AUFGABENSAMMLUNG – GEOMETRIE

Inhaltsverzeichnis

Unterrichtsmaterialien – Geometrie

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

✓ Arbeitsblatt – Winkelmessung

✓ Arbeitsblatt – Geometrie in der Ebene

✓ Arbeitsblatt – Dreieckskonstruktionen

✓ Arbeitsblatt – Strahlensatz

✓ Arbeitsblatt – Kongruenz und Ähnlichkeit

✓ Arbeitsblatt – Geometrie im Raum

Geometrische Aufgaben mit Winkelfunktionen befinden sich in der Aufgabensammlung – Trigonometrie.

Wie darf ich die Aufgaben verwenden?

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 29. Mai 2024

1. Winkelmessung & Kreis

MmF-Materialien

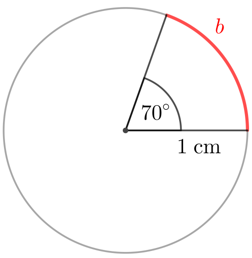
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

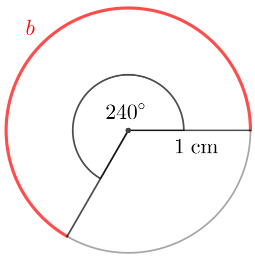
✓ Arbeitsblatt – Winkelmessung

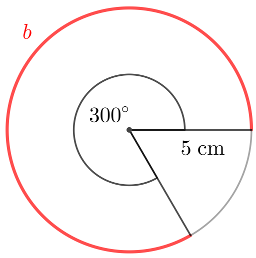
In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

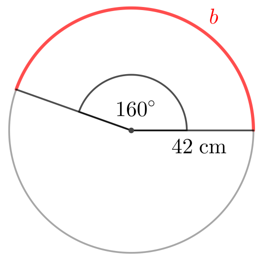
1.1

Berechne die Bogenlänge b. Gib den Zentriwinkel im Bogenmaß an.

a) 

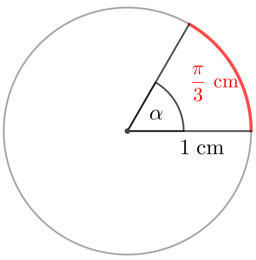
b) 

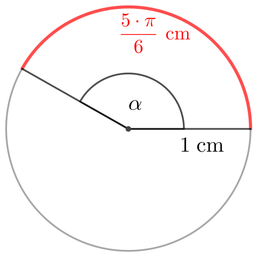
c) 

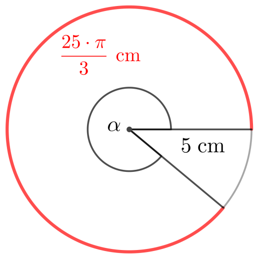
d) 

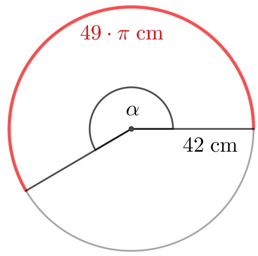
1.2

Berechne den Zentriwinkel α … **1)** im Bogenmaß. **2)** im Gradmaß.

a) 

b) 

c) 

d) 

1.3

Wandle zwischen Gradmaß und Bogenmaß um.

a) 70° **b)** 178° **c)** 2 rad **d)** $\frac{\pi}{2}$ rad **e)** $\frac{3\cdot\pi}{4}$ rad **f)** 0,42 rad

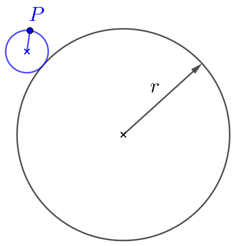
1.4

Ein 4 m langes Seil wird so am Boden platziert, dass ein Kreissektor mit Radius 1 m entsteht.

Fertige eine Skizze an.

Welchen Winkel schließt der Kreissektor ein? Gib den Winkel im Bogenmaß und im Gradmaß an.

1.5



Der Radius r vom großen Kreis ist k Mal so groß wie der Radius vom kleinen Kreis.

a) Stelle mithilfe von k eine Formel für den Radius r^* vom kleinen Kreis auf.

$r^* =$ ______

b) Stelle mithilfe von k und r jeweils eine Formel für den Umfang u vom großen Kreis und den Umfang u^* vom kleinen Kreis auf.

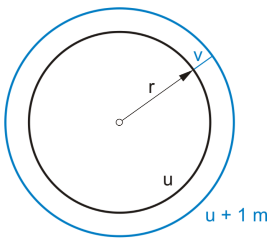
$u =$ ______ $u^* =$ ______

Der kleine Kreis rotiert einmal um den ganzen großen Kreis, bis er wieder in der Startposition ist.
Der Punkt P berührt dabei den großen Kreis genau n Mal. Stelle mithilfe von k eine Formel für n auf.

$n =$ ______

1.6

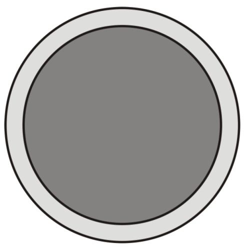
Stelle dir einen sehr großen und einen sehr kleinen Kreis vor, etwa den Äquator der Erde (Länge ca. 40 000 km) und den „Äquator“ eines Stecknadelkopfes (Länge ca. 12 mm). Beide Kreisumfänge werden nun um 1 m verlängert. Dadurch entstehen konzentrische Kreise mit größeren Radien.



Die Skizze zeigt die Situation für einen beliebigen Radius r, wenn der Umfang u um 1 m verlängert wird.

– Berechne die Vergrößerung v des Radius r.

1.7

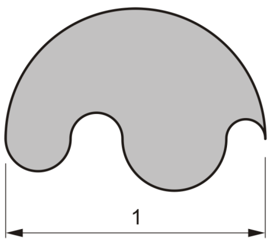


Der Flächeninhalt des hellgrauen Rings beträgt $\frac{2}{5}$ des Flächeninhalts des dunkelgrauen Kreises.

a) Untersuche, ob sich die beiden Radien wie 5 : 7 verhalten.

b) Um wieviel Prozent ist der Umfang des größeren Kreises größer als der Umfang des kleineren Kreises?

1.8



Die links zu sehende Fläche hat die Länge 1 und wird von fünf Halbkreisen berandet, deren Mittelpunkte auf einer Linie liegen.

– Berechne den Umfang dieser Fläche.

1.9

Die vom Hersteller eines Windrads angegebene Nennleistung kann in einer vereinfachten Form durch folgende Formel berechnet werden:

$$P_N = c \cdot A$$

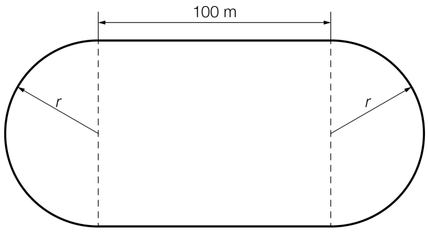
P_N ... Nennleistung in Megawatt (MW)
A ... Flächeninhalt der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche in Quadratmetern (m^2)
$c = 0{,}169 \cdot 10^{-3}$ MW/m^2

Ein Windrad hat eine Nennleistung von 0,85 MW.

1) Berechnen Sie den Durchmesser der von den Rotoren des Windrads überstrichenen Kreisfläche.

1.10

Die 400 m lange Laufbahn einer Leichtathletikanlage ist modellhaft aus einem Rechteck mit zwei aufgesetzten Halbkreisen zusammengesetzt (siehe nachstehende Abbildung).

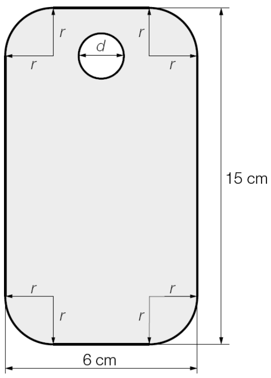


1) Berechnen Sie den Radius r der Halbkreise.

Die Weltrekordzeit von Usain Bolt im 100-m-Sprint der Männer aus dem Jahr 2009 beträgt 9,58 s. Die dabei erzielte Maximalgeschwindigkeit betrug 44,72 km/h.

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Maximalgeschwindigkeit von Bolt über der Durchschnittsgeschwindigkeit seines Laufes liegt.

1.11



Bei der Produktion von Smartphone-Hüllen wird ein rechteckiges Stück Leder mit der Länge 15 cm und der Breite 6 cm bearbeitet.

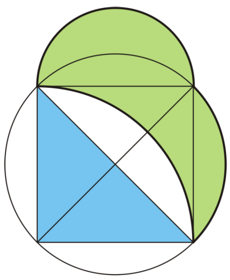
Die Ecken werden zu Viertelkreisen mit dem Radius r abgerundet.

Zusätzlich wird ein Loch mit dem Durchmesser d für die Kamera ausgestanzt (siehe nebenstehende Abbildung).

1) Stellen Sie aus r und d eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$A =$ ______________________________

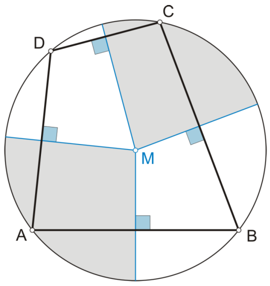
1.12



Die blaue Fläche ist ein halbes Quadrat.
Die grüne Fläche wird von einem Halbkreis und zwei Viertelkreisen berandet.

– Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der blauen und der grünen Fläche.

1.13



Das Viereck $ABCD$ hat einen Umkreis mit dem Mittelpunkt M.

– Untersuche, ob die Summe der Flächeninhalte der beiden grauen Kreissektoren gleich dem halben Flächeninhalt des Umkreises ist.

