

AUFGABENSAMMLUNG – FOLGEN UND REIHEN

INHALTSVERZEICHNIS

1. Folgen	2
2. Arithmetische Folgen und Reihen	6
3. Geometrische Folgen und Reihen	12
4. Grenzwert von Folgen	16
5. Grenzwert von Funktionen	21



Unterrichtsmaterialien – Folgen und Reihen



Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ Arbeitsblatt – Folgen
- ✓ Arbeitsblatt – Arithmetische Folgen und Reihen
- ✓ Arbeitsblatt – Geometrische Folgen und Reihen
- ✓ Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen I
- ✓ Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen II
- ✓ Arbeitsblatt – Stetigkeit

Wie darf ich die Aufgaben verwenden?



Das **MmF-Team** entwickelt eigene Aufgabenstellungen. Sie sind mit dem Projektlogo **MmF** gekennzeichnet.

Diese Aufgaben werden unter einer Creative Commons BY-NC-ND 4.0 Lizenz bereitgestellt.

Das bedeutet:



- Die Aufgaben stehen *kostenfrei* zur Verfügung.
- Es dürfen auch nur einzelne Aufgaben aus der Aufgabensammlung für nicht-kommerzielle Zwecke (Lehre, Übungen, Prüfungen, etc.) kopiert werden. In diesem Fall *muss* der Ursprung der Aufgabe aber z.B. anhand des MmF-Logos erkennbar sein.

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der **AHS** bzw. **BHS**.

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo  mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

1. FOLGEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ [Arbeitsblatt – Folgen](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

1.1

MmF

Für die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gilt: $a_n = 4 \cdot n - 2$

a) Berechne die ersten 5 Folgenglieder:

$$a_1 = \boxed{} \quad a_2 = \boxed{} \quad a_3 = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{} \quad a_5 = \boxed{}$$

b) Berechne das 12. Folgenglied a_{12} .

c) Das wievielte Folgenglied ist gleich 90?

d) Begründe, warum *kein* Folgenglied gleich 48 ist.

1.2

MmF

Ein explizites Bildungsgesetz der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist gegeben.

Zeige, dass ab einem bestimmten Folgenglied alle weiteren Folgenglieder größer als 42 sind.

Welches ist das erste Folgenglied, das größer als 42 ist?

a) $a_n = 3 \cdot n$ b) $a_n = \frac{90 \cdot n - 23}{2 \cdot n}$ c) $a_n = 44 - \frac{18}{n}$ d) $a_n = n^2 - 7$

1.3

MmF

Ermittle die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge.

a) $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 3$

$$a_2 = \boxed{} \quad a_3 = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{} \quad a_5 = \boxed{} \quad a_6 = \boxed{}$$

b) $b_{n+1} = b_n + n$ mit $b_1 = 1$

$$b_2 = \boxed{} \quad b_3 = \boxed{} \quad b_4 = \boxed{} \quad b_5 = \boxed{} \quad b_6 = \boxed{}$$

c) $c_{n+1} = c_n \cdot 2$ mit $c_1 = 3$

$$c_2 = \boxed{} \quad c_3 = \boxed{} \quad c_4 = \boxed{} \quad c_5 = \boxed{} \quad c_6 = \boxed{}$$

d) $d_{n+1} = d_n \cdot n$ mit $d_1 = 1$

$$d_2 = \boxed{} \quad d_3 = \boxed{} \quad d_4 = \boxed{} \quad d_5 = \boxed{} \quad d_6 = \boxed{}$$

1.4

Ermittle die ersten 6 Folgenglieder der rekursiv gegebenen Folge.

- a) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ mit $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$

„Fibonacci-Folge“

$$a_3 = \boxed{} \quad a_4 = \boxed{} \quad a_5 = \boxed{} \quad a_6 = \boxed{}$$

- b) $b_{n+2} = b_{n+1} - b_n$ mit $b_1 = 1$ und $b_2 = 3$

$$b_3 = \boxed{} \quad b_4 = \boxed{} \quad b_5 = \boxed{} \quad b_6 = \boxed{}$$

- c) $c_{n+2} = -c_n + 1$ mit $c_1 = 4$ und $c_2 = 2$

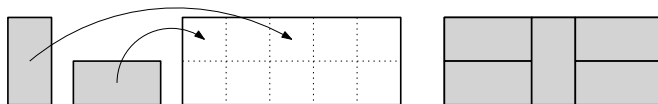
$$c_3 = \boxed{} \quad c_4 = \boxed{} \quad c_5 = \boxed{} \quad c_6 = \boxed{}$$

- d) $d_{n+2} = d_{n+1} \cdot d_n$ mit $d_1 = 1$ und $d_2 = 2$

$$d_3 = \boxed{} \quad d_4 = \boxed{} \quad d_5 = \boxed{} \quad d_6 = \boxed{}$$

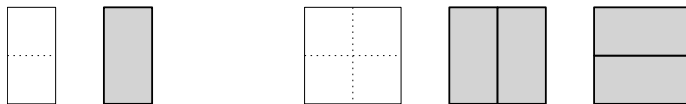
1.5

Es sollen n Dominosteine mit Höhe 2 und Breite 1 so angeordnet werden, dass ein Rechteck mit Höhe 2 und Breite n entsteht. Im folgenden Bild ist eine mögliche Anordnung mit $n = 5$ Dominosteinen dargestellt:



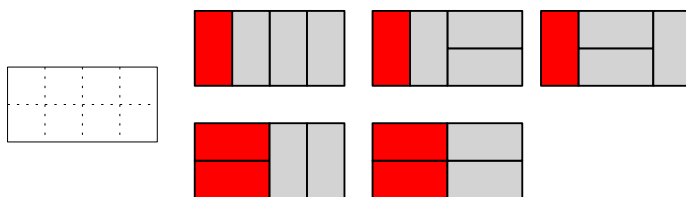
a_n ist die Anzahl verschiedener Anordnungen mit n Dominosteinen.

- a) Es gilt $a_1 = 1$ und $a_2 = 2$:



Ermittle a_3 . Zeichne dazu alle möglichen Anordnungen mit 3 Dominosteinen auf.

- b) Im folgenden Bild siehst du, warum $a_4 = a_3 + a_2 = 3 + 2 = 5$ gilt:



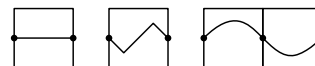
Für alle $n \geq 1$ gilt allgemein: $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Wie viele verschiedene Anordnungen gibt es also mit 5, 6, 7 bzw. 8 Dominosteinen?

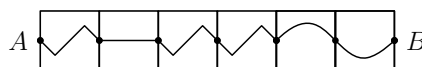
1.6



Du hast folgende 3 Arten von Puzzle-Steinen in beliebiger Anzahl zur Verfügung:



Mit diesen Puzzle-Steinen sollst du Muster vom unten dargestellten Punkt A zum Punkt B legen. Zum Beispiel:



Gesucht ist die Anzahl verschiedener Muster, die du mit diesen Puzzle-Steinen von A nach B legen kannst.

Mit a_n wird die Anzahl möglicher Muster abgekürzt, wenn zwischen A und B insgesamt n Quadrate liegen ($n \geq 1$).

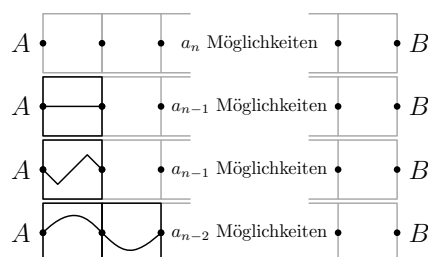
a) Ermittle a_1 . $A \cdot \square \cdot B$

b) Ermittle a_2 . $A \cdot \square \cdot \square \cdot B$

Es gilt die Rekursion $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}$ für alle $n \geq 3$.

In den Bildern rechts ist eine Begründung für die Rekursion skizziert.

c) Berechne mithilfe dieser Rekursion die gesuchte Anzahl a_6 .



1.7



Für die Folge (a_n) gilt: $a_n = \frac{1}{2} \cdot n + \frac{3}{2}$

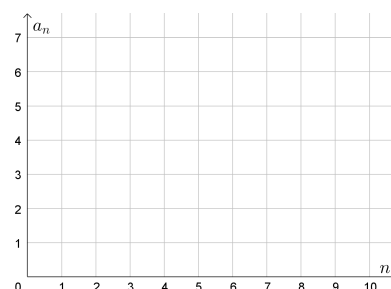
a) Berechne $a_1, a_2, \dots, a_{10}$.

b) Zeichne diese 10 Folgenglieder als Punkte rechts ein.

c) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz von (a_n) .

d) Welcher Funktionstyp steckt hinter (a_n) ?

Solche Folgen heißen **arithmetische Folgen**.



