AUFGABENSAMMLUNG – GRAVITATIONSGESETZ

Inhaltsverzeichnis

Wie darf ich die Aufgaben verwenden? MmF

Datum: 5. Februar 2025

Einleitung

Eine der weitreichendsten Verallgemeinerungen, die der Menschenverstand je getroffen hat, ist das Gravitationsgesetz: Jeder Gegenstand zieht jeden anderen Gegenstand an! Diese Entdeckung wurde von einem der größten Physiker gemacht, die jemals gelebt haben: Isaac Newton. Diese Arbeitsblätter sollen die Erkenntnisse zum Thema Gravitationsgesetz und Gravitationsfeld vertieften. Detaillierte Lösungen aller Aufgaben findest du im hinteren Teil dieses Dokuments.

Abbildung 1. Isaac Newton ist einer der größten Physiker aller Zeiten. Die Geschichte mit dem Apfel hat sich wahrscheinlich nicht so zugetragen, ist aber gut erfunden. [1]

1. GRAVITATIONSGESETZ & GRAVITATIONSFELD

Aufgabe 1.1. Schätze die Masse der Sonne ab. Verwende dazu die Gleichungen für das Gravitationsgesetz

$$F_G = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

und für die Zentripetalkraft

$$F_{ZP} = \frac{m \cdot v^2}{r}.$$

Der Abstand von Erde zu Sonne beträgt 150 Millionen km. Die Gravitationskonstante G hat den Wert $6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$

Aufgabe 1.2.

a) Man sagt ja, dass die Erdbeschleunigung den Wert $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$ hat. Das gilt aber nur für mittlere Breiten. Außerdem gibt es winzige Schwankungen, die von der Verteilung der Massen und von ihrer Dichte abhängt. Die feinen Abweichungen lassen sich mit Präzisionsinstrumenten messen (siehe Abbildung 2).

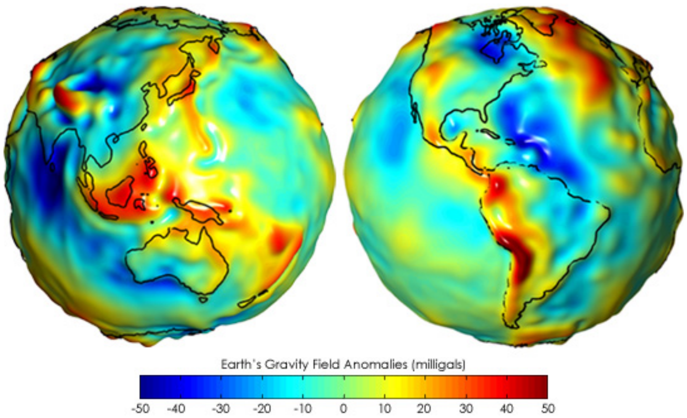

ABBILDUNG 2. Abweichung zwischen dem theoretischen und dem tatsächlichen Wert von g, gemessen von den Doppelsatelliten Gravity Recovery And Climate Experiment (GRACE). In roten Bereichen ist der gemessene Wert höher, in blauen tiefer als vorhergesagt. Ein Milligal (mGal) entspricht $0{,}01\,\mathrm{mm/s^2}$. [2]

Die Fallbeschleunigung am Pol und am Äquator kann man aber ziemlich gut auf einfachem Weg abschätzen. Dazu muss man nur die Gewichtskraft $F_G = m \cdot g$ mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz gleichsetzen. Berücksichtige einerseits, dass der Erdradius in Richtung der Pole 6356,78 km beträgt und in Richtung Äquator 6378,16 km, und andererseits die Zentrifugalkraft am Äquator. Nimm für die Masse der Erde den genaueren Wert $5{,}974 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ und für die Gravitationskonstante $6{,}674\,28 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$. Vergleiche die abgeschätzten Werte mit den Werten in Tabelle 1. Wie groß ist die Abweichung in Prozent?

Ort	g
Graz	$9{,}8070\,\mathrm{m/s^2}$
Wien	$9{,}8086\,\mathrm{m/s^2}$
Pol	$9{,}832\,\mathrm{m/s^2}$
Äquator	$9{,}780\,\mathrm{m/s^2}$

TABELLE 1. Gemessene Erdbeschleunigung an verschiedenen Punkten der Erde

b) Wie kann man die geringere Fallbeschleunigung am Äquator einer außenstehenden, nichtrotierenden Beobachterin erklären? Für diese gibt es ja keine Zentrifugalkraft.