1.1 **a)** $b = 1{,}221\ldots\,\text{cm}$, $\alpha = \frac{7}{18} \cdot \pi\,\text{rad}$ **b)** $b = 4{,}188\ldots\,\text{cm}$, $\alpha = \frac{4}{3} \cdot \pi\,\text{rad}$
c) $b = 26{,}17\ldots\,\text{cm}$, $\alpha = \frac{5}{3} \cdot \pi\,\text{rad}$ **d)** $b = 117{,}2\ldots\,\text{cm}$, $\alpha = \frac{8}{9} \cdot \pi\,\text{rad}$

1.2 **a)** $\alpha = \frac{\pi}{3}\,\text{rad} = 60°$ **b)** $\alpha = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad} = 150°$ **c)** $\alpha = \frac{5\pi}{3}\,\text{rad} = 300°$ **d)** $\alpha = \frac{7\pi}{6}\,\text{rad} = 210°$

1.3 **a)** $1{,}221\ldots\,\text{rad}$ **b)** $3{,}106\ldots\,\text{rad}$ **c)** $114{,}5\ldots°$ **d)** $90°$ **e)** $135°$ **f)** $24{,}06\ldots°$

1.4 $\alpha = 2\,\text{rad} = 114{,}59\ldots°$

1.5 **a)** $r^* = \frac{r}{k}$ **b)** $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ **c)** $u^* = 2 \cdot \pi \cdot \frac{r}{k}$ **d)** $n = k$

1.6 $v = 15{,}9\ldots\,\text{cm}$

1.7 **a)** Nein, die Flächeninhalte verhalten sich wie $\sqrt{5} : \sqrt{7}$. **b)** 18,3... %

1.8 $u = \pi$

1.9 80,02... m

1.10 **1)** $r = 31{,}83\ldots\,\text{m}$ **2)** 19,0... %

1.11 $A = 15 \cdot 6 - 4 \cdot r^2 + r^2 \cdot \pi - \frac{d^2 \cdot \pi}{4}$

1.12 2 : 3

1.13 Ja: Verbindet man den Mittelpunkt M mit den Eckpunkten A, B, C und D, so entstehen vier Winkel $\measuredangle AMB$, $\measuredangle BMC$, $\measuredangle CMD$ und $\measuredangle DMA$, die von den blauen Radien halbiert werden. Die Summe der Öffnungswinkel der grauen Kreissektoren ist daher die Hälfte von $360°$.

2. Dreieck & Vieleck

MmF-Materialien

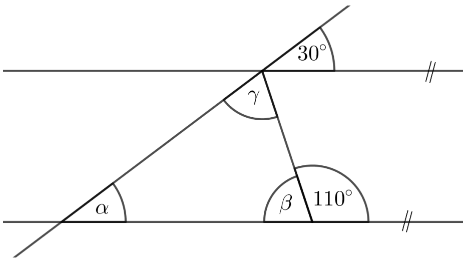
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Geometrie in der Ebene

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

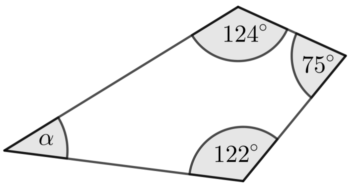
Ermittle die (nicht maßstabsgetreu) dargestellten Winkel α, β und γ.



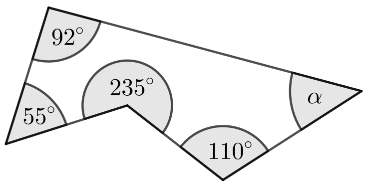
2.2

Berechne den Winkel α im dargestellten Vieleck.

a)

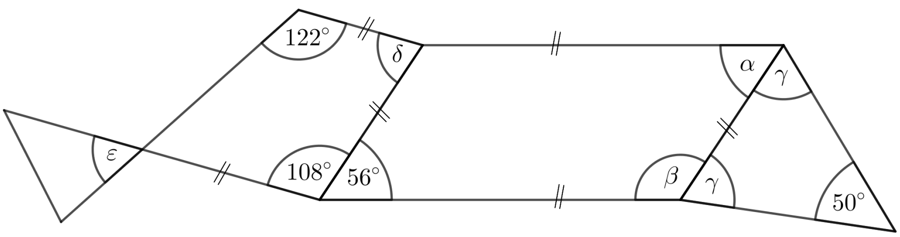


b)

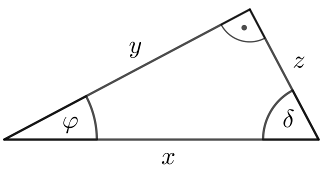


2.3

Ermittle die (nicht maßstabsgetreu) dargestellten Winkel α, β, γ, δ und ε.



2.4



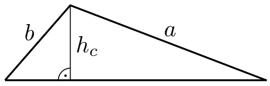
Im dargestellten rechtwinkeligen Dreieck gilt $\delta = 62°$, $x = 6\,\text{cm}$ und $z = 2{,}8\,\text{cm}$.

Berechne den Winkel φ und die Seitenlänge y.

2.5

Ein Dreieck hat die Winkel $\alpha = 48°$, β und γ. Der Winkel β ist um ein Drittel größer als α.
Berechne die Winkel β und γ.

2.6



Im dargestellten Dreieck gilt $a = 7\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$ und $h_c = 2\,\text{cm}$.
Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.

2.7

Begründe, warum es *kein* Dreieck geben kann, das …

a) …einen rechten Winkel und einen stumpfen Winkel hat.

b) …gleichseitig ist und den Winkel $\alpha = 70°$ hat.

c) …die Seitenlängen $a = 4\,\text{cm}$, $b = 3\,\text{cm}$ und $c = 8\,\text{cm}$ hat.

2.8

Ein Dreieck hat die Seitenlängen $a = 42\,\text{cm}$, $b = 2\,\text{dm}$ und $c = 34\,\text{cm}$.

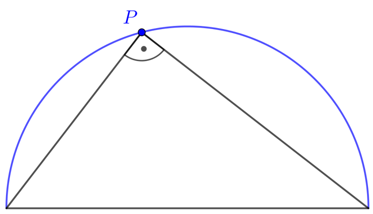
a) Berechne den Umfang u des Dreiecks.

b) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks mit der Heronschen Flächenformel.

c) Berechne die Länge der Höhe h_c.

2.9

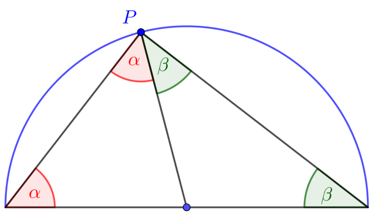
Auf dem links dargestellten Halbkreisbogen ist ein Punkt P an einer beliebigen Stelle eingezeichnet.
Der *Satz von Thales* besagt, dass das links eingezeichnete Dreieck dann rechtwinkelig ist. Warum stimmt er?



Rechts ist der Radius zu P eingezeichnet.

a) Warum sind die beiden Winkel α (bzw. β) tatsächlich gleich groß?

b) Begründe, warum tatsächlich $\alpha + \beta = 90°$ gilt.

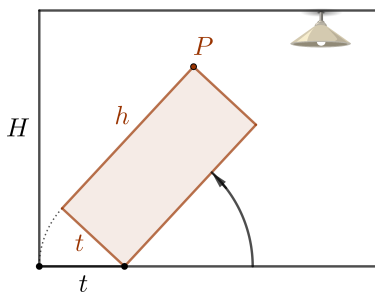


2.10

Teddy stellt einen Kühlschrank mit Höhe h und Tiefe $t = 78\,\text{cm}$ auf.
Seine Küche hat die Raumhöhe $H = 2{,}5\,\text{m}$.

Welche Höhe h darf der Kühlschrank maximal haben,
damit er beim Aufstellen kein Loch in die Küchendecke reißt?

Hinweis: Beim Aufstellen hat der eingezeichnete Eckpunkt P von allen Punkten am Kühlschrank stets die größte Höhe über dem Boden.



2.11

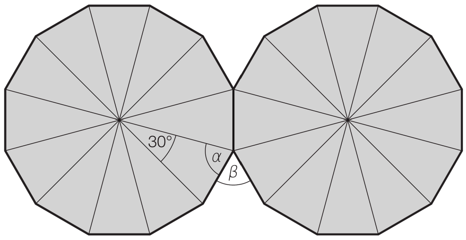
Bei der Quiz-Show „Wer wird Millionär“ gab es folgende 16 000 €-Frage: Jedes Rechteck ist ...

A: ein Rhombus (eine Raute). **B:** ein Quadrat. **C:** ein Trapez. **D:** ein Parallelogramm.

Argumentiere für jede Antwortmöglichkeit, ob sie richtig oder falsch ist.

Da zwei Antworten richtig sind und die Kandidatin dadurch verwirrt wurde, durfte sie nochmal in die Quiz-Show kommen.

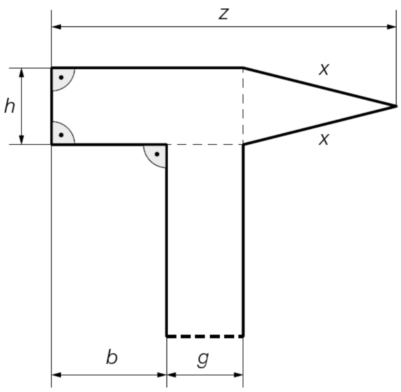
2.12



Die australische 50-Cent-Münze besteht – von oben betrachtet – aus 12 gleich großen gleichschenkeligen Dreiecken.
Legt man 2 solche Münzen aneinander, ergibt sich nebenstehende geometrische Situation.

1) Ermitteln Sie die Winkel α und β.

2.13



Bei einem Geschicklichkeitsspiel schlägt man Nägel mit einem Hammer in einen Baumstamm.
In der nebenstehenden (nicht maßstabgetreuen) Abbildung ist der Querschnitt des oberen Teils eines Hammers dargestellt.

1) Stellen Sie aus h, z, b und g eine Formel für die Länge x auf.