1.8



Für die Folge (b_n) gilt: $b_n = 32 \cdot 0,5^n$

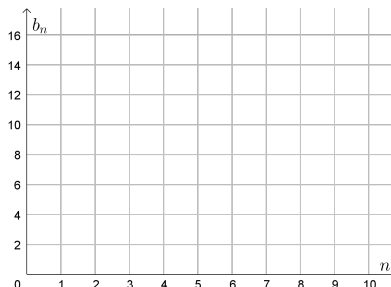
a) Berechne $b_1, b_2, \dots, b_{10}$.

b) Zeichne diese 10 Folgenglieder als Punkte rechts ein.

c) Ermittle ein rekursives Bildungsgesetz von (b_n) .

d) Welcher Funktionstyp steckt hinter (b_n) ?

Solche Folgen heißen **geometrische Folgen**.



1.9



Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ beginnt mit der Zahl $a_1 = 1$. Die nachfolgenden Zahlen erhält man, wenn man abwechselnd zur vorangehenden Zahl 5 dazuzählt bzw. 2 von dieser abzieht, also:

$$(a_n) = (1, 6, 4, 9, 7, 12, 10, 15, \dots)$$

a) Ermittle a_{2020}, a_{2021} und a_{2022} .

b) Das wievielte Folgenglied ist gleich 2022?



1.10

Der *Gauss-Legendre-Algorithmus* berechnet die Nachkommastellen von $\pi = 3,1415\dots$ rekursiv:

1) i) $a_1 = 1$ ii) $b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ iii) $t_1 = \frac{1}{4}$ iv) $p_1 = 1$ (Carl Friedrich Gauß, Adrien-Marie Legendre, 18./19. Jahrhundert)

2) i) $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ ii) $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$ iii) $t_{n+1} = t_n - p_n \cdot (a_n - a_{n+1})^2$ iv) $p_{n+1} = 2 \cdot p_n$

Die n -te Annäherung an π wird mit $\pi_n = \frac{(a_n + b_n)^2}{4 \cdot t_n}$ berechnet.

Berechne π_1, π_2, π_3 und π_4 mit einer Tabellenkalkulation auf 10 Nachkommastellen genau.

Es wurde [bewiesen](#), dass sich die Anzahl richtiger Nachkommastellen mit jedem Schritt in etwa verdoppelt.

- 1.1 a) $a_1 = 2$ $a_2 = 6$ $a_3 = 10$ $a_4 = 14$ $a_5 = 18$
 b) $a_{12} = 46$
 c) das 23. Folgenglied
 d) Die Gleichung $4 \cdot n - 2 = 48$ hat nur die Lösung $n = 12,5$, also keine Lösung in $\mathbb{N}^*$.

- 1.2 a) $3 \cdot n > 42 \iff n > 14$ 15. Folgenglied
 b) $\frac{90 \cdot n - 23}{2 \cdot n} > 42 \iff n > \frac{23}{6}$ 4. Folgenglied
 c) $44 - \frac{18}{n} > 42 \iff n > 9$ 10. Folgenglied
 d) $n^2 - 7 > 42 \iff n > 7$ 8. Folgenglied

- 1.3 a) $a_2 = 5$ $a_3 = 7$ $a_4 = 9$ $a_5 = 11$ $a_6 = 13$
 b) $b_2 = 2$ $b_3 = 4$ $b_4 = 7$ $b_5 = 11$ $b_6 = 16$
 c) $c_2 = 6$ $c_3 = 12$ $c_4 = 24$ $c_5 = 48$ $c_6 = 96$
 d) $d_2 = 1$ $d_3 = 2$ $d_4 = 6$ $d_5 = 24$ $d_6 = 120$

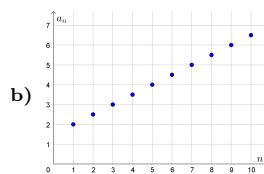
- 1.4 a) $a_3 = 2$ $a_4 = 3$ $a_5 = 5$ $a_6 = 8$
 b) $b_3 = 2$ $b_4 = -1$ $b_5 = -3$ $b_6 = -2$
 c) $c_3 = -3$ $c_4 = -1$ $c_5 = 4$ $c_6 = 2$
 d) $d_3 = 2$ $d_4 = 4$ $d_5 = 8$ $d_6 = 32$

- 1.5 a) $a_3 = 3$     b) $a_5 = 8, a_6 = 13, a_7 = 21, a_8 = 34$

- 1.6 a) $a_1 = 2$ b) $a_2 = 5$ c) $a_6 = 169$

1.7 a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5

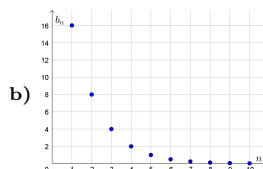


c) $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}$

- d) lineare Funktion mit Steigung $k = \frac{1}{2}$ und $d = \frac{3}{2}$

1.8 a)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
b_n	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125



c) $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{2}$

- d) Exponentialfunktion mit Änderungsfaktor $k = \frac{1}{2}$ und Startwert 32 ($n = 0$)

- 1.9 a) $a_{2020} = 3033, a_{2021} = 3031, a_{2022} = 3036$ b) $a_{1286} = 2022$

- 1.10 $\pi_1 = 2,914\,213\,562\,3\dots$ $\pi_2 = 3,140\,579\,250\,5\dots$ $\pi_3 = 3,141\,592\,646\,2\dots$ $\pi_4 = 3,141\,592\,653\,5\dots$

2. ARITHMETISCHE FOLGEN UND REIHEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ [Arbeitsblatt – Arithmetische Folgen und Reihen](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

MmF

Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass $(a_n)_{n \geq 1}$ eine arithmetische Folge ist.

Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

a) $(a_n) = (2; 5; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$ d) $(a_n) = (3; \boxed{}; \boxed{}; 9; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$

b) $(a_n) = (8; 4; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots)$ e) $(a_n) = (\boxed{}; 9; \boxed{}; \boxed{}; -12; \boxed{}; \dots)$

c) $(a_n) = (\boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; 15; 10; \boxed{}; \dots)$ f) $(a_n) = (1; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; 31; \dots)$

2.2

MmF

Für die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gilt: $a_7 = -5$, $a_{15} = 19$

Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

2.3

MmF

Für die arithmetische Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gilt: $a_3 = 23$, $a_8 = 2$

Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

2.4

MmF

Ermittle jeweils die fehlende Größe der arithmetischen Folge (a_n) mit $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$.

a) $a_1 = 6$ $d = -\frac{1}{2}$ $n = 42$ $a_{42} = ?$

c) $a_1 = -3$ $d = ?$ $n = 4$ $a_4 = 3$

b) $a_1 = 0,5$ $d = 2$ $n = ?$ $a_n = 12,5$

d) $a_1 = ?$ $d = 0,1$ $n = 51$ $a_{51} = 1$

2.5

MmF

Gegeben ist die arithmetische Folge $(a_n) = (1, 4, 7, 10, \dots)$.

a) Berechne die Summe der ersten 25 Folgenglieder von (a_n) .

b) Die Summe der ersten n Folgenglieder von (a_n) beträgt 2625. Berechne n .

c) Berechne $a_{14} + a_{15} + a_{16} + \dots + a_{42}$.

2.6

MmF

Berechne das Folgenglied a_{314} der arithmetischen Folge

$$a_1 = 1294, \quad a_{n+1} = a_n - 4, \quad n \geq 1.$$

2.7

MmF

Berechne die Summe der ersten 25 Folgenglieder der arithmetischen Folge $(1, 4, 7, 10, \dots)$.

2.8

MmF

Gesucht sind drei aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Folge.
Ihre Summe ist 18 und ihr Produkt ist 192. Bestimme die drei Folgenglieder.

2.9

MmF

Berechne die Summe.

a) $\sum_{i=1}^4 (3 \cdot i - 2)$ b) $\sum_{i=1}^{41} (3 \cdot i - 2)$ c) $\sum_{i=42}^{80} (3 \cdot i - 2)$

2.10

★ MmF

Von einer arithmetischen Folge habe ich die ersten n Folgenglieder addiert. Ich verrate nur so viel: Der größte Summand ist 194, die Summe ist 2786 und die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist immer 7. Wie groß ist n ? Was ist der kleinste Summand?

2.11

★ MmF

In einer arithmetischen Folge ist die Summe der ersten 4 Zahlen 26. Die Summe der Quadrate dieser Zahlen ist 214. Ermittle die ersten 4 Glieder dieser Folge.

2.12

★ MmF

Zwischen 2 Zahlen u und v sind m weitere Zahlen so einzufügen, dass diese mit den beiden gegebenen Zahlen eine arithmetische Folge bilden.

Erstelle mit Hilfe von u , v und m einen Ausdruck zur Berechnung der konstanten Differenz d zweier Glieder dieser Folge.