Aufgabe 1.3. Nimm an, du hast eine sehr große und genaue Waage und wiegst einen Reiter und ein Pferd ab. Der Reiter steht dabei neben dem Pferd. Wenn sich dieser dann auf das Pferd setzt, wiegen beide zusammen etwas weniger. Warum ist das so? Schätze ab, wie viel das Gewicht absolut und relativ sinkt. Nimm den Radius der Erde mit $6{,}37 \cdot 10^6$ m an, die Masse mit $6 \cdot 10^{24}$ kg und das Gewicht des Reiters mit 80 kg. Die Gravitationskonstante G hat den Wert $6{,}674\,28 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.

Aufgabe 1.4. Berechne die Gravitationskonstante G. Gehe dazu von der Erdbahn aus und verwende Gravitationskraft und Zentripetalkraft (siehe Aufgabe 1.1). Damit der Wert von G genauer wird, nimm folgende Daten: Sonnenmasse $1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg, Abstand Sonne – Erde $1{,}496 \cdot 10^{11}$ m und Dauer eines Jahres 365,25 Tage.

Aufgabe 1.5. Mit welcher Mindestgeschwindigkeit tritt ein aus dem Weltall kommender Brocken in 250 km Höhe in die Erdatmosphäre ein (Abbildung 3)? Überlege zuerst mit Hausverstand, welcher Mindestwert in etwa herauskommen muss. Der Radius der Erde beträgt $6{,}37 \cdot 10^6$ m und ihre Masse $6 \cdot 10^{24}$ kg. Die Formel für die potenzielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse lautet $E_p = G \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Die Gravitationskonstante G hat den Wert $6{,}674\,28 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.

ABBILDUNG 3. Ein Meteorit rast auf die Erde zu. Mit welchem Tempo trifft er auf die Erdatmosphäre? [3]

Aufgabe 1.6. Zeige rechnerisch, dass für Kreisbahnen aus dem Gravitationsgesetz (siehe Aufgabe 1.1) direkt das 3. Keplersche Gesetz folgt:

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}$$

Du benötigst dazu die Formel für die Zentripetalkraft. Verwende dafür nicht die Gleichung aus Aufgabe 1.1, sondern die Formel $F_{zp} = m \cdot \omega^2 \cdot r$.

Aufgabe 1.7.

a) Wie dick müsste ein Stahlseil sein, damit es an Stelle der Sonne die Erde auf ihrer Kreisbahn halten kann? Gib vor deiner Abschätzung einen Tipp ab, wie dick das Stahlseil sein müsste. Rechne auf zwei Arten: einmal mit Hilfe des Gravitationsgesetzes und einmal mit Hilfe der Zentripetalkraft. Benötigte Daten: Masse der Erde $6 \cdot 10^{24}$ kg, Masse der Sonne $2 \cdot 10^{30}$ kg, Abstand von Erde zu Sonne $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, Zugfestigkeit eines Stahlseils $200\,\mathrm{N/mm^2}$. Die Gravitationskonstante G hat den Wert $6{,}674\,28 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$.

b) Welche Masse müsste das Seil haben? Nimm die Dichte von Stahl rund 8 Mal so groß wie die von Wasser an.

Aufgabe 1.8. Wie groß ist die Fallbeschleunigung am Mond relativ zur Erdbeschleunigung? Leite dazu aus dem Gravitationsgesetz und der allgemeinen Formel für das Gewicht eine Formel ab, mit der du g allgemein berechnen kannst. Nimm dann nicht die absoluten Werte, sondern rechne mit Proportionen. Nimm dazu an, dass der Mond rund 1/81 der Erdmasse hat und sein Radius 1/3,67 des Erdradius entspricht.

Aufgabe 1.9. Im Jahr 2320 ist der Mond bereits dicht besiedelt. Was muss man beim Anlegen von Autobahnen auf dem Mond beachten? Denke dabei vor allem an die Kurven und nimm an, dass auch auf Mondautobahnen die erlaubte Höchstgeschwindigkeit 130 km/h beträgt! Du brauchst für deine Überlegungen die Formel für die Reibungskraft ($F_r = \mu \cdot m \cdot g$) und die Zentripetalkraft (siehe Aufgabe 1.1).