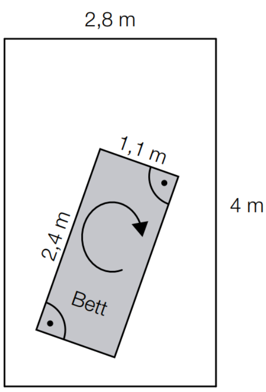
$x =$ ______________________

2.14

Der Aufzug eines Pflegeheims hat eine rechteckige Grundfläche mit einer Länge von 4 m und einer Breite von 2,8 m.
Ein Pflegebett fährt auf beweglichen Rollen und hat die Außenmaße 2,4 m × 1,1 m (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Abbildung).

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Aufzug breit genug ist, damit das Bett – wie oben skizziert – um 180 ° gedreht werden kann.

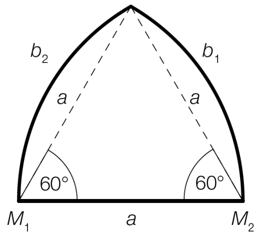
Aufzug-Innenraum von oben gesehen



2.15

In einem Weihnachtsmalbuch für Kinder ist eine brennende Kerze abgebildet, die angemalt werden soll.
Zur Modellierung der Flamme können Kreisbögen mit dem Radius a verwendet werden.

b_1: Kreisbogen mit dem Kreismittelpunkt M_1
b_2: Kreisbogen mit dem Kreismittelpunkt M_2



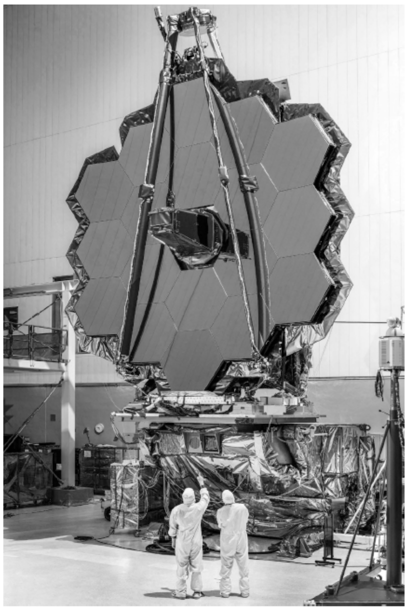
1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Flamme für $a = 3\,\text{cm}$.

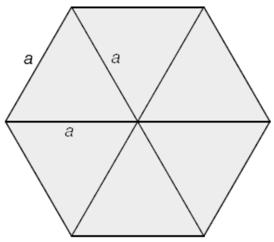
2.16

Die voraussichtlichen Baukosten des 6,2 Tonnen schweren James Webb Space Telescope (JWST) betragen 8,8 Milliarden Euro. Man nimmt an, dass die Transportkosten ins Weltall 12,000 € pro Kilogramm des JWST betragen werden.

1) Berechnen Sie die Summe aus Baukosten und Transportkosten in Milliarden Euro.

Der Spiegel des JWST hat einen Flächeninhalt von insgesamt $25\,\text{m}^2$. Er besteht aus 18 gleich großen Modulen. Jedes dieser Module hat die Form eines regelmäßigen Sechsecks. Ein solches Sechseck besteht aus 6 gleichseitigen Dreiecken (siehe nachstehende Abbildungen).

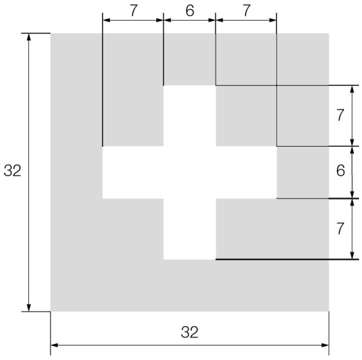




Bildquelle: NASA Goddard Space Flight Center / Chris Gunn from Greenbelt, MD, USA, CC BY 2.0, https://de.wikipedia.org/wiki/James-Webb-Weltraumteleskop#/media/File:James_Webb_Space_Telescope_Mirrors_Will_Piece_Together_Cosmic_Puzzles_(30108124923).jpg [06.03.2019].

2) Berechnen Sie die Seitenlänge a eines Sechsecks in Metern.

2.17



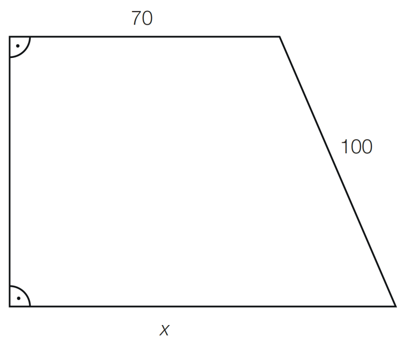
Die Flagge der Schweiz ist quadratisch und zeigt ein weißes Kreuz auf rotem Grund. Die Größe des Kreuzes auf einer bestimmten Flagge ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt (Angaben in Längeneinheiten (LE)).

1) Berechnen Sie, wie viel Prozent der gesamten Fläche das weiße Kreuz einnimmt.

2.18

Ein Landwirt will den Ertrag pro Quadratmeter (m^2) einer bestimmten Gemüsesorte steigern. Dazu prüft er den Einsatz eines Düngemittels.

Die nebenstehende Grafik zeigt ein zu düngendes Feld. Die Angabe der Seitenlängen erfolgt in Metern.



1) Erstellen Sie aus x eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A des Feldes.

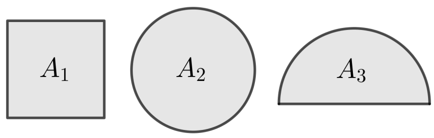
$A =$ ____________________________

Die Kosten für das Düngemittel betragen 50 Cent pro Kilogramm. Der Landwirt bringt 250 g Dünger pro Quadratmeter aus.

2) Berechnen Sie die Kosten in Euro für die Düngung des Feldes für $x = 100$ m.

2.19

Dido hat eine Schnur mit 1 m Länge.
Sie soll damit eine Figur mit möglichst großem Flächeninhalt legen.
Sie probiert es mit einem Quadrat, einem Kreis und einem Halbkreis.



a) Zeige, dass $A_2 > A_1 > A_3$ gilt.

b) Um wie viel Prozent ist A_2 größer als A_1 bzw. A_3?

Tatsächlich ist der Kreis unter allen Figuren mit 1 m Umfang jene mit größtem Flächeninhalt.

2.20

Die Zahlen a, b und c mit

$$a = x^2 - y^2, \quad b = 2 \cdot x \cdot y \quad \text{und} \quad c = x^2 + y^2$$

bilden für alle ganzen Zahlen x und y mit $x > y$ ein *pythagoräisches Tripel* – es gilt also $a^2 + b^2 = c^2$.

a) Rechne für $x = 3$ und $y = 1$ nach, dass tatsächlich $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

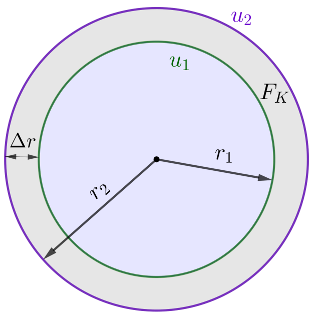
b) Rechne allgemein für alle Zahlen x und y nach, dass tatsächlich $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

So kannst du also auch unendlich viele pythagoräische Tripel (a, b, c) mit $a,\ b,\ c \in \mathbb{N}$ erzeugen.

c) Begründe, ob es ein rechtwinkeliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen und einer Kathetenlänge 42 gibt.

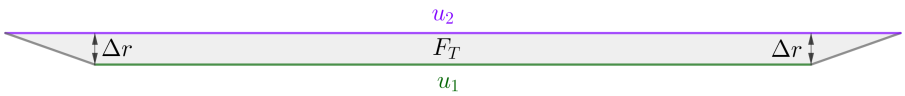
2.21

Die konzentrischen Kreise mit Radien $r_1 = 5\,\text{cm}$ und $r_2 = 6\,\text{cm}$ bilden einen Kreisring.



a) Berechne den Flächeninhalt F_K von diesem Kreisring.

Die konzentrischen Kreise haben die Umfänge u_1 bzw. u_2.
Unten ist ein Trapez mit den parallelen Seitenlängen u_1 bzw. u_2 und der Höhe $\Delta r = r_2 - r_1$ dargestellt:



b) Rechne nach, dass der Flächeninhalt F_T von diesem Trapez gleich groß wie F_K ist.

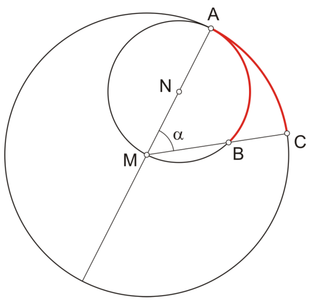
Tatsächlich gilt dieser Zusammenhang für *beliebige* positive Zahlen $r_1 < r_2$.

c) Stelle mithilfe von r_1 und r_2 jeweils eine Formel für F_K und für F_T auf.

$F_K =$ $\qquad$ $F_T =$

d) Zeige damit, dass allgemein $F_K = F_T$ gilt.

2.22



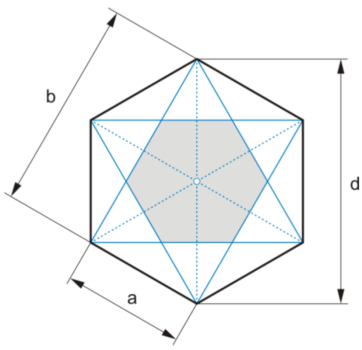
Der große Kreis hat den Mittelpunkt M, der kleine Kreis hat den Mittelpunkt N. Wenn man den Winkel α von $0°$ bis $90°$ wachsen lässt, so bewegt sich der Schnittpunkt B von MC mit dem kleineren Kreis von A bis M.

a) Zeige, dass die beiden roten Kreisbögen gleich lang sind.

b) Zeige, dass die Sehne AB immer kürzer als die Sehne AC ist.

c) Berechne das Verhältnis der Längen von AB und AC, wenn B genau in der Mitte von MC liegt.