2.13

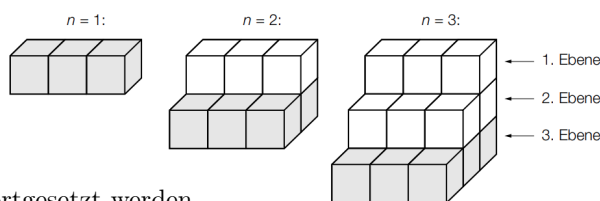
★ MmF

Berechne die Summe aller fünfstelligen Zahlen, die durch 4 teilbar sind.

2.14

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Mit Würfeln wird eine Treppe gebaut:

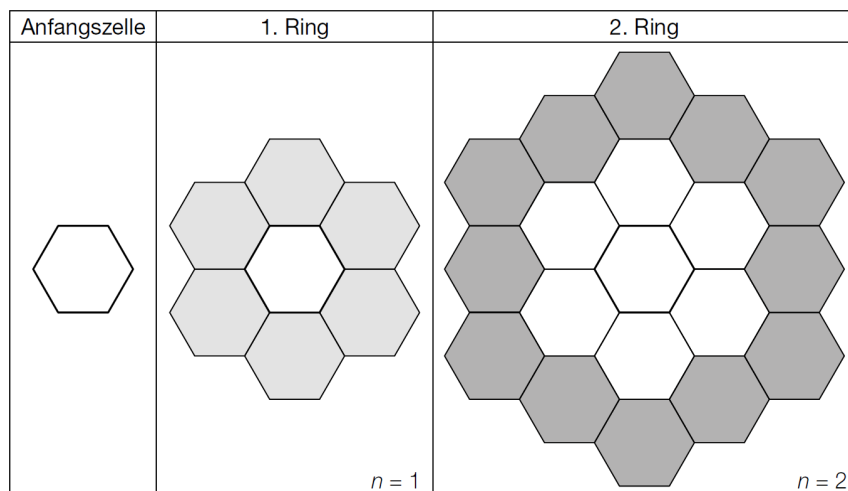


Das obige Bauschema soll auf diese Art fortgesetzt werden.

- 1) Erstellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz, mit dem man die Anzahl der Würfel in der n -ten Ebene berechnen kann.
- 2) Bestimmen Sie, wie viele Würfel in der 7. Ebene liegen.
- 3) Berechnen Sie, aus wie vielen Ebenen eine solche Treppe besteht, wenn man insgesamt 360 Würfel verbaut.

2.15

Bienen bauen ihre Waben, indem sie mit einer einzigen sechseckigen Zelle (Anfangszelle) starten und dann weitere sechseckige Zellen ringförmig um die erste Zelle bauen.



- a) Die Anzahlen der Zellen in den jeweiligen Ringen bilden eine arithmetische Folge. Die Anfangszelle wird dabei nicht als Ring gezählt.
- Geben Sie die ersten 4 Glieder dieser arithmetischen Folge an.
 - Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
 - Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese arithmetische Folge auf.
- b) Mit der Formel $s_n = 1 + 3 \cdot n + 3 \cdot n^2$ kann man berechnen, wie viele Zellen insgesamt bis zum n -ten Ring gebildet worden sind. Eine Wabe besteht aus insgesamt 271 Zellen.
- Ermitteln Sie, aus wie vielen Ringen diese Wabe besteht.
- c) Auf einer Fläche von 1 dm^2 befinden sich durchschnittlich 850 Zellen. Eine Zelle enthält im Mittel 0,3 Milliliter (ml) Honig mit einer Dichte von $1,4 \text{ g/ml}$. Die Masse ist das Produkt von Volumen und Dichte.
- Berechnen Sie die Masse des Honigs, die man auf einer Fläche von 3 dm^2 erwarten kann.

2.16

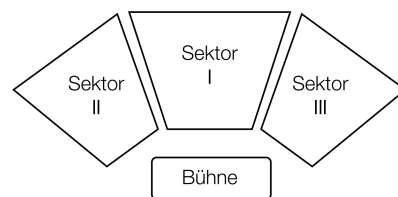
Palisaden sind Pfähle, meist aus Holz, die früher zur Befestigung verwendet wurden und heute auch als Designelement und Sichtschutz eingesetzt werden.

Ein Zaun wird aus zylinderförmigen Pfählen mit gleichem Durchmesser gebaut. Die Längen der Pfähle bilden eine arithmetische Folge. Der kürzeste Pfahl ist $0,40 \text{ m}$ lang, der Pfahl daneben ist $0,55 \text{ m}$ lang. Die Zaunpfähle kosten pro Meter 45 € .

- 1) Erstellen Sie das explizite Bildungsgesetz der arithmetischen Folge.
- 2) Ermitteln Sie, aus wie vielen Pfählen der Zaun besteht, wenn der letzte Pfahl $2,20 \text{ m}$ lang ist.
- 3) Berechnen Sie die Kosten für das Holz des gesamten Zaunes.

2.17

Eine Schule plant eine Theateraufführung im Turnsaal. Der Schulwart hat die Idee, die Zuschauerstühle wie folgt um die Bühne aufzubauen (siehe nachstehende Abbildung).

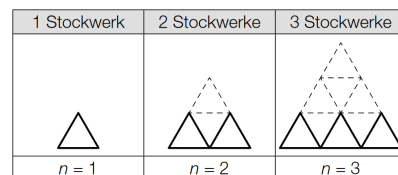


- a) Im Sektor I stehen in der ersten Sitzreihe 8 Stühle. In jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 3.
- 1) Begründen Sie mathematisch, warum die Anzahlen der Stühle in den jeweiligen Sitzreihen eine arithmetische Folge a_n bilden.
 - 2) Stellen Sie ein rekursives Bildungsgesetz für a_n auf.
- b) Im Sektor II stehen in der ersten Sitzreihe 5 Stühle, in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 1.
- 1) Stellen Sie ein explizites Bildungsgesetz auf, mit dem man die Anzahl der Stühle in der n -ten Sitzreihe berechnen kann.
- Die Gesamtanzahl der Stühle in den ersten n Sitzreihen des Sektors II ist $\frac{(9+n) \cdot n}{2}$.
- 2) Berechnen Sie, aus wie vielen Sitzreihen der Sektor II besteht, wenn 126 Stühle für diesen Sektor verwendet werden.
- c) Für den Sektor III ist eine Sitzordnung vorgesehen, bei der die Anzahl der Stühle in der n -ten Sitzreihe durch folgendes explizites Bildungsgesetz beschrieben wird: $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 4$
- 1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Zahlen 5 und 4 im gegebenen Sachzusammenhang.
 - 2) Berechnen Sie, wie viele Stühle in der 7. Sitzreihe stehen.

2.18

Im Rahmen einer Spielshow müssen die teilnehmenden Personen aus Spielkarten Kartenhäuser bauen. Dabei muss das jeweilige Kartenhaus in jeder Runde um ein Stockwerk höher gebaut werden.

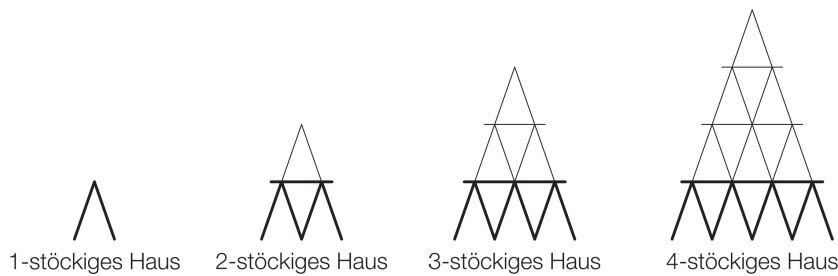
In der nebenstehenden Abbildung sind die Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk fett dargestellt. Die Anzahl der Spielkarten im jeweils untersten Stockwerk bildet die arithmetische Folge (a_n) mit $a_1 = 3$.



- 1) Geben Sie die Folgenglieder a_2 und a_3 an.
- 2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge.
- 3) Ermitteln Sie das Folgenglied a_{10} .

2.19

Aus Spielkarten kann man ein Kartenhaus bauen. In der nachstehenden Abbildung sind Kartenhäuser, die aus einer unterschiedlichen Anzahl von Stockwerken bestehen, in der Ansicht von vorne skizziert.



Die nachstehende Tabelle gibt an, wie viele Karten für ein n -stöckiges Kartenhaus insgesamt benötigt werden und wie viele davon für das unterste Stockwerk benötigt werden.

Anzahl der Stockwerke n	insgesamt benötigte Karten	Karten für das unterste Stockwerk
1	2	2
2	7	5
3	15	8
4	26	11
5		

1) Tragen Sie in der obigen Tabelle die beiden fehlenden Zahlen in die grau markierten Zellen ein.

Die Anzahl der Karten für das unterste Stockwerk kann durch die arithmetische Folge z_n beschrieben werden.

2) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die arithmetische Folge z_n .

Maria hat ein 24-stöckiges Kartenhaus errichtet und möchte es nun zu einem 25-stöckigen Kartenhaus erweitern.

3) Ermitteln Sie die Anzahl der zusätzlichen Karten, die Maria dafür benötigt.

Die Gesamtanzahl s_n der Karten für ein n -stöckiges Kartenhaus kann mit der nachstehenden Formel ermittelt werden.

$$s_n = 3 \cdot \frac{n \cdot (n + 1)}{2} - n$$

4) Berechnen Sie die Gesamtanzahl der Karten, die für ein 50-stöckiges Kartenhaus benötigt werden.

Alexander hat 3 vollständige Kartensets zu je 32 Karten zur Verfügung und möchte ein Kartenhaus mit möglichst vielen Stockwerken bauen.

5) Berechnen Sie die Anzahl der Stockwerke, die Alexanders Kartenhaus höchstens haben kann.

- 2.1** a) $(a_n) = (2; 5; 8; 11; 14; 17; \dots)$
 Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 3 \cdot n - 1$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 2$
- b) $(a_n) = (8; 4; 0; -4; -8; -12; \dots)$
 Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -4 \cdot n + 12$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n - 4$ mit $a_1 = 8$
- c) $(a_n) = (30; 25; 20; 15; 10; 5; \dots)$
 Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -5 \cdot n + 35$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n - 5$ mit $a_1 = 30$
- d) $(a_n) = (3; 5; 7; 9; 11; 13; \dots)$
 Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 2 \cdot n + 1$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 2$ mit $a_1 = 3$
- e) $(a_n) = (16; 9; 2; -5; -12; -19; \dots)$
 Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -7 \cdot n + 23$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n - 7$ mit $a_1 = 16$
- f) $(a_n) = (1; 7; 13; 19; 25; 31; \dots)$
 Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 6 \cdot n - 5$ Rekursives Bildungsgesetz: $a_{n+1} = a_n + 6$ mit $a_1 = 1$
- 2.2** Explizites Bildungsgesetz: $a_n = -26 + 3 \cdot n$, Rekursives Bildungsgesetz: $a_1 = -23$, $a_{n+1} = a_n + 3$, $n \geq 1$
- 2.3** Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 35,6 - 4,2 \cdot n$, Rekursives Bildungsgesetz: $a_1 = 31,4$, $a_{n+1} = a_n - 4,2$, $n \geq 1$
- 2.4** a) $a_{42} = -14,5$ b) $n = 7$ c) $d = 2$ d) $a_1 = -4$
- 2.5** a) 925 b) $n = 42$ c) 2378
- 2.6** $a_{314} = 42$
- 2.7** 925
- 2.8** $\{4, 6, 8\}$
- 2.9** a) 22 b) 2501 c) 7059
- 2.10** $n = 28$, Kleinster Summand: 5
- 2.11** $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$, $a_4 = 11$ oder $a_1 = 11$, $a_2 = 8$, $a_3 = 5$, $a_4 = 2$
- 2.12** $d = \frac{v-u}{m+1}$
- 2.13** 1 237 455 000
- 2.14** 1) $a_{n+1} = a_n + 3$ mit $a_1 = 3$ 2) $a_7 = 21$ 3) 15 Ebenen
- 2.15** a) $a_1 = 6$, $a_2 = 12$, $a_3 = 18$, $a_4 = 24$
 Rekursives Bildungsgesetz: $a_1 = 6$, $a_{n+1} = a_n + 6$, $n \geq 1$ Explizites Bildungsgesetz: $a_n = 6 + (n-1) \cdot 6 = 6 \cdot n$
 b) $n = 9$ Ringe c) 1071 g
- 2.16** $a_n = 0,15 \cdot n + 0,25$
 Der Zaun besteht aus 13 Pfählen.
 Das Holz für den Zaun kostet 760,50 €.
- 2.17** a) Die Differenz der Anzahlen der Stühle zweier aufeinanderfolgender Sitzreihen ist konstant.
 $a_1 = 8$ und $a_{n+1} = a_n + 3$
 b) $a_n = 4 + n$
 Der Sektor II besteht aus 12 Sitzreihen.
 c) 5 ... Anzahl der Stühle in der ersten Sitzreihe
 4 ... in jeder folgenden Sitzreihe erhöht sich die Anzahl der Stühle jeweils um 4
 Es stehen 29 Stühle in der 7. Sitzreihe.
- 2.18** 1) $a_2 = 6$, $a_3 = 9$ 2) $a_n = 3 + 3 \cdot (n-1)$ oder $a_n = 3 \cdot n$ 3) $a_{10} = 30$
- 2.19** 1) 40 Karten insgesamt benötigt, 14 Karten für das unterste Stockwerk
 2) $z_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 3 \cdot n - 1$
 3) 74 Karten
 4) 3775 Karten
 5) $s_n = 96 \iff (n_1 = -8, 16); n_2 = 7, 83 \dots$ Alexanders Kartenhaus kann höchstens 7 Stockwerke haben.

3. GEOMETRISCHE FOLGEN UND REIHEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Geometrische Folgen und Reihen](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

3.1

MmF

Trage jeweils Zahlen so in die Kästchen ein, dass (b_n) eine geometrische Folge ist.

Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } (b_n) = \left(1; 2; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots \right) & \text{c) } (b_n) = \left(\boxed{}; \boxed{}; -12; 36; \boxed{}; \boxed{}; \dots \right) \\ \text{b) } (b_n) = \left(16; 8; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots \right) & \text{d) } (b_n) = \left(\boxed{}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \boxed{}; \boxed{}; \boxed{}; \dots \right) \end{array}$$

3.2

MmF

Für die geometrische Folge $(b_n)_{n \geq 1}$ gilt: $b_3 = 1000$, $b_6 = 512$

Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.

3.3

MmF

Gegeben ist die geometrische Folge $(b_n) = (3, 6, 12, 24, \dots)$.

- Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.
- Berechne b_{10} .
- Das wievielte Folgenglied ist 1 572 864?
- Berechne die Summe der ersten 10 Folgenglieder.
- Berechne $b_5 + b_6 + b_7 + \dots + b_{20}$.
- Die Summe der ersten n Folgenglieder ist 25 165 821. Berechne n .

3.4

MmF

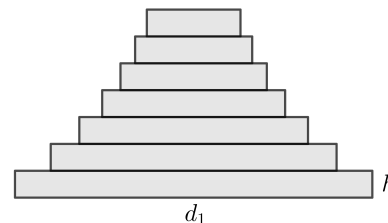
Eine geometrische Folge enthält die beiden Folgenglieder $b_3 = -40$ und $b_8 = 1280$.

- Ermittle ein explizites Bildungsgesetz und ein rekursives Bildungsgesetz der Folge.
- Berechne b_{12} .
- Das wievielte Folgenglied ist 327 680?
- Berechne die Summe der ersten 8 Folgenglieder.
- Berechne $b_6 + b_7 + b_8 + \dots + b_{15}$.

3.5



Beim dargestellten Spielzeug werden Drehzylinder gestapelt. Jeder Drehzylinder hat die Höhe $h = 3$ cm. Der größte Drehzylinder hat den Durchmesser $d_1 = 25$ cm. Jeder weitere Durchmesser ist um 20 % kleiner als der vorherige.



- $(d_1, d_2, \dots, d_7)$ ist die Folge der Durchmesser.
Gib ein rekursives Bildungsgesetz für (d_n) an.
- $(V_1, V_2, \dots, V_7)$ ist die Folge der Volumina.
Gib ein rekursives Bildungsgesetz für (V_n) an.
- Berechne das Gesamtvolumen des Stapels.

3.6



Ein Flummi wird aus 1,7 m Höhe fallen gelassen. Der Flummi springt vom Boden ab und erreicht dann nicht mehr die Ausgangshöhe von 1,7 m, sondern eine um 15 % geringere Höhe. Auch nach jeder weiteren Bodenberührung sinkt die maximale Höhe um 15 % im Vergleich zur vorherigen maximalen Höhe. Mit h_n wird die maximale Höhe bezeichnet, die der Flummi nach n Bodenberührungen noch erreicht.

- Gib ein rekursives und ein explizites Bildungsgesetz für (h_n) an.
- Berechne diejenige Höhe, die der Flummi nach 7 Bodenkontakten noch erreicht.
- Ermittle, wie viel Prozent der Ausgangshöhe der Flummi nach dem 4. Bodenkontakt erreicht.
- Welche Distanz hat der Flummi *insgesamt* bis zum 8. Bodenkontakt zurückgelegt? Eine Skizze kann helfen.