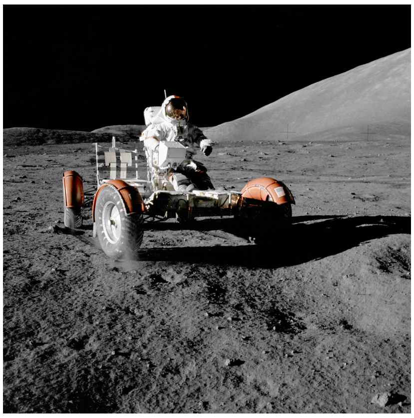

Abbildung 4. Solche Elektroautos wurden bei den Mondmissionen 1971 und 1972 von der NASA verwendet. Die Maximalgeschwindigkeit lag bei nur 13 km/h. [4]

Aufgabe 1.10. Welche Wurfweiten würdest du im Vergleich mit der Erde erwarten, wenn du am Mond einen Ball wirfst? Hilf dir bei deinen Überlegungen mit dem Unabhängigkeitsprinzip von Galilei. Nach diesem kann man vertikale und horizontale Geschwindigkeit unabhängig voneinander betrachten. Oder anders gesagt: Die horizontale Geschwindigkeit beeinflusst nicht die Fallbewegung.

Aufgabe 1.11. Wie viel würdest du im Vergleich zur Erdoberfläche in einer Höhle wiegen, die sich genau zwischen Erdoberfläche und Erdmittelpunkt befindet? Wie viel würdest du genau im Erdmittelpunkt wiegen? Nimm dazu vereinfacht an, dass die Dichte der Erde homogen ist. Natürlich ist dieses Beispiel sehr hypothetisch, weil der äußere Erdkern flüssig ist und es im Inneren bis zu 5000 °C hat. Aber es geht ums Prinzip.

Aufgabe 1.12. Das Kugelschalentheorem von Newton besagt, dass man innerhalb einer Hohlkugel schwerelos ist, und zwar nicht nur genau im Mittelpunkt, sondern an jeder beliebigen Stelle. Leite daraus mit Hilfe von Proportionen ab, wie die Schwerkraft im Inneren der Erde bis zum Mittelpunkt absinkt. Nimm wie in Aufgabe 1.11 vereinfacht an, dass die Dichte der Erde homogen ist. Bedenke, dass die äußere Kugelschale keinen Einfluss mehr auf das Gewicht hat (Kugelschalentheorem). Du brauchst für deine Überlegungen die Formeln für die Dichte ($\varrho = M/V$) und für das Volumen einer Kugel ($V = 4 \cdot r^3 \cdot \pi/3$).

2. Satelliten

Aufgabe 2.1. Sehr oft hört oder liest man, dass im Orbit – etwa auf der ISS (Abbildung 5) – deshalb Schwerelosigkeit herrscht, weil es dort keine Gravitation mehr gibt. Stimmt das? Erstelle dazu ein Diagramm, das zeigt, wie die Erdbeschleunigung g mit der Höhe absinkt. Setze dazu die allgemeine Gewichtsformel mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz gleich und löse nach g auf (siehe Aufgabe 1.2). Welchen Schluss kannst du aus dem Diagramm ziehen?

Aufgabe 2.2. In Abbildung 6 siehst du, dass die Höhe der ISS über dem Boden ziemlich stark schwankt. Wie kann man diese Höhenschwankungen erklären? Beziehe in deine Überlegungen Abbildung 7 mit ein.

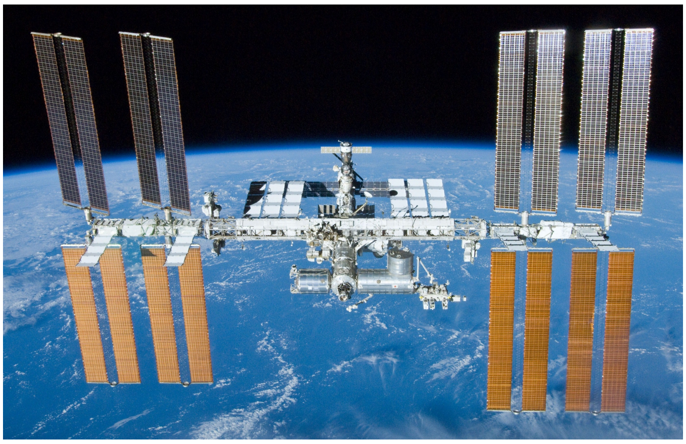

Abbildung 5. Die Internationale Raumstation (International Space Station oder kurz ISS). Die Raumstation befindet sich in einer Höhe von etwa 320 bis 440 km über der Erdoberfläche. [5]

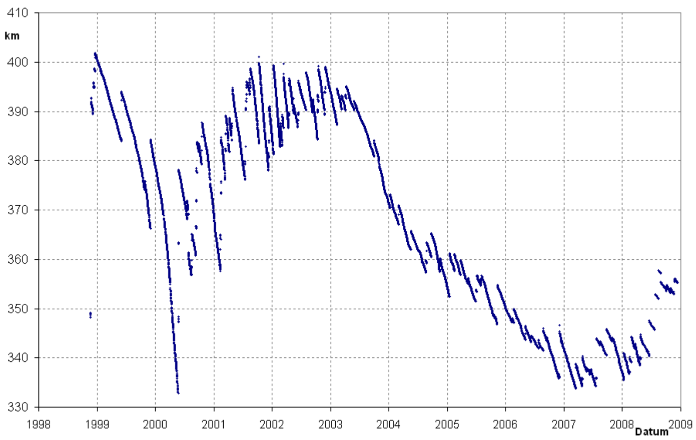

Abbildung 6. Die Höhe der ISS über dem Erdboden in den Jahren 1999 bis 2009.