2.23

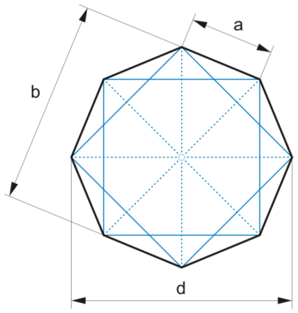


Ein regelmäßiges Sechseck hat Seitenlänge a, die Breite b und die Durchmesserlänge d.

a) Zeige, dass sich b^2 zu d^2 wie 3 zu 4 verhält.

b) Zeige, dass die Fläche des Sechsecks dreimal so groß wie die gefärbte Fläche ist.

2.24



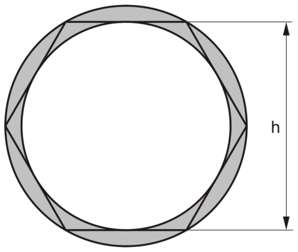
Ein regelmäßiges Achteck hat die Seitenlänge a, die Breite b, die Durchmesserlänge d und den Flächeninhalt A.
Beweise die folgenden Formeln.

a) $4 \cdot a^2 = d^2 \cdot (2 - \sqrt{2})$

b) $b = a \cdot (1 + \sqrt{2})$

c) $A = 2 \cdot a^2 \cdot (1 + \sqrt{2})$

2.25



Der Umkreis und der Inkreis eines regelmäßigen Sechsecks bilden einen Kreisring.

a) Gib eine Formel für den Flächeninhalt F_R dieses Kreisrings in Abhängigkeit von der Höhe h des Sechsecks an.

b) Berechne das Verhältnis $F_U : F_R : F_I$ der Flächeninhalte des Umkreises, des Kreisrings und des Inkreises.

2.1 $\alpha = 30^\circ,\ \beta = 70^\circ,\ \gamma = 80^\circ$

2.2 **a)** $\alpha = 39^\circ$ **b)** $\beta = 48^\circ$

2.3 $\alpha = 56^\circ,\ \beta = 124^\circ,\ \gamma = 65^\circ,\ \delta = 72^\circ,\ \varepsilon = 58^\circ$

2.4 $\varphi = 28^\circ,\ y = 5{,}30\ldots\,\text{cm}$

2.5 $\beta = 64^\circ,\ \gamma = 68^\circ$

2.6 $u = 18{,}94\ldots\,\text{cm}$ $A = 8{,}94\ldots\,\text{cm}^2$

2.7 **a)** Wenn $\alpha = 90^\circ$ und β größer als 90° ist, dann wäre die Winkelsumme größer als 180°.
Jedes Dreieck hat aber die Winkelsumme 180°.

b) Im gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich groß, also $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

c) Die Dreiecksungleichung $a + b > c$ ist nicht erfüllt.

2.8 **a)** $u = 96\,\text{cm}$ **b)** $A = 336\,\text{cm}^2$ **c)** $h_c = 19{,}7\ldots\,\text{cm}$

2.9 **a)** Die beiden Dreiecke sind jeweils gleichschenkelig (Radius ist Schenkel). Also sind die Basiswinkel gleich groß.

b) $180^\circ = (180^\circ - 2\cdot\alpha) + (180^\circ - 2\cdot\beta) \iff \cdots \iff \alpha + \beta = 90^\circ$

2.10 $237{,}5\ldots\,\text{cm}$

2.11 **A:** Falsch, weil ein Rechteck verschieden lange Seiten haben kann, aber ein Rhombus gleich lange Seiten haben *muss*.

B: Falsch (wie **A**).

C: Richtig, weil ein Trapez (mindestens) ein Paar paralleler Seiten haben muss. Das ist bei jedem Rechteck der Fall.

D: Richtig, weil ein Parallelogramm zwei Paare paralleler Seiten haben muss. Das ist bei jedem Rechteck der Fall.

2.12 **1)** $\alpha = 75^\circ,\ \beta = 60^\circ$

2.13 $x = \sqrt{\left(\frac{h}{2}\right)^2 + (z - b - g)^2}$

2.14 Die Länge der Diagonalen beträgt rund 2,64 m. Da die Diagonale kürzer als die Liftbreite ist, kann das Bett im Lift um 180° gedreht werden.

2.15 $5{,}527\ldots\,\text{cm}$

2.16 **1)** 8,8744 Milliarden Euro **2)** $a = 0{,}731\ldots\,\text{m}$

2.17 19,9... %

2.18 **1)** $A = \dfrac{(x+70)\cdot\sqrt{100^2 - (x-70)^2}}{2}$ **2)** Kosten $\approx 1013{,}56$ €

2.19 **a)** $A_1 = \frac{1}{16}\,\text{m}^2 = 0{,}0625\,\text{m}^2$ $A_2 = \frac{1}{4\cdot\pi}\,\text{m}^2 = 0{,}0795\ldots\,\text{m}^2$ $A_3 = \frac{\pi}{2\cdot(2+\pi)^2}\,\text{m}^2 = 0{,}0594\ldots\,\text{m}^2$

b) Der Flächeninhalt vom Kreis ist um 27,32... % größer als der Flächeninhalt vom Quadrat.
Der Flächeninhalt vom Kreis ist um 33,92... % größer als der Flächeninhalt vom Halbkreis.

2.20 **a)** $a = 8,\ b = 6,\ c = 10$ $a^2 + b^2 = 100 = c^2$ ✓

b) $a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2\cdot x\cdot y)^2 = x^4 - 2\cdot x^2\cdot y^2 + y^4 + 4\cdot x^2\cdot y^2 = x^4 + 2\cdot x^2\cdot y^2 + y^4$ $c^2 = x^4 + 2\cdot x^2\cdot y^2 + y^4$ ✓

c) $2\cdot x\cdot y = 42$ Ja, mit $x = 7$ und $y = 3$ erhält man $a = 40,\ b = 42,\ c = 58$.

2.21 **a)** $F_K = 34{,}55\ldots\,\text{cm}^2$ **b)** $F_T = 34{,}55\ldots\,\text{cm}^2 = F_K$ **c)** $F_K = \pi\cdot r_2^2 - \pi\cdot r_1^2$ $F_T = \frac{(2\cdot\pi\cdot r_1 + 2\cdot\pi\cdot r_2)\cdot(r_2 - r_1)}{2}$

d) Klammern in F_T ausmultiplizieren und vereinfachen

2.22 **a)** $\measuredangle ANB = 2\cdot\alpha$ (Hinweis: Satz von Thales)

b) ABC ist ein rechtwinkeliges Dreieck mit Hypotenuse AC und Kathete AB. Aus der Dreiecksungleichung folgt $AB < AC$

c) $AB : AC = \sqrt{3} : 2$ (Pythagoras)

2.23 **a)** Es gilt $a^2 + b^2 = d^2$ und $d = 2\cdot a$. **b)** Es gilt $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\cdot h$ und $h_{\text{neu}} = \dfrac{a}{2}$.

2.24 Die Seitenlänge q der eingezeichneten Quadrate ist $q = \frac{d}{\sqrt{2}}$. Das Achteck kann aus einem Quadrat und vier gleichschenkeligen Dreiecken zusammengesetzt werden.
Die Höhe eines solchen Dreiecks ist $h = \frac{d-q}{2}$.
Es gilt: $a^2 + b^2 = d^2$, $2\cdot q^2 = d^2$ und $a^2 = h^2 + \left(\dfrac{q}{2}\right)^2$.

2.25 **a)** $F_R = \frac{h^2}{12}\cdot\pi$ **b)** $4 : 1 : 3$

3. Ähnlichkeit & Strahlensatz

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

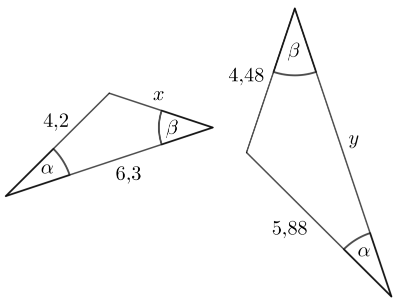
- ✓ Arbeitsblatt – Strahlensatz
- ✓ Arbeitsblatt – Kongruenz und Ähnlichkeit

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

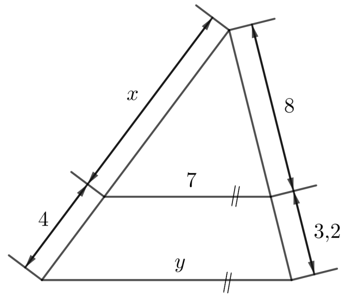
3.1

Berechne die Längen x und y (Längen in cm).

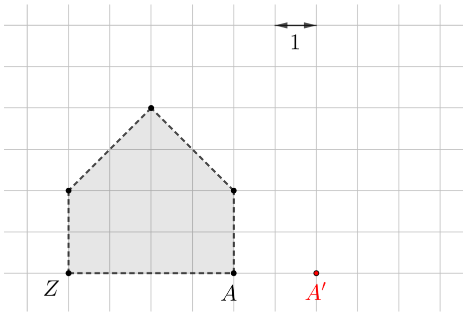
a)



b)



3.2



Links ist ein Fünfeck strichliert dargestellt.

Ausgehend vom Eckpunkt Z wird das Fünfeck mit dem Skalierungsfaktor k zentrisch gestreckt.

a) Lies den Skalierungsfaktor k aus der Grafik ab.

b) Vervollständige das vergrößerte Fünfeck.

c) Ermittle die Flächeninhalte der beiden Fünfecke.

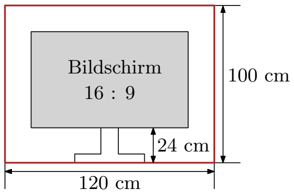
3.3

Auf der dargestellten Strecke AB liegt ein Punkt T, der diese im Verhältnis $5 : 2$ teilt. Konstruiere diesen Punkt T.

$\overline{AT} : \overline{TB} = 5 : 2$

3.4

Zur Einrichtung einer neuen Wohnung fährst du ins Einkaufszentrum.