3.7



Der Legende nach wünschte sich der Erfinder des Schachspiels als Belohnung vom König Weizenkörner:

Auf das 1. Feld am Schachbrett wünschte er sich 1 Korn, auf das 2. Feld 2 Körner, auf das 3. Feld 4 Körner, auf das 4. Feld 8 Körner ...

Mit jedem Feld sollte sich die Anzahl der Körner verdoppeln, bis alle 64 Schachfelder belegt sind.

1000 Weizenkörner haben eine Masse von rund 50 g.



- Berechne die Gesamtmasse aller Weizenkörner am Schachbrett in g.
- Angenommen alle Weizenkörner am Schachbrett werden unter 8 Milliarden Menschen fair aufgeteilt.
Berechne, wie viele Tonnen Weizenkörner jeder Mensch erhalten würde.

3.8



In einem Labor wird die Lichtdurchlässigkeit von 5 mm dicken Glasscheiben geprüft. Man stellt fest, dass eine derartige Scheibe die Intensität des Lichts um 3,4 % reduziert. Es werden n aufeinander gelegte Glasscheiben mit Licht der Intensität I_0 bestrahlt.

- Erstelle ein rekursives Bildungsgesetz für die Intensität I_n , die das Licht nach der n -ten Scheibe noch aufweist.
- Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität ist nach 8 derartigen Scheiben noch vorhanden?
- Um wie viel Prozent wird die ursprüngliche Intensität durch 10 derartige Scheiben reduziert?

3.9



Die digitale Währung *Bitcoin* wurde zu Beginn des Jahres 2009 gegründet.

Bis Anfang 2013 wurden insgesamt 10,5 Mio. Bitcoins erzeugt.

Der zugrunde liegende Algorithmus legt fest, dass sich die Anzahl erzeugter Bitcoins alle 4 Jahre halbiert. Von Anfang 2013 bis Anfang 2017 wurden also 5,25 Mio. Bitcoins erzeugt.



- Berechne wie viele Bitcoins im Zeitraum von Anfang 2053 bis Anfang 2057 erzeugt werden.
- In welchem dieser 4-Jahres-Zeiträume werden erstmals weniger als 1000 Bitcoins erzeugt?
- Berechne, wie viele Bitcoins in den ersten 40 Jahren insgesamt erzeugt werden.

3.10

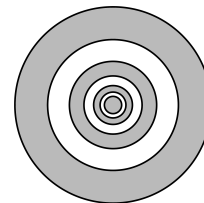


Die rechts dargestellte Figur besteht aus 7 konzentrischen Kreisen.

Der äußerste Kreis hat den Radius r_1 .

Jeder weitere Radius ist um ein Drittel kleiner als der vorherige Radius.

Wie viel Prozent der Gesamtfläche ist grau markiert?



3.11



Die Seitenlängen eines rechtwinkligen Dreiecks bilden eine geometrische Folge.

Erkläre, warum das Verhältnis der Hypotenuse c zur kürzeren Kathete a der goldene Schnitt ist:

$$\frac{c}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

3.12



Im Zeitraum von 1970 bis 2010 hat der jährliche globale Rohstoffverbrauch von 22 Milliarden Tonnen auf 70 Milliarden Tonnen zugenommen. Im selben Zeitraum hat sich die Weltbevölkerung auf 7 Milliarden verdoppelt.

- Berechnen Sie auf Basis dieser Angaben den durchschnittlichen jährlichen Rohstoffverbrauch pro Person im Jahr 1970.

Die zeitliche Entwicklung des globalen Rohstoffverbrauchs kann durch eine arithmetische Folge oder durch eine geometrische Folge modelliert werden. Im Modell *A* wird das jährliche prozentuelle Wachstum bezogen auf das jeweilige Vorjahr als konstant angenommen.

- Erstellen Sie für das Modell *A* ein explizites Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d.h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Im Modell *B* wird das jährliche absolute Wachstum als konstant angenommen.

- Erstellen Sie für das Modell *B* ein rekursives Bildungsgesetz für den globalen Rohstoffverbrauch. Wählen Sie $n = 1$ für das Jahr 1970, d.h., $n = 41$ entspricht dem Jahr 2010.

Für das Jahr 2050 wird ein jährlicher globaler Rohstoffbedarf von 180 Milliarden Tonnen angenommen.

- Tragen Sie die fehlende Zahl in das dafür vorgesehene Kästchen ein.

$$180 \text{ Milliarden Tonnen} = 1,8 \cdot 10^{\boxed{}} \text{ kg}$$

3.13

Im Zuge der Urlaubsplanung vergleicht Familie Hadek verschiedene Angebote für Ferienwohnungen. Die 1. Woche in der Ferienwohnung Rosenhof kostet € 1 200. Jede weitere Woche kostet um 10 % weniger als die vorangegangene Woche. Die Kosten der n -ten Woche können durch eine Folge beschrieben werden.

- 1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für diese Folge.
- 2) Berechnen Sie die Kosten für die 4. Woche in dieser Ferienwohnung.

3.14

Mäuse vermehren sich unter bestimmten Bedingungen sehr schnell. Die Anzahl der Jungtiere, die in einer Generation geboren werden, kann näherungsweise durch das nachstehende rekursive Bildungsgesetz beschrieben werden.

$$a_n = a_{n-1} \cdot 5 \quad \text{und} \quad a_1 = 20$$

$a_n \dots$ Anzahl der Jungtiere in der n -ten Generation

- 1) Erstellen Sie ein explizites Bildungsgesetz für die Folge (a_n) .
- 2) Berechnen Sie, in der wievielten Generation erstmals 500 Jungtiere geboren werden.

- 3.1** a) $(b_n) = (1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot 2$ mit $b_1 = 1$
 b) $(b_n) = (16; 8; 4; 2; 1; \frac{1}{2}; \dots)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 16 \cdot (\frac{1}{2})^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{2}$ mit $b_1 = 16$
 c) $(b_n) = (-\frac{4}{3}; 4; -12; 36; -108; 324; \dots)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = -\frac{4}{3} \cdot (-3)^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot (-3)$ mit $b_1 = -\frac{4}{3}$
 d) $(b_n) = (-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{8}; \frac{1}{16}; -\frac{1}{32}; \frac{1}{64}; \dots)$ Explizites Bildungsgesetz: $b_n = -\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2})^{n-1}$ Rekursives Bildungsgesetz: $b_{n+1} = b_n \cdot (-\frac{1}{2})$ mit $b_1 = -\frac{1}{2}$
- 3.2** Explizites Bildungsgesetz: $b_n = 1562,5 \cdot 0,8^{n-1}$, Rekursives Bildungsgesetz: $b_1 = 1562,5$, $b_{n+1} = b_n \cdot 0,8$, $n \geq 1$
- 3.3** a) Rekursiv: $b_{n+1} = b_n \cdot 2$, $b_1 = 3$ Explizit: $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ b) $b_{10} = 1536$ c) 20. Folgenglied d) $s_{10} = 3069$ e) 3 145 680 f) $n = 23$
- 3.4** a) Rekursiv: $b_{n+1} = b_n \cdot (-2)$, $b_1 = -10$ Explizit: $b_n = -10 \cdot (-2)^{n-1}$ b) $b_{12} = 20\,480$ c) 16. Folgenglied d) $s_8 = 850$ e) $-109\,120$
- 3.5** a) $d_{n+1} = d_n \cdot 0,8$ $d_1 = 25 \text{ cm}$ b) $V_{n+1} = V_n \cdot 0,64$ $V_1 = 1472,6 \dots \text{ cm}^3$ c) $3910,7 \dots \text{ cm}^3$
- 3.6** a) Rekursiv: $h_{n+1} = h_n \cdot 0,85$ mit $h_1 = 1,445 \text{ m}$ bzw. $h_0 = 1,7 \text{ m}$
 Explizit: $h_n = 1,445 \cdot 0,85^{n-1}$ bzw. $h_n = 1,7 \cdot 0,85^n$
 b) $h_7 = 0,544 \dots \text{ m}$
 c) Nach dem 4. Bodenkontakt erreicht der Ball 52,2... % seiner ursprünglichen Höhe.
 d) 14,79... m
- 3.7** a) $9,223 \dots \cdot 10^{17} \text{ g}$ b) Jeder Mensch würde 115,2... Tonnen Weizenkörner erhalten.
- 3.8** a) $I_{n+1} = I_n \cdot 0,966$ mit Anfangsbedingung I_0 oder $I_1 = I_0 \cdot 0,966$ b) auf 75,8... % c) um 29,2... %
- 3.9** a) 5126,95... BTC b) 2065 – 2069 c) 20,979... Mio. BTC
- 3.10** 69,46... %
- 3.11** $b = a \cdot q$, $c = a \cdot q^2$
 Pythagoras: $a^2 + a^2 \cdot q^2 = a^2 \cdot q^4 \rightsquigarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \rightsquigarrow q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
 $\frac{c}{a} = \frac{a \cdot q^2}{a} = q^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \checkmark$
- 3.12** 1) 6,28... Tonnen 2) $b_n = 22 \cdot 1,029\,35 \dots^{n-1}$ 3) $a_{n+1} = a_n + 1,2$ mit $a_1 = 22$
- 3.13** 1) $b_n = 1200 \cdot 0,9^{n-1}$ 2) $b_4 = 874,8$
- 3.14** 1) $a_n = 20 \cdot 5^{n-1}$ oder $a_n = 4 \cdot 5^n$ 2) In der 3. Generation werden erstmals 500 Jungtiere geboren.