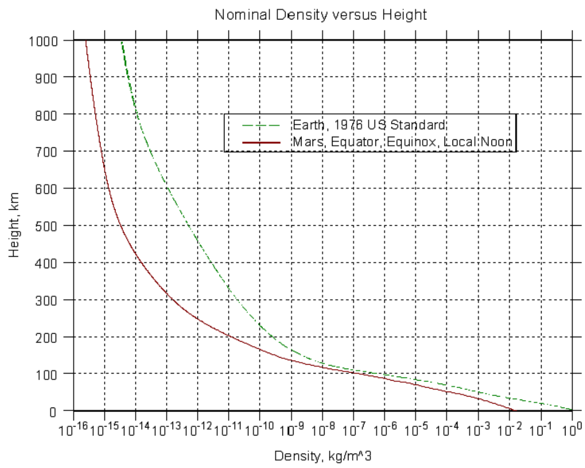

Abbildung 7. Luftdichte und Höhe über dem Boden auf Erde und Mars.

Aufgabe 2.3.

a) Ein Satellit wie die ISS wird durch die Luftreibung nicht langsamer, sondern sogar schneller. Das ist doch paradox! Kannst du das begründen? Du musst dazu eine Formel ableiten, die den Zusammenhang zwischen Bahngeschwindigkeit und Abstand zum Erdmittelpunkt beschreibt.

b) Schätze grob ab, um wie viele Meter die ISS pro Umdrehung um die Erde bzw. pro Tag absinkt, wenn sie sich in einer Höhe von 400 km befindet und wie viel Geschwindigkeit sie dabei gewinnt. Verwende für deine Abschätzung Abbildung 6 und nimm an, dass das Absinken linear erfolgt. Verwende deine Gleichung aus Teil **a)**.

Aufgabe 2.4. Der Mond beschreibt näherungsweise eine Kreisbahn um die Erde, die wiederum eine Kreisbahn um die Sonne beschreibt. Welche Bahn beschreibt daher der Mond um die Sonne (siehe Abbildung 8)?

a) Die Krümmung der Bahn zeigt abwechselnd zur Sonne hin und von der Sonne weg.

b) Der Mond beschreibt eine Art Spiralbahn.

c) Die Mondbahn entspricht einem Vieleck.

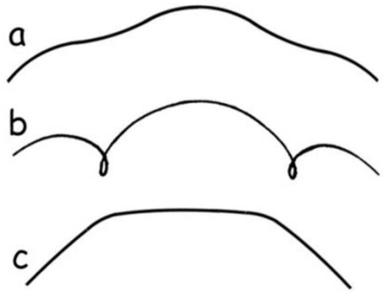

Abbildung 8. Welche der hier schematisch dargestellten Mondbahnen beschreibt die tatsächliche am ehesten?

Aufgabe 2.5.

a) Berechne die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne und des Mondes um die Erde. Welche Möglichkeit der Mondbahn in Abbildung 8 scheidet dadurch aus? Die Daten für deine Berechnung findest du in Teil **c)**.

b) Streng genommen ist die Formulierung „der Mond bewegt sich um die Erde“ falsch. Warum?

c) Welche Beschleunigung übt die Erde auf den Mond aus? Welche Beschleunigung übt die Sonne auf den Mond aus? Was wird größer sein? Gib vor der Berechnung einen Tipp ab. Welche der Bahnen in Abbildung 8 scheidet auf Grund deiner Ergebnisse nun aus? Für deine Berechnung brauchst du das Newton'sche Gravitationsgesetz und folgende Daten: Masse der Sonne $2 \cdot 10^{30}$ kg, Masse der Erde $6 \cdot 10^{24}$ kg, durchschnittliche Entfernung Sonne – Erde $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m, durchschnittliche Entfernung Erde – Mond $3{,}8 \cdot 10^{8}$ m, Zeit für einen vollen Umlauf des Mondes um die Erde 27,3 Tage.