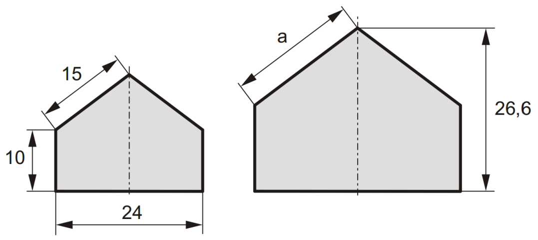
Im Möbelhaus kaufst du einen Fernsehschrank, der den links abgebildeten Ausschnitt für einen Fernseher hat.
Der Ausschnitt hat die Breite 120 cm und die Höhe 100 cm.
Anschließend suchst du im gegenüberliegenden Elektronikgeschäft einen passenden Fernseher, der möglichst groß ist.

Die angebotenen Fernseher sind im 16 : 9 - Format.
Die Bildschirmbreite und die Bildschirmhöhe stehen also im Verhältnis 16 : 9.
Der Fußsockel hat bis zur unteren Kante des Bildschirms eine Höhe von 24 cm.
Links, rechts und oberhalb des Bildschirms sollen jeweils zumindest 4 cm Platz bleiben.

a) Wie breit und wie hoch ist der größte Bildschirm im 16 : 9 - Format, der hineinpasst?

b) Dir stehen Fernseher mit einer Bildschirmdiagonale von 46 Zoll, 48 Zoll, 50 Zoll und 52 Zoll zur Auswahl. Welche der Fernseher passen in den Fernsehschrank? (1 Zoll = 2,54 cm)

3.5

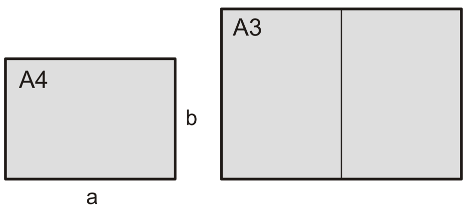


In der Planungsphase soll die Wand einer Lagerhalle unter Beibehaltung ihrer Proportionen vergrößert werden. Die neue Höhe soll 26,6 m betragen.

– Berechne die Seite a und den neuen Flächeninhalt.

3.6

Die Papierformate A4 und A3 haben dieselben Proportionen. Sie sind ähnliche Rechtecke.



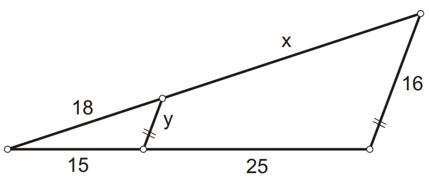
A3 hat den doppelten Flächeninhalt von A4.

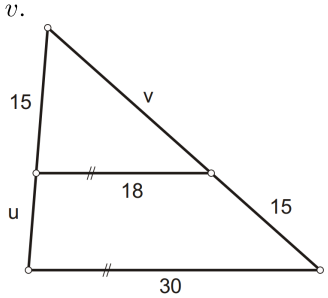
a) Welches Verhältnis haben die Seitenlängen a und b?

b) Um wieviel Prozent ist die lange Seite von A3 länger als die lange Seite von A4?

3.7

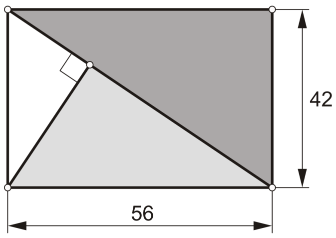
Berechne die Streckenlängen x, y, u und v.





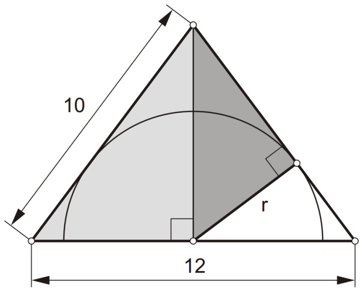
3.8

Begründe, warum die beiden grauen Dreiecke ähnlich sind. Berechne die Katheten des hellgrauen Dreiecks.



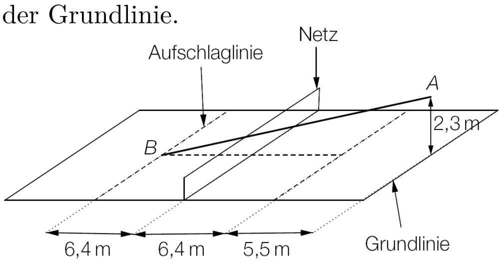
3.9

Begründe, warum die beiden grauen Dreiecke ähnlich sind. Berechne den Radius r.



3.10

Im Rahmen der Nachwuchsförderung wurden die Leistungen der Teilnehmer eines Knaben-Tennisturniers genauer beobachtet. Ein Spieler trifft beim Aufschlag den Ball in einer Höhe von 2,3 m im Punkt A genau über der Mitte der Grundlinie.

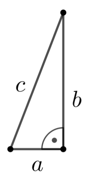


Er visiert den Punkt B (Mitte der Aufschlaglinie) an. Um nicht ins Netz zu gehen, muss der Ball das Netz in einer Höhe von mindestens 1 Meter (über dem Boden) überqueren.
Die Flugbahn des Tennisballes beim Aufschlag kann modellhaft mittels einer Gerade beschrieben werden.

1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Ball bei diesem Aufschlag über das Netz geht.

3.11

Es gibt viele verschiedene Beweise für den *Satz von Pythagoras*.
Einer dieser Beweise verwendet den *Satz von Thales* und den *Strahlensatz*:
Links ist ein beliebiges rechtwinkeliges Dreieck dargestellt. Rechts ist ein Kreis mit Radius c dargestellt.



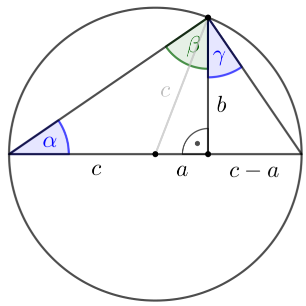
a) Warum sind die beiden rechts eingezeichneten Winkel α und γ gleich groß?

b) Begründe mithilfe von **a)** die folgende Gleichung:

$$\frac{c+a}{b} = \frac{b}{c-a}$$

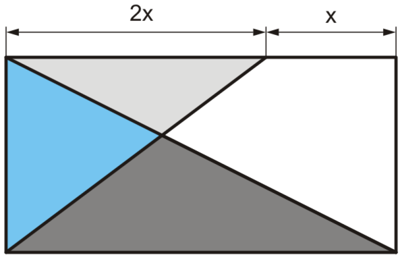
c) Begründe mithilfe von **b)** die folgende Gleichung:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

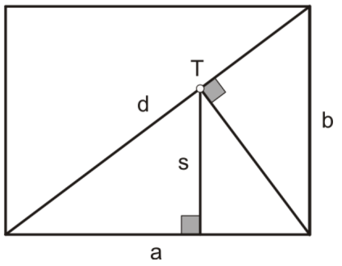


3.12

Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte der gefärbten Dreiecke.



3.13



Löse ohne die Satzgruppe des Pythagoras zu verwenden.

Die Satzgruppe besteht aus dem Satz von Pythagoras, dem Kathetensatz und dem Höhensatz.

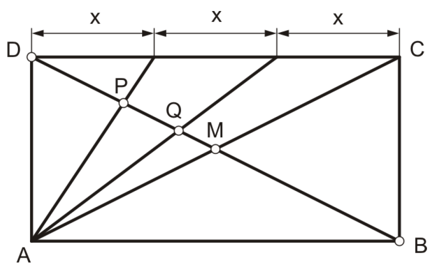
a) Zeige, dass im links dargestellten Rechteck die folgende Formel gilt:

$$s \cdot d^2 = b \cdot a^2$$

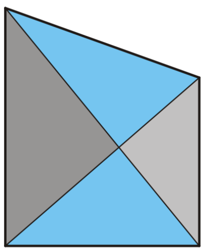
b) In welchem Verhältnis teilt der Punkt T die Diagonale des Rechtecks?

3.14

Ermittle das Verhältnis der Längen der Teilstrecken DP, PQ und QM.



3.15



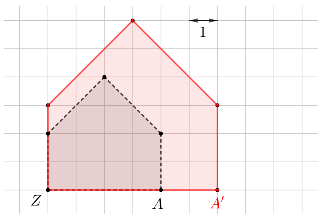
Ein rechtwinkeliges Trapez wird durch die Diagonalen in vier Dreiecke geteilt.

a) Untersuche, ob die beiden blauen Dreiecke den gleichen Flächeninhalt haben.

b) Das Größenverhältnis der grauen Dreiecke hängt von den Abmessungen des Trapezes ab. Bei welchen Abmessungen ist das dunkle Dreieck doppelt so groß wie das helle Dreieck?

3.1 **a)** $x = 3{,}2\,\text{cm}$, $y = 8{,}82\,\text{cm}$ **b)** $x = 10\,\text{cm}$, $y = 9{,}8\,\text{cm}$

3.2 **a)** $k = 1{,}5$ **b)**



c) $F_1 = 12$, $F_2 = 27$

3.3 siehe Arbeitsblatt – Strahlensatz

3.4 **a)** Maximale Breite: 112 cm Maximale Höhe: 63 cm **b)** 46, 48 und 50 Zoll

3.5 $a = 21\,\text{m}$, Flächeninhalt: $420\,\text{m}^2$

3.6 **a)** $a : b = \sqrt{2} : 1$ **b)** 41,4... %

3.7 $x = 30$, $y = 6$, $u = 10$, $v = 22{,}5$

3.8 Beide grauen Dreiecke sind rechtwinkelig. Die jeweils kleineren Winkel sind auch gleich groß. (Parallelwinkel/Z-Regel)
Aus der Winkelsumme 180° folgt, dass die grauen Dreiecke ähnlich sind.
Kathetenlängen: 33,6 bzw. 44,8

3.9 Die Höhe im großen Dreieck ist aufgrund der Symmetrie eine Winkelsymmetrale.
Beide grauen Dreiecke haben also oben einen gleich großen Winkel und sind beide rechtwinkelig.
Aus der Winkelsumme 180° folgt, dass die grauen Dreiecke ähnlich sind.
$r = 4{,}8$

3.10 Beim Netz hat der Ball eine Höhe von rund 0,80 m. Der Ball landet also im Netz.

3.11 **a)** Aus der Winkelsumme 180° folgt: $\beta = 90° - \alpha$
Aus dem Satz von Thales folgt: $\gamma = 90° - \beta = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ ✓

b) Ähnlichkeit von Dreiecken und Strahlensatz

c) mit beiden Nennern multiplizieren

3.12 $9 : 6 : 4$

3.13 **a)** mehrfache Anwendung von Proportionen für ähnliche Dreiecke bzw. „doppelte Flächenberechnung" in rechtwinkeligen Dreiecken

b) $a^2 : b^2$

3.14 $5 : 3 : 2$ Hinweis: Ähnliche Dreiecke mit Eckpunkt P

3.15 **a)** Die Flächeninhalte sind gleich groß.
Hinweis: Ergänze die beiden blauen Dreiecke jeweils um dunkelgraue Dreieck. Warum sind diese beiden neuen Dreiecke gleich groß?

b) Die parallelen Seiten müssen im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$ stehen.