4. GRENZWERT VON FOLGEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen I](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen II](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

4.1

MmF

Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \rightarrow \infty$.

a) $a_n = \frac{42}{n^2}$ b) $a_n = 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$ c) $a_n = \sqrt{4 - \frac{5}{n^3}}$ d) $a_n = \frac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{1}{n^2} - 6}$ e) $a_n = \frac{1}{6} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)$

4.2

MmF

Ermittle den Grenzwert der Folge (b_n) für $n \rightarrow \infty$.

a) $b_n = \frac{-4 \cdot n^3 + 5 \cdot n^2 - n}{2 \cdot n^3 - 1}$ b) $b_n = \frac{3 \cdot n^3 + n^2 - n}{2 \cdot n^4 - 3 \cdot n^2 + 1}$ c) $b_n = \frac{2 \cdot n^4 - n + 2}{-5 \cdot n^3 - 1}$
d) $b_n = \frac{4 + n + 3 \cdot n^2}{7 \cdot n - 2}$ e) $b_n = \sqrt{\frac{n^5 + 2}{4 \cdot n^5 - n^3 + 1}}$ f) $b_n = \frac{(3 - 2 \cdot n)^2}{(3 \cdot n - 2)^2}$

4.3

MmF

Ermittle den Grenzwert der Folge (c_n) für $n \rightarrow \infty$.

a) $c_n = 1 - 0,5^{n+1}$ b) $c_n = \frac{0,2^n - 1}{0,2 - 1}$ c) $c_n = \frac{(-0,6)^n - 1}{-0,6 - 1}$ d) $c_n = 18 \cdot 0,98^n + 5$
e) $c_n = 42 \cdot e^{-n}$ f) $c_n = \frac{0,3^n - 2}{1,1^n + n^2}$ g) $c_n = 6 + 15 \cdot (1 - e^{-0,018 \cdot n})$ h) $c_n = \frac{2300}{23 + 77 \cdot e^{-0,3 \cdot n}}$

4.4

MmF

a) Der Grenzwert der geometrischen Folge $(a_n) = (0,42 \cdot 1,01^n)$ ist .

Ab welchem Folgenglied sind alle Folgenglieder größer als 1 000 000?

b) Der Grenzwert der geometrischen Folge $(b_n) = (42 \cdot 0,99^n)$ ist .

Ab welchem Folgenglied sind alle Folgenglieder kleiner als 0,001?

4.5

MmF

Gegeben ist eine geometrische Folge (b_n) .

a) $(b_n) = (8, 4, 2, 1, \dots)$ b) $(b_n) = (42, 42, 42, \dots)$ c) $(b_n) = (\frac{27}{4}, -\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \dots)$

1) Ermittle den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

2) Stelle mithilfe von n eine Formel für $s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$ auf.

3) Berechne den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$

4.6

MmF

Ein Flummi wird aus 2 Meter Höhe fallen gelassen. Der Flummi springt vom Boden ab und erreicht dann nicht mehr die Ausgangshöhe von 2 m, sondern eine um 15 % geringere Höhe. Auch nach jeder weiteren Bodenberührung sinkt die maximale Höhe um 15 % im Vergleich zur vorherigen maximalen Höhe.

Mit h_n wird die maximale Höhe bezeichnet, die der Flummi nach n Bodenberührungen noch erreicht.

a) Berechne h_1 , h_2 und h_3 .

b) Berechne die gesamte Streckenlänge, die der Flummi zurücklegt, bis er still am Boden liegt.

4.7

MmF

Im Dezimalsystem (Basis 10) gibt es 10 Ziffern und jede Stelle entspricht einer Zehnerpotenz. Zum Beispiel:

10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
4	2	8	7	0	2	3

$$\underbrace{4287,023}_{\text{Basis 10}} = 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3}$$

Im Binärsystem (Basis 2) gibt es 2 Ziffern und jede Stelle entspricht einer Zweierpotenz. Zum Beispiel:

2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
1	0	0	1	0	1	0

$$\underbrace{1001,010}_{\text{Basis 2}} = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 0 \cdot 2^{-3} = \underbrace{9,25}_{\text{Basis 10}}$$

Die Dezimalzahl 9,25 entspricht also der Binärzahl 1001,010.

Tatsächlich gibt es auch nicht-periodische Dezimalzahlen, die aber periodischen Binärzahlen entsprechen.

Verwende die Summenformel $b_1 + b_2 + b_3 + \dots = \frac{b_1}{1-q}$, um die periodische Binärzahl

$$0,000|1100|1100|1100|1100|\dots$$

in eine Dezimalzahl umzuwandeln.

Computer verwenden bei Berechnungen das Binärsystem: 1 $\leftrightarrow$ Strom fließt bzw. 0 $\leftrightarrow$ Strom fließt nicht

$$>>> 0,1 + 0,0001$$

Bei Berechnungen mit der Dezimalzahl 0,1 als Binärzahl kann es deshalb zu Rundungsfehlern kommen.

$$0,100100000000000001$$

4.8

MmF

Die digitale Währung *Bitcoin* (BTC) wurde zu Beginn des Jahres 2009 gegründet.

Bis Anfang 2013 wurden insgesamt 10,5 Mio. BTC erzeugt.

Der zugrunde liegende Algorithmus legt fest, dass sich die Anzahl erzeugter Bitcoins alle 4 Jahre halbiert.

Von Anfang 2013 bis Anfang 2017 wurden also 5,25 Mio. BTC erzeugt.

Berechne, wie viele BTC über alle Jahre hinweg insgesamt erzeugt werden.



4.9

MmF

Für die periodische Dezimalzahl $0,\overline{42}$ gilt:

$$0,\overline{42} = 0,42424242\ldots = 0,42 + 0,0042 + 0,000042 + 0,00000042 + \ldots$$

Verwende die Summenformel $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots = \frac{b_1}{1-q}$, um $0,\overline{42}$ als Bruch zweier ganzer Zahlen darzustellen.

Hinweis: Erweitere Zähler und Nenner mit $10^2 = 100$.

4.10

MmF

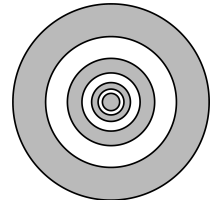
Die rechts dargestellte Figur besteht aus unendlich vielen konzentrischen Kreisen.

Der äußerste Kreis hat den Radius r_1 .

Jeder weitere Radius ist um ein Drittel kleiner als der vorherige Radius.

Wie viel Prozent der Gesamtfläche ist grau markiert?

Hinweis: Überlege dir den Quotienten q für $(r_1, r_2, r_3, \ldots)$, $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$ und $(A_1, -A_2, A_3, -A_4, \ldots)$.



4.11

MmF

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von ε -Umgebungen.

- Schreibe die Lösungsmenge der Betragsungleichung $|x - 3| < 2$ als Intervall an, und stelle sie grafisch auf der Zahlengerade dar.
- Alle Lösungen von $|x + 2| < 1,5$ bilden zusammen eine ε -Umgebung einer Zahl a . Wie groß ist ε , und welche Zahl ist a ?
- Alle Lösungen x der Ungleichung

$$-0,32 < x < 0,28$$

bilden zusammen eine ε -Umgebung einer Zahl a . Wie groß ist ε , und welche Zahl ist a ?

4.12

MmF

Für die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gilt: $a_n = 3 - \frac{100}{n}$

- Ermittle den Grenzwert der Folge.
- Ab welchem Index sind die Folgenglieder kleiner als
 - 1) $\varepsilon = 1$ 2) $\varepsilon = 0,1$ 3) $\varepsilon = 0,01$
 vom Grenzwert entfernt?

4.13

MmF

Für die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gilt: $a_n = \frac{42}{n^3} - 12$

- Ermittle den Grenzwert der Folge.
- Ab welchem Index ist der Abstand der Folgenglieder vom Grenzwert kleiner als $\varepsilon = 0,001$?

