraphen der linearen Kostenfunktion K und der quadratischen Erlösfunktion E eines Produkts dargestellt.

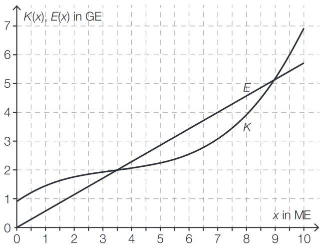
1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung dieser Kostenfunktion K auf.

2) Kennzeichnen Sie den Gewinnbereich in der nebenstehenden Abbildung.

3) Erklären Sie mathematisch, warum die zugehörige Gewinnfunktion eine quadratische Funktion sein muss.

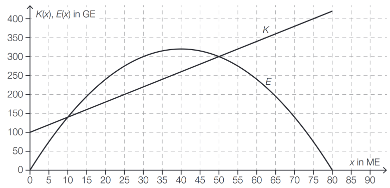
2.1 **1)** $K(x) = 6{,}4 \cdot x + 570$ **2)** 14 €/Stück

2.2 **1)**



2) 0,57 GE Toleranzbereich: [0,54; 0,60]

2.3 **1)**



2) 80 GE Toleranzbereich: [70; 90]

2.4 **1)** $K_1(x) = 0{,}18 \cdot x + 800$ **2)** 3201 Tassen

2.5 **a)** **1)** $p(x) = -\frac{1}{50} \cdot x + 60$ **2)** Die Steigung $-\frac{1}{50}$ gibt an, dass eine Preisreduktion um € 1 pro Stück zu einer Erhöhung der nachgefragten Menge um 50 Stück führt. **3)** 1400 Betonrohre

b) **1)** $K(0) = 150$, $K(20) = 530$, $K'(10) = 17$, $\frac{K(30)}{30} = 22$ **2)** $a = 0{,}02$, $b = -1{,}2$, $c = 35$, $d = 150$

2.6 **1)** $G(x) = -0{,}27 \cdot x^3 + 15 \cdot x^2 + 408{,}33 \cdot x - 10\,000$ **2)** 14 303,3... GE **3)** [17,07... GE; 69,63... GE]

2.7 **a)** **1)** Bei einer Produktionsmenge von 20 ME bedeutet eine Steigerung der Produktion um 1 ME zu einer Kostensteigerung von näherungsweise 1060 GE führen wird. **2)** $K'(x) = 3 \cdot x^2 - 8 \cdot x + 20$

b) **1)** 6,66... GE **2)** $K(x) = 0{,}1 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 + 15 \cdot x + 10$

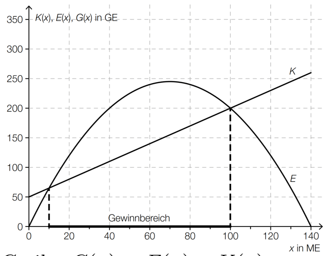
2.8 **a)** Im Intervall [0; 43] ist der Kostenverlauf degressiv. Toleranzbereich der oberen Grenze: [40; 50]

b) **1)** 72,19... ME **2)** $\bar{K}(72{,}19...) = K'(72{,}19...) = 3{,}06...$ GE/ME

c) **1)** Die Parabel ist negativ gekrümmt und $E''(x) = 2 \cdot a$. Also muss $a < 0$ gelten. **2)** $E(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 10 \cdot x$ **3)** $x_1 = 34{,}17...$ ME und $x_2 = 58{,}42...$ ME

2.9 **1)** $G(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 6 \cdot x - 155$ **2)** $x_1 = 37{,}63...$ ME, $x_2 = 82{,}36...$ ME **3)** 25 GE

2.10 **1)** $K(x) = 1{,}5 \cdot x + 50$ **2)**



3) Für die Gewinnfunktion G gilt: $G(x) = E(x) - K(x)$.
Wird von einem quadratischen Term ein linearer Term abgezogen, so ist das Ergebnis wieder ein quadratischer Term.