4. Geometrie im Raum

MmF-Materialien

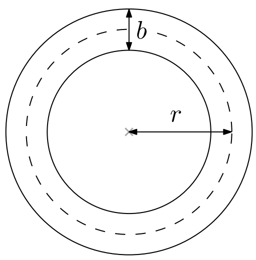
Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Geometrie im Raum

In der Aufgabensammlung Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

4.1

Für die dargestellte kreisförmige Fahrbahn gilt $r = 34\,\text{m}$ und $b = 42\,\text{dm}$.



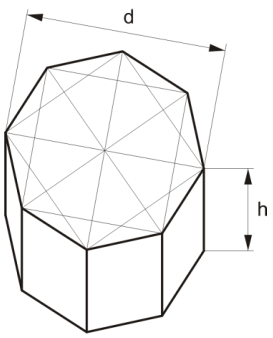
Wegen Frostschäden muss die Fahrbahn komplett neu asphaltiert werden.
Eine Norm schreibt beim verwendeten Asphalt vor, dass die Fahrbahn an jeder Stelle eine Dicke von mindestens $7\,\text{cm}$ hat.
Es stehen $70\,\text{m}^3$ Asphalt zur Verfügung.

a) Überprüfe, ob dieser Asphalt ausreichen kann, um die gesamte Fahrbahn so neu zu asphaltieren, dass die Norm eingehalten wird.

4.2

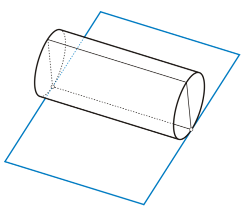
Eine Firma produziert Großrohrsysteme aus Kunststoff.
Der Außendurchmesser einer solchen Röhre ist $3{,}5\,\text{m}$. Die Dicke der Röhre beträgt $12\,\text{cm}$.
Der verwendete Kunststoff hat die Dichte $0{,}96\,\text{g/cm}^3$. Die aktuellen Rohstoffkosten betragen 1030 € pro Tonne.
Berechne die Rohstoffkosten für eine solche $600\,\text{m}$ lange Kunststoffröhre.

4.3



Der links dargestellte Sockel aus Marmor hat die Form eines regelmäßigen achtseitigen Prismas und wiegt $500\,\text{kg}$.
Die Dichte von Marmor beträgt rund $3\,\text{g/cm}^3$.
Der Durchmesser d soll um $25\,\%$ vergrößert werden, unter Beibehaltung der Regelmäßigkeit des Achtecks. Um wieviel Prozent muss die Höhe h verkürzt werden, damit sich die Masse des Sockels nicht ändert?

4.4

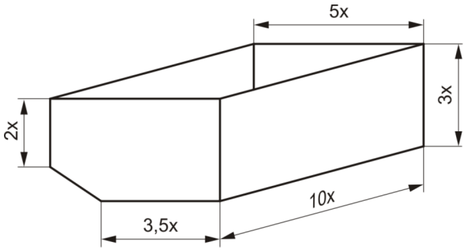


Die Seiten eines A4-Blattes verhalten sich wie $\sqrt{2} : 1$.
Das Blatt kann auf 2 Arten zu einem Mantel eines Drehzylinders zusammengebogen werden: Entweder werden aus den längeren Seiten die Randkreise, oder aus den kürzeren Seiten.

– Berechne das Verhältnis der beiden Volumina.

4.5

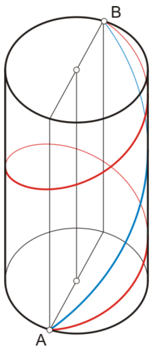
Der Container ist so zu dimensionieren, dass sein Volumen $10\,\text{m}^3$ beträgt.



a) Berechne x.

b) Der Faktor 3,5 (untere Kante) soll auf 3,8 geändert werden, das Volumen soll aber gleich bleiben. Dies kann durch eine Änderung des Faktors 2 (linke Kante) erreicht werden.
Berechne den neuen Faktor.

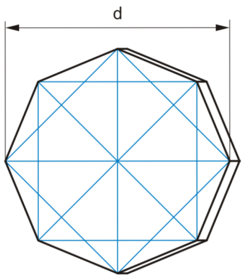
4.6



Ein Rechteck mit dem Seitenverhältnis 4 : 3 wird so zu einem Drehzylindermantel zusammengebogen, dass die kürzere Seite die Höhe ist.
Ein rotes und ein blaues Insekt krabbeln auf dem Zylindermantel von A nach B.
Sie krabbeln gleich schnell. Das blaue Insekt krabbelt auf dem kürzesten Weg von A nach B.
Das rote Insekt möchte den Mantel einmal umrunden, sonst aber keinen Umweg machen.

– Braucht das rote Insekt doppelt so lang wie das blaue Insekt?

4.7



Eine keramische Fliese hat die Form eines regelmäßigen Achtecks.
Der Durchmesser d beträgt $20\,\text{cm}$.

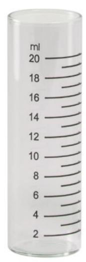
a) Berechne den Flächeninhalt des Achtecks durch Zusammensetzen geeigneter Dreiecke.

b) Die Fliese hat eine Masse von $1\,\text{kg}$. Die Dichte des Materials beträgt $2{,}5\,\text{kg/dm}^3$.
Berechne die Dicke der Fliese.

4.8

Aus einem drehzylindrischen Rohr mit einem Durchmesser von $10\,\text{cm}$ schießt Wasser mit einer Geschwindigkeit von $3\,\text{m/s}$ heraus.
Berechne die Wassermenge, die in 10 Minuten aus dem Rohr schießt. Gib das Ergebnis in hl an.

4.9



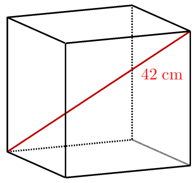
Ein drehzylindrisches Messglas hat einen Außendurchmesser von $20\,\text{mm}$ und eine Wanddicke von $1\,\text{mm}$.
Der Boden ist $2\,\text{mm}$ dick.
Die Markierungsstriche sind pro ml angebracht.

a) Berechne den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Markierungsstrichen.

b) Berechne die Höhe des Messglases, wenn oberhalb des letzten Markierungsstrichs (bei $20\,\text{ml}$) noch $12\,\text{mm}$ frei bleiben sollen.

4.10

Berechne die Oberfläche eines Würfels mit Raumdiagonale 42 cm.



4.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Volumen von 2500 Barrel (bbl) ausgelaufenen Erdöls bedeckt eine Meeresoberfläche von $4250\,\text{km}^2$.
1 bbl Erdöl entspricht ungefähr 159 Liter. Es wird modellhaft angenommen, dass sich das Öl kreisförmig ausbreitet und die Dicke der Schicht konstant ist. Die Krümmung der Erdoberfläche ist zu vernachlässigen.

1) Berechnen Sie die Dicke des Ölteppichs.

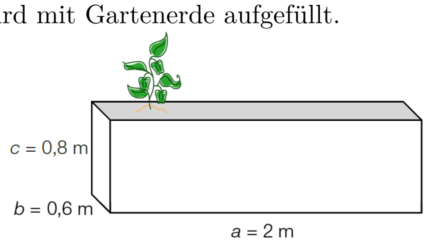
2) Ermitteln Sie das Ergebnis in Nanometern (nm).

4.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Gärtner möchte ein Hochbeet bauen. Dieses wird bis zu einer Höhe von 40 cm mit Zweigen und Laub gefüllt. Darauf kommt eine 20 cm hohe Schicht aus Gras und Kompost. Der Rest wird mit Gartenerde aufgefüllt.

a) Der Gärtner legt das Beet in Form eines Quaders mit den Maßen laut der nachstehenden Skizze an.



1) Berechnen Sie die Menge an Gartenerde in Litern, die benötigt wird, um das quaderförmige Beet bis zum Rand aufzufüllen.

b) Der Gärtner überlegt, als Beet entweder einen Würfel oder einen gleich hohen aufrecht stehenden Drehzylinder zu verwenden. Die Bepflanzungsfläche und die Höhe der Schichten sollen bei beiden gleich groß sein.

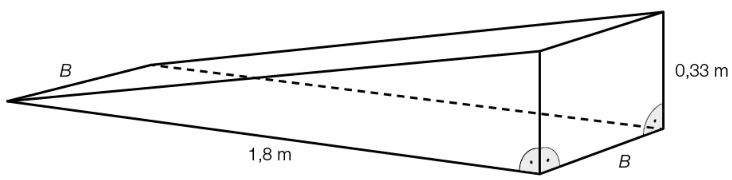
1) Argumentieren Sie, warum der Verbrauch an Gartenerde beim zylinderförmigen Beet genau derselbe wie beim würfelförmigen ist.

2) Erstellen Sie eine Formel, mit der der Radius r des Drehzylinders aus der Kantenlänge a des Würfels berechnet werden kann.