4.14



Für die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ gilt: $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2} + 5$

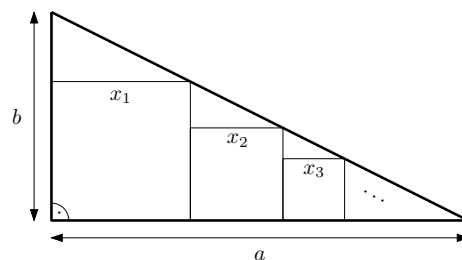
- Begründe, warum die Folge weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.
- Ab welchem Index sind die Folgenglieder innerhalb einer Toleranz von $\varepsilon = \frac{1}{100}$ vom Grenzwert 5?

4.15



Wir schreiben einem rechtwinkligen Dreieck – wie rechts unten dargestellt – Quadrate ein:

- Stelle mithilfe von a und b eine Formel für x_1 auf.
- Erkläre, warum (x_n) eine geometrische Folge mit $q = \frac{a}{a+b}$ ist.
- Welches Ergebnis erwartest du für $x_1 + x_2 + x_3 + \dots$?
Rechne nach, dass die geometrische Reihe tatsächlich diese Summe hat.
- Stelle mithilfe von a und b eine Formel für die Summe aller Quadratflächen auf.

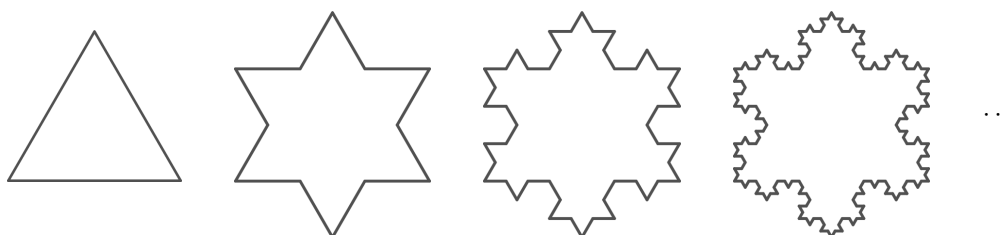


4.16



Es gibt geometrische Figuren mit endlichem Flächeninhalt, aber unendlichem Umfang. Für die *Kochsche Schneeflocke* starten wir mit einem gleichseitigen Dreieck und wiederholen immer wieder die folgenden drei Schritte:

- Teile jede Seite in drei gleich lange Teile.
- Ergänze jeweils den mittleren Teil nach außen zu einem gleichseitigen Dreieck.
- Entferne den mittleren Teil.



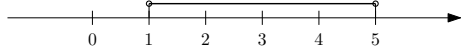
Der Umfang der ersten Figur beträgt $u_1 = 3 \cdot a$.

- Erkläre, warum die Umfänge $(u_1, u_2, u_3, \dots)$ eine geometrische Folge mit $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$ bilden.
- Erkläre, warum daraus $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$ folgt.
- Zu Beginn beträgt der Flächeninhalt $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$. Finde eine Formel für den Flächeninhalt A_n nach n Durchläufen der drei Schritte **i)**, **ii)**, **iii)**.
- Eine mögliche Formel für A_n ist

$$A_n = A_0 \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9} \right)^n \right).$$

Erkläre damit die folgende Formel für den Flächeninhalt der Kochschen Schneeflocke:

$$A = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot a^2.$$

- 4.1 a) 0 b) 3 c) 2 d) $-\frac{1}{2}$ e) $\frac{1}{3}$
- 4.2 a) -2 b) 0 c) $-\infty$ d) ∞ e) $\frac{1}{2}$ f) $\frac{4}{9}$
- 4.3 a) 1 b) 1,25 c) 0,625 d) 5 e) 0 f) 0 g) 21 h) 100
- 4.4 a) Grenzwert ∞ ab dem 1476. Folgenglied b) Grenzwert 0 ab dem 1060. Folgenglied
- 4.5 a) 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 2) $s_n = -16 \cdot (0,5^n - 1)$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 16$
- b) 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 42$ 2) $s_n = 42 \cdot n$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$
- c) 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ 2) $s_n = -\frac{81}{16} \cdot \left(\left(-\frac{1}{3} \right)^n - 1 \right)$ 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{81}{16} = 5,0625$
- 4.6 a) $h_1 = 1,7 \text{ m}$, $h_2 = 1,445 \text{ m}$, $h_3 = 1,228 \dots \text{ m}$ b) $24,66 \dots \text{ m}$
- 4.7 $0,1$ ($b_1 = 2^{-4} + 2^{-5}$, $q = 2^{-4}$)
- 4.8 21 Mio. BTC
- 4.9 $0,42 = \frac{42}{99}$ ($b_1 = 0,42$, $q = 10^{-2}$)
- 4.10 $\frac{9}{13} = 69,23 \dots \%$
- 4.11 a) $]1; 5[$ 
- b) $\varepsilon = 1,5$, $a = -2$
- c) $\varepsilon = 0,3$, $a = -0,02$
- 4.12 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$ b) 1) ab dem 101. Folgenglied 2) ab dem 1001. Folgenglied 3) ab dem 10001. Folgenglied
- 4.13 a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -12$ b) ab dem 35. Folgenglied
- 4.14 a) Wenn n gerade ist, dann ist $a_n > 5$. Wenn n ungerade ist, dann ist $a_n < 5$. Die Folgenglieder werden also immer abwechselnd größer und wieder kleiner.
- b) ab dem 11. Folgenglied
- 4.15 a) $x_1 = \frac{a \cdot b}{a+b}$
- b) $x_2 = \frac{(a-x_1) \cdot x_1}{a} = \frac{(a-x_1) \cdot a \cdot b}{a \cdot (a+b)} = \dots = x_1 \cdot \frac{a}{a+b}$
- c) $x_1 + x_2 + x_3 + \dots = \frac{x_1}{1 - \frac{a}{a+b}} = \dots = a$
- d) $A = \frac{a^2 \cdot b}{2 \cdot a+b}$
- 4.16 a) Die Seitenlängen werden mit jedem Schritt auf ein Drittel der vorherigen Seitenlänge gekürzt. Die Anzahl der Seiten vervierfacht sich (jede Seite wird in vier neue Seiten verwandelt).
Für den Umfang gilt also: $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$. (u_n) ist also eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$.
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \infty$, weil $q = \frac{4}{3} > 1$ ist.
- c) Wie viele Seiten gibt es nach n Durchläufen?
Wie viele neue Dreiecke entstehen beim n -ten Durchlauf?
Wie groß ist der Flächeninhalt der neuen Dreiecke beim n -ten Durchlauf?
Um wie viel wächst der Flächeninhalt also beim n -ten Durchlauf?
- d) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A_0 \cdot \frac{8}{5} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot a^2$.

5. GRENZWERT VON FUNKTIONEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ [Arbeitsblatt – Stetigkeit](#)

5.1

MmF

Die Funktion f ist stückweise für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert. Ist die Funktion f stetig an der Stelle $x_0 = 3$? Falls nein, hat f dort einen isolierten Punkt oder eine Sprungstelle? Begründe deine Antwort.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 14 \cdot x, & \text{falls } x < 3, \\ 42, & \text{falls } x = 3, \\ 5 \cdot x^2 - 3, & \text{falls } x > 3. \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 14 \cdot x, & \text{falls } x < 3, \\ 42, & \text{falls } x = 3, \\ x^4, & \text{falls } x > 3. \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} 10 \cdot x, & \text{falls } x < 3, \\ 42, & \text{falls } x = 3, \\ x^2 + 21, & \text{falls } x > 3. \end{cases}$$

5.2

MmF

Die stückweise definierte Funktion f ist auf einem Intervall eindeutig definiert. Berechne die Zahlen a , b und c so, dass die Funktion f stetig ist.

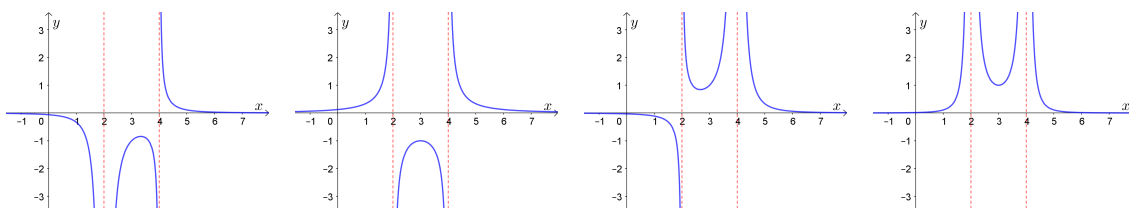
$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 4,2 \cdot e^{a \cdot x}, & \text{falls } x < -3. \\ b \cdot x^2 - 5, & \text{falls } -3 \leq x < 1. \\ -5 \cdot x + 3, & \text{falls } 1 \leq x \leq 4. \\ 5 \cdot \ln(c \cdot x) - 42, & \text{falls } x > 4. \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} a \cdot x + 7, & \text{falls } x < -2. \\ \frac{x^3}{2} + 1, & \text{falls } -2 \leq x \leq 0. \\ \sqrt[3]{x - b} - 1, & \text{falls } 0 < x \leq 19. \\ c^x, & \text{falls } x > 19. \end{cases}$$

5.3

MmF

Welche Funktionsgleichung passt zu welchem Graphen? Ordne zu.

$$f_1(x) = \frac{1}{(x-4) \cdot (x-2)} \quad f_2(x) = \frac{1}{(x-4)^2 \cdot (x-2)} \quad f_3(x) = \frac{1}{(x-4) \cdot (x-2)^2} \quad f_4(x) = \frac{1}{(x-4)^2 \cdot (x-2)^2}$$



5.4

MmF

Der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h}$ soll ermittelt werden.