4.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Vor einem Eingang wird eine Rampe gebaut. Diese Rampe (siehe nachstehende Abbildung) wird aus Beton gefertigt und hat die Masse m_R in Kilogramm.
Die Dichte des verwendeten Betons beträgt $\rho_{\text{Beton}} = 2400\,\text{kg/m}^3$.
Die Masse m ist das Produkt aus Volumen V und Dichte ρ, also $m = V \cdot \rho$.

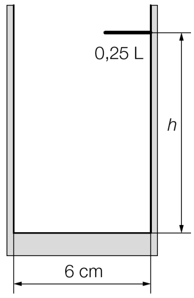


Stellen Sie aus m_R eine Formel zur Berechnung der Breite B dieser Rampe in Metern auf.

$B =$ ______________________

4.14

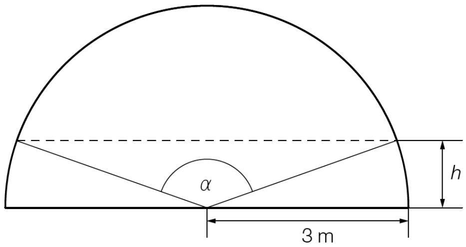
Ein Trinkglas ist innen zylindrisch und hat einen Innendurchmesser von 6 cm.

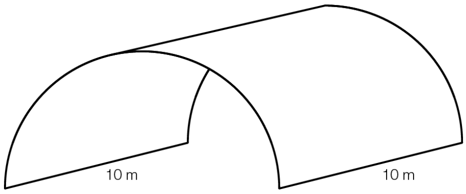


1) Berechnen Sie, in welcher Höhe h die Markierung für 0,25 L Füllvolumen angebracht werden muss.

4.15

Der Querschnitt einer Unterführung hat die Form eines Halbkreises.
Die Unterführung hat eine Länge von 10 m.





1) Berechnen Sie das Luftvolumen unter der Unterführung.

0,04 % des Volumens der Luft sind Kohlenstoffdioxid. Die Dichte von Kohlenstoffdioxid beträgt 1,98 kg/m^3.
Die Masse ist das Produkt aus der Dichte und dem Volumen.

2) Berechnen Sie die Masse des Kohlenstoffdioxids in der Unterführung in Gramm.

4.16

Der Eiffelturm ist ein Wahrzeichen der Stadt Paris.

Die Metallkonstruktion des Eiffelturms hat eine Masse von 7300 Tonnen, das sind $7{,}3 \cdot 10^{\square}$ Kilogramm.

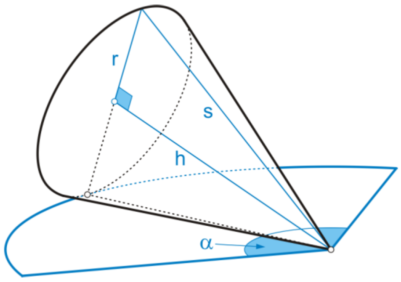
1) Tragen Sie den fehlenden Exponenten in das obige Kästchen ein.

Die Masse m ist das Produkt aus Dichte ρ und Volumen V, also $m = \rho \cdot V$.
Das Metall des Eiffelturms hat eine Dichte von 7800 kg/m^3.
Die Grundfläche des Eiffelturms ist quadratisch und hat eine Seitenlänge von 125 m.
Stellen Sie sich vor, die Metallkonstruktion des Eiffelturms würde eingeschmolzen und zu einem Quader mit der gleichen Grundfläche gegossen.

2) Berechnen Sie die Höhe dieses Quaders in Zentimetern.

4.17 MmF

Wenn man einen Drehkegelmantel entlang einer Mantellinie aufschneidet, kann man ihn verzerrungsfrei in einer Ebene ausbreiten. Der entstehende Kreissektor hat den Radius s und den Öffnungswinkel α:



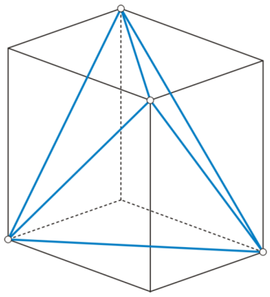
a) Zeige, dass α mit der folgenden Formel berechnet werden kann:

$$\alpha = 360° \cdot \frac{r}{s}$$

b) Beschreibe jene Drehkegelmäntel, für die $\alpha = 180°$ ist, und gib das Verhältnis $r : h : s$ an.

c) Berechne α, wenn der Achsenschnitt des Drehkegels ein rechtwinkeliges Dreieck ist.

4.18 MmF

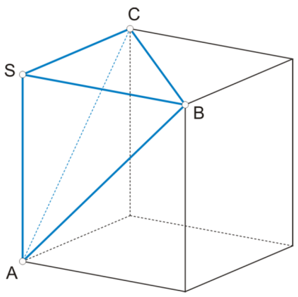


Der blaue Körper ist aus einem Quader herausgeschnitten.

Der blaue Körper hat das Volumen V, der Quader das Volumen V_Q.

Ermittle das Verhältnis $V : V_Q$.

4.19 MmF

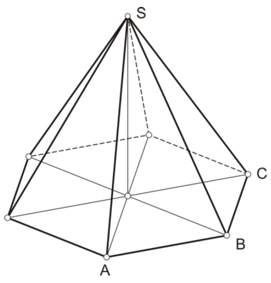


Die blaue Pyramide $ABCS$ ist ein Teil eines Würfels mit der Kantenlänge a.

Berechne den Abstand der Spitze S von der Basisfläche ABC, also die Höhe der Pyramide $ABCS$.

Hinweis: Berechne das Volumen der Pyramide auf 2 Arten.

4.20 MmF



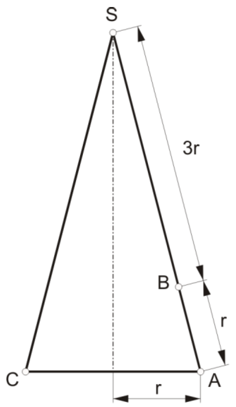
Ein regelmäßiges Sechseck ist die Basis einer geraden Pyramide.

Die Basiskanten sind 2 dm lang, die Höhe beträgt 4 dm.

Ein Insekt krabbelt auf dem Pyramidenmantel auf dem kürzesten Weg von A nach C.

– Berechne die Länge des Krabbelwegs.

4.21



Bei dem dargestellten Drehkegel verhält sich der Basisdurchmesser zur Mantellinienlänge wie 1 : 2.

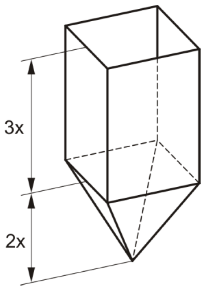
Ein Insekt möchte auf dem kürzesten Weg von A nach B krabbeln, aber einmal um den Kegelmantel herum.

a) Berechne diese kürzeste Weglänge in Abhängigkeit von r.

Das Insekt überschreitet auf seinem Krabbelweg von A nach B die Mantellinie durch C in einem Punkt P.

b) Ermittle das Verhältnis der Weglängen von A bis P und von P bis B.

4.22

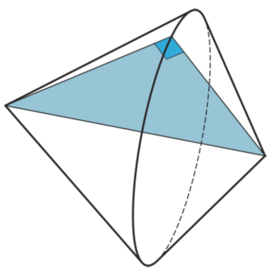


Ein Behälter besteht aus den Mänteln einer geraden quadratischen Pyramide und eines geraden Prismas.

a) Ermittle das Verhältnis des Prismenvolumens zum Gesamtvolumen.

b) Das obere Quadrat hat eine Seitenlänge von 50 cm.
Der Behälter hat $\frac{1}{4}$ m^3 Rauminhalt.
Berechne seine Gesamthöhe und seine Mantelfläche.

4.23



Ein rechtwinkeliges Dreieck rotiert um seine Hypotenuse und erzeugt so einen Drehkörper. Die Katheten des Dreiecks haben die Längen 15 cm und 20 cm.

a) Berechne das Volumen und die Oberfläche dieses Drehkörpers.

b) Der Drehkörper besteht aus Holz mit der Dichte 530 kg/m^3.
Berechne seine Masse in Kilogramm.

4.24

Richtig oder falsch? Begründe deine Antwort.

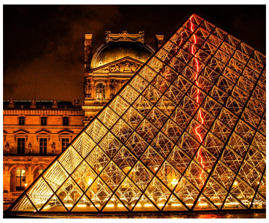
	richtig	falsch
Wenn man den Radius eines Drehzylinders verdoppelt und die Höhe halbiert, so bleibt das Volumen gleich.	☐	☐
Wenn man einen Drehzylinder mit Radius r mit einem koaxialen Drehzylinder mit Radius $\frac{r}{2}$ durchbohrt, so ist das Restvolumen mehr als die Hälfte des ursprünglichen Volumens.	☐	☐
Wenn man den Radius eines Drehkegels um 25 % erhöht und die Höhe um 36 % verringert, so bleibt das Volumen gleich.	☐	☐
Wenn man ein rechtwinkeliges Dreieck um die kürzere Kathete rotieren lässt, so ist das Volumen des entstehenden Drehkegels größer als das Volumen des Drehkegels, der durch Rotation um die längere Kathete entsteht.	☐	☐

4.25

Das Volumen eines Drehkegels ist gleich groß wie das Volumen eines Drehzylinders.
Der Drehkegel ist um 2 dm höher als der Drehzylinder.
Der Radius des Drehkegels ist um 13 % größer als der Radius des Drehzylinders.
Berechne die Höhen der beiden Körper.

4.26

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

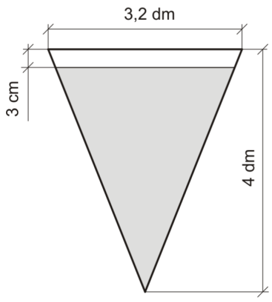


Die Glaspyramide des Louvre ist eine quadratische Pyramide mit einer Basislänge von 35,42 Metern (m) und einer Höhe von 21,65 m.