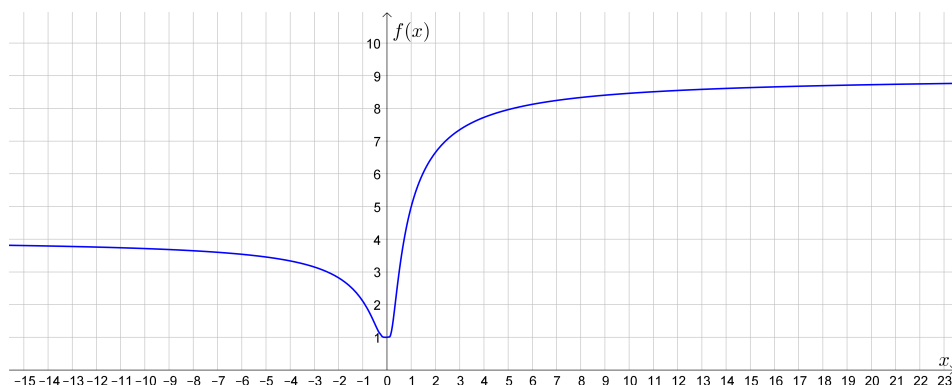
a) Setzt man für h den Wert 0 ein, dann erhält man einen *unbestimmten* Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$.

b) Multipliziere den Zähler aus, vereinfache so weit wie möglich und ermittle den Grenzwert.

5.5

MmF

Ermittle die folgenden ganzzahligen Grenzwerte der dargestellten stetigen Funktion f .



a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \boxed{}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \boxed{}$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \boxed{}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x^2) = \boxed{}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)^2 = \boxed{}$

5.6

MmF

Ermittle die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^x = \boxed{}$

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3 \cdot x} = \boxed{}$

q) $\lim_{x \rightarrow \infty} 5 \cdot (1 - e^{-0,09 \cdot x}) = \boxed{}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = \boxed{}$

j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10^{50}} = \boxed{}$

r) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{18}{10 - e^{1/x}} = \boxed{}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,42^x = \boxed{}$

k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{5 \cdot x} = \boxed{}$

s) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{0,4 \cdot (1 - e^{-0,8 \cdot x})}{1 + e^{4/x}} = \boxed{}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 0,42^x = \boxed{}$

l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \boxed{}$

t) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3 - 2 \cdot 0,8^x) = \boxed{}$

e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{e}\right)^x = \boxed{}$

m) $\lim_{x \rightarrow \infty} 2^{1/x} = \boxed{}$

u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 \cdot e^{1/x^2} - \frac{3}{0,8 \cdot x}\right) = \boxed{}$

f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{0,7}\right)^x = \boxed{}$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \cdot 2^{1/x} = \boxed{}$

v) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^x = \boxed{}$

g) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2 \cdot x} = \boxed{}$

o) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-7 \cdot x} = \boxed{}$

w) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{9 - \frac{1}{x}} = \boxed{}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 10^{-0,5 \cdot x} = \boxed{}$

p) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-7/x} = \boxed{}$

x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2} = \boxed{}$

5.7

MmF

Für die Höhe h einer Sonnenblume gilt:

$$h(t) = 87 \cdot e^{-\frac{142}{t^2}}$$

t ... Zeit in Tagen seit Keimung ($t > 0$)

$h(t)$... Höhe in cm

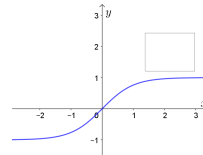
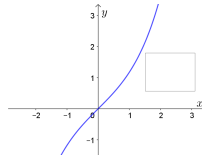
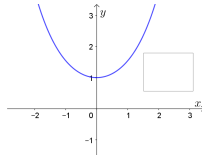
- Berechne die Höhe der Sonnenblume 1 Woche nach der Keimung.
- Nach wie vielen Tagen erreicht die Sonnenblume die Höhe 42 cm?
- Begründe anhand der Funktionsgleichung, welcher maximalen Höhe sich die Sonnenblume annähert.

5.8

Für die Funktionen $\sinh$ (*Sinus hyperbolicus*), $\cosh$ (*Cosinus hyperbolicus*) und $\tanh$ (*Tangens hyperbolicus*) gilt:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Ordne den Funktionen $\sinh$, $\cosh$ und $\tanh$ ihren Funktionsgraphen zu.



5.9

Der relative Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung an der gesamten Sonnenstrahlung hängt von der Wellenlänge λ ab. In einem bestimmten Wellenlängenbereich gilt:

$$A(\lambda) = 1 - e^{\frac{-0,0106}{\lambda^4}}$$

λ ... Wellenlänge in μm

$A(\lambda)$... relativer Anteil der gestreuten Sonnenstrahlung bei der Wellenlänge λ

1) Argumentieren Sie mathematisch, dass sich $A(\lambda)$ für größer werdendes λ dem Wert 0 nähert.

5.10

Eine Substanz wird aus dem Kühlschrank (Temperatur T_1) genommen und in einen Raum mit der Umgebungstemperatur T_2 gebracht.

Die Erwärmung der Substanz kann mithilfe der Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit beschrieben werden:

$$T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0,94^t \quad \text{mit } T_2 > T_1$$

t ... Zeit in Minuten (min)

$T(t)$... Temperatur nach t Minuten in Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$)

- a) – Begründen Sie mathematisch anhand der Funktionsgleichung, warum die Temperatur nicht über T_2 ansteigen kann.
- b) Die Substanz muss bei einer Temperatur von 13°C weiterverarbeitet werden.
 - Berechnen Sie, wie lange es dauert, bis die Substanz nach Entnahme aus dem Kühlschrank diese Temperatur erreicht hat, wenn $T_1 = 6^{\circ}\text{C}$ und $T_2 = 24^{\circ}\text{C}$ beträgt.

- 5.1 a) Es gilt $14 \cdot 3 = 42 = 5 \cdot 3^2 - 3$, also ist f stetig an der Stelle $x_0 = 3$.
 b) Es gilt $14 \cdot 3 = 42 \neq 3^4$, also ist f *nicht* stetig, weil sie die Sprungstelle $x_0 = 3$ hat.
 c) Es gilt $10 \cdot 3 = 3^2 + 21 \neq 42$, also ist f *nicht* stetig, weil sie den isolierten Punkt $(3 \mid 42)$ hat.
- 5.2 a) $a = -0,5519\dots$, $b = 3$, $c = 37,10\dots$ b) $a = 5$, $b = -8$, $c = 1,037\dots$
- 5.3 Von links nach rechts: f_3, f_1, f_2, f_4
- 5.4 a) $\frac{0}{0}$ b) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(4+h)^2 - 16}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (8 + h) = 8$
- 5.5 a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 9$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x^2) = 5$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)^2 = 25$
- 5.6 a) ∞ b) 0 c) 0 d) ∞ e) 0 f) ∞ g) 0 h) ∞ i) 0 j) ∞ k) ∞ l) ∞ m) 1 n) 3 o) 0 p) 1 q) 5 r) 2
 s) $0,2$ t) 3 u) 4 v) ∞ w) 3 x) ∞
- 5.7 a) $4,796\dots \text{ cm}$ b) $13,96\dots \text{ Tage}$ c) $\lim_{t \rightarrow \infty} -\frac{142}{t^2} = 0 \implies \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 87 \cdot e^0 = 87 \text{ cm}$
- 5.8 Von links nach rechts: $\cosh, \sinh, \tanh$
- 5.9 $\frac{-0,0106}{\lambda^4} \rightarrow 0$ also $e^{\frac{-0,0106}{\lambda^4}} \rightarrow e^0 = 1$ also $A(\lambda) \rightarrow 1 - 1 = 0$
- 5.10 a) Wegen $T_2 > T_1$ ist $(T_2 - T_1) \cdot 0,94^t > 0$, also $T(t) < T_2$. Der Grenzwert ist $\lim_{t \rightarrow \infty} T(t) = T_2 - (T_2 - T_1) \cdot 0 = T_2$.
 Die Temperatur nähert sich also von unten dem Grenzwert T_2 beliebig nahe an, überschreitet ihn aber nicht.
 b) $t = 7,959\dots \text{ Minuten}$