1) Berechnen Sie den Mantel M der Pyramide.
Geben Sie das Ergebnis auf 2 Dezimalstellen gerundet in Quadratmetern (m^2) an.

2) Argumentieren Sie anhand der Formel, wie sich das Volumen verändert, wenn die Basislänge der Pyramide verdoppelt wird.

4.27

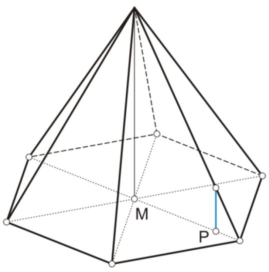


Gegeben ist ein drehkegelförmiger Trichter aus Blech.

a) Der Trichter wird bis 3 cm unter dem Rand mit Wasser gefüllt.
Berechne das Volumen des Wassers. (Ergebnis in dl)

b) Der Trichter wird bis zu 80 % der gesamten Höhe mit Wasser gefüllt.
Wieviel Prozent des gesamten Trichtervolumens macht das aus?

4.28



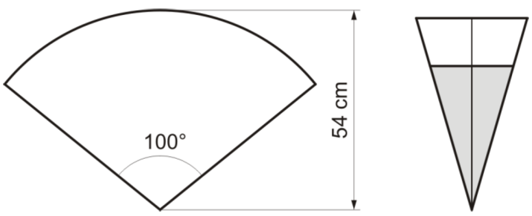
Ein Zelt hat die Form einer geraden Pyramide, deren Basis ein regelmäßiges Sechseck mit einer Basiskantenlänge von 4 m ist. Die Mantelfläche der Pyramide beträgt 103,2 m^2.

a) Berechne die Höhe des Zelts.

b) An der Stelle P kann eine 1,80 m große Person gerade noch aufrecht stehen.
Berechne den Abstand von P zu M.

4.29

Aus dem dargestellten Kreissektor wird ein drehkegelförmiger Trichter hergestellt.



a) Untersuche, ob man 12 Liter Wasser in diesen Trichter füllen kann.

b) Der Trichter wird bis zu $\frac{3}{4}$ seiner Höhe befüllt.
Untersuche, ob das mehr als die Hälfte des gesamten Trichtervolumens ist.

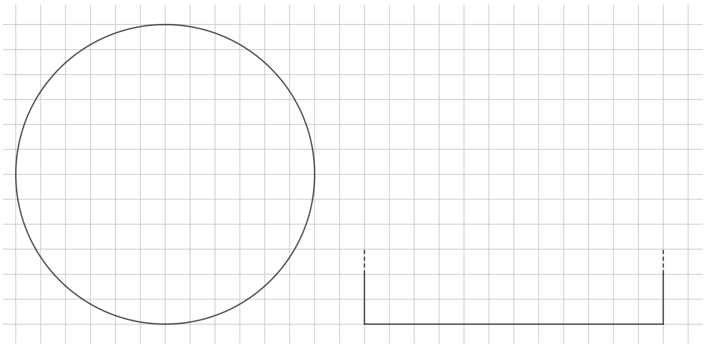
4.30

Eine Kugel und ein Drehzylinder haben den gleichen Radius r und das gleiche Volumen V.

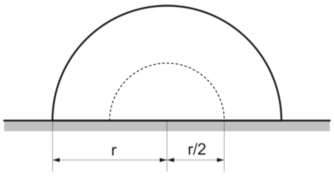
a) Begründe, warum die Höhe h des Drehzylinders kleiner als $2 \cdot r$ sein muss.

b) Berechne, um wieviel Prozent h größer als r ist.

c) Der Querschnitt einer Kugel ist unten dargestellt. Vervollständige den Querschnitt des Drehzylinders so, dass die Kugel und der Drehzylinder das gleiche Volumen haben.



4.31



Eine Halbkugel aus Glas (Dichte $2\,\mathrm{kg/dm^3}$) ist $70\,\mathrm{dag}$ schwer.
Sie wird mit einer halb so großen Kugel ausgebohrt (siehe Skizze).

– Wieviel Prozent der ursprünglichen Masse bleiben übrig?

4.32

Eine Kugel aus Buchenholz und eine Kugel aus Stahl sind gleich schwer.
Die Dichte des Holzes beträgt $0{,}7\,\mathrm{kg/dm^3}$, die Dichte des Metalls beträgt $7{,}9\,\mathrm{kg/dm^3}$.
Setze die richtige ganze Zahl in die Lücke ein:
Die Äquatorlänge der Holzkugel verhält sich zur Äquatorlänge der Metallkugel ungefähr wie $9 : \boxed{}$.

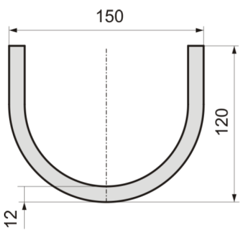
4.33

Der Planet Mars ist annähernd kugelförmig und hat eine Oberfläche von rund $144{,}8 \cdot 10^6\,\mathrm{km}^2$.

a) Für ein Planetarium soll ein Marsmodell im Maßstab $1 : 1\,250\,000$ hergestellt werden. Berechne die Oberfläche und den Durchmesser des Modells.

b) Die Marsoberfläche beträgt rund $28{,}4\,\%$ der Erdoberfläche. Wieviel Prozent des Erdäquators beträgt der Marsäquator? Wieviel Prozent des Erdvolumens beträgt das Marsvolumen?

4.34



Ein Wasserbehälter aus Beton hat die Form eines Drehkörpers. Sein Achsenschnitt wird von Strecken und zwei konzentrischen Halbkreisen begrenzt (Maße in cm).

a) Berechne die Masse des Behälters. (Dichte von Beton: $2300\,\mathrm{kg/m^3}$)

b) In den Behälter werden $8\,\mathrm{hl}$ Wasser gefüllt.
Berechne den Abstand der Wasseroberfläche zum Rand des Behälters.

4.1 Es werden 62,08... m^3 benötigt. Der Asphalt kann also ausreichen.

4.2 755 975,16 €

4.3 Verkürzung um 36 %

4.4 $\sqrt{2} : 1$

4.5 **a)** $x = 41{,}2\ldots$ cm **b)** 1,75

4.6 Nein, kürzer. ($\sqrt{45} < \sqrt{52}$)

4.7 **a)** 282,8... cm^2 **b)** 1,41... cm

4.8 141,37... hl

4.9 **a)** 3,92... mm **b)** 92,5... mm

4.10 3528 cm^2

4.11 $h \approx 9{,}35 \cdot 10^{-8}\text{m} = 93{,}5\,\text{nm}$

4.12 **a)** Man benötigt 240 Liter Gartenerde.

b) **1)** Die Bepflanzungsfläche (Grundfläche) und die Höhe ist bei beiden Körpern gleich, daher auch das Volumen $V = G \cdot h$.

2) $r = \sqrt{\frac{a^2}{\pi}} = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$

4.13 $B = 0{,}001\,402\ldots \cdot m_R$

4.14 8,84... cm

4.15 **1)** 141,3... m^3 **2)** 111,9... g

4.16 $7{,}3 \cdot 10^6$ Kilogramm 5,98... cm

4.17 **a)** Die Formel ergibt sich aus der zweifachen Berechnung des Umfangs u des Basiskreises: $u = 2r\pi$ bzw. $u = \frac{s\pi\alpha}{180}$

b) s muss gleich groß sein wie der Durchmesser der Grundfläche. $1 : \sqrt{3} : 2$

c) $\alpha = 254{,}5\ldots^\circ$

4.18 $V : V_Q = 1 : 3$

4.19 $h = \frac{a}{\sqrt{3}}$

4.20 3,89... dm (Hinweis: Der kürzeste Weg von A nach C besteht aus zwei Strecken der Länge x, die an der Knickstelle auf SB einen rechten Winkel mit SB einschließen.)

4.21 Weglänge $5 \cdot r$ (Hinweis: Berechne den Zentriwinkel des abgerollten Mantels.)
4 : 3 (Hinweis: Kathetensatz)

4.22 **a)** 9 : 11 **b)** Gesamthöhe: 136,36... cm, Mantelfläche: 2,23... m^2

4.23 **a)** $V = 3769{,}9\ldots\,cm^3$, $O = 1319{,}4\ldots\,cm^2$

b) 1,99... kg

4.24 **a)** falsch ($V_{\text{neu}} = 2 \cdot V$)

b) richtig (Das Restvolumen ist 75 % des ursprünglichen Volumens.)

c) richtig ($1{,}25^2 \cdot 0{,}64 = 1$)

d) richtig (Wenn $a > b$, dann ist auch $\dfrac{a^2 \cdot b \cdot \pi}{3} > \dfrac{a \cdot b^2 \cdot \pi}{3}$)

4.25 $h_K = 3{,}48\ldots$ dm $h_Z = 1{,}48\ldots$ dm

4.26 $M \approx 1981{,}45\,m^2$, $V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h \implies V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot a)^2 \cdot h = 4 \cdot V \implies$ Das Volumen vervierfacht sich.

4.27 **a)** 84,86... dl **b)** 51,2 %

4.28 **a)** $h = 7{,}87\ldots$ m **b)** 3,085... m

4.29 **a)** Ja, es passen 12,22... L in den Trichter. **b)** Es ist weniger als die Hälfte des Volumens. (5,15... L)

4.30 **a)** Wenn die Höhe nicht kleiner als der Durchmesser ist, könnte man die Kugel ganz im Drehkegel unterbringen. Dann können sie aber nicht das gleiche Volumen haben.

b) $h = \frac{4}{3} \cdot r = 1{,}333\ldots r$, also ist die Höhe um 33,3... % größer als der Radius.

c) Der Querschnitt des Drehzylinders muss 8 Kästchen hoch sein.

4.31 87,5 %

4.32 9 : 4 (Das Verhältnis ist 9 : 4,012....)

4.33 **a)** Oberfläche: 92,7... m^2, Durchmesser: 5,43... m **b)** Äquator: 53,2... %, Volumen 15,1... %

4.34 **a)** $m = 1366{,}1\ldots$ kg **b)** 22,8... cm