Aufgabe 2.6. Die Kraft der Sonne auf den Mond ist stets größer als die Kraft der Erde auf den Mond (Aufgabe 2.5**c)**). Warum zieht also die Sonne den Mond nicht zu sich?

3. Gezeitenkräfte

Aufgabe 3.1. Der Komet Shoemaker-Levy 9 passierte im Juli 1992 den Planeten Jupiter und zerbrach dabei in 21 Fragmente zwischen 50 und 1000 m Größe, die sich auf einer mehrere Millionen Kilometer langen Kette aufreihten. Zwischen dem 16. und dem 22. Juli 1994 schlugen diese Bruchstücke dann auf Jupiter auf. Wieso zerbröckelte der Komet beim ersten Vorbeiflug am Jupiter?

Abbildung 9. Der zerbröselte Komet Shoemaker-Levy 9 [8]

Aufgabe 3.2. Versuche eine allgemeine Formel für die Gezeitenbeschleunigung abzuleiten. Gehe dazu vom Gravitationsgesetz aus. Bedenke, dass die Teile eines Objekts, die sich näher bei der Zentralmasse befinden, auch stärker

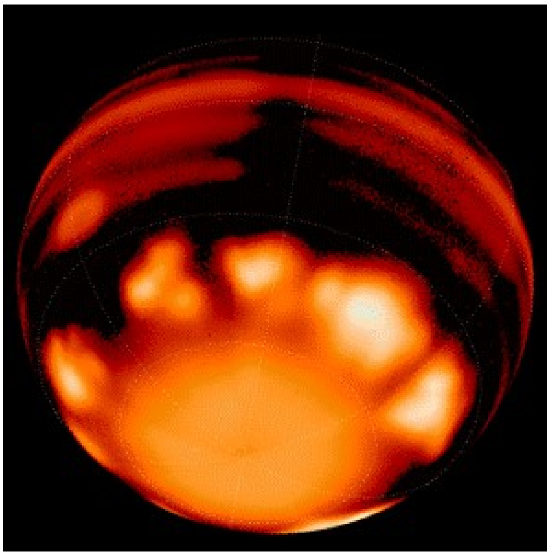

Abbildung 10. Die Aufschlagstellen der Bruchstücke des Kometen Shoemaker-Levy 9 auf dem Jupiter [9]

angezogen werden. Nimm für die Abstände r und $(r - \Delta r)$, wobei Δr die Größe des Objekts darstellt. Für deine Ableitung brauchst du folgende Reihenentwicklung ($\Delta r << r$):

$$\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} = 1 + 2\cdot \Delta r/r + 3\cdot(\Delta r/r)^2 + \ldots$$

Aufgabe 3.3.

a) Warum sind Monde, Planeten und Sterne fast perfekt rund (wenn man davon absieht, dass sie eventuell rotieren)? Was passiert mit der Oberfläche der Ozeane durch die Gezeitenkraft des Mondes? Wie werden sich diese dadurch einstellen?

b) Berechne die Gezeitenbeschleunigung durch den Mond. Verwende dazu die Gleichung $a_{gez} \approx 2\cdot\Delta r\cdot G\cdot M/r^3$ (siehe Aufgabe 3.2), und vergleiche das Ergebnis mit der Fallbeschleunigung g. Benötigte Daten: Radius der Erde ($6{,}37\cdot 10^6$ m), Masse des Mondes ($7{,}3\cdot 10^{22}$ kg), Abstand Erde – Mond ($3{,}8\cdot 10^8$ m). Überlege vorher gut, welche Daten du für Δr und r einsetzen musst.

c) Schätze ab, um wie viel höher die Ozeane durch die Gezeitenkraft des Mondes stehen. Die Gezeitenbeschleunigung beträgt $10^{-7}\cdot g$ (siehe Teil **b)**). Benötigte Daten: Radius der Erde ($6{,}37\cdot 10^6$ m), Masse des Mondes ($7{,}3\cdot 10^{22}$ kg), Abstand Erde – Mond ($3{,}8\cdot 10^8$ m). Außerdem brauchst du folgende Näherungsformel, die für Zahlen, die viel kleiner sind als 1, gilt: $1/(1-x)\approx 1+x$.

Aufgabe 3.4.

a) Berechne die Gezeitenbeschleunigung durch die Sonne. Gib vorher einen Tipp ab. Begründe das Ergebnis. Benötigte Daten: Masse der Sonne $2\cdot 10^{30}$ kg, Abstand von Erde zu Sonne $1{,}5\cdot 10^{11}$ m, Radius der Erde $6{,}37\cdot 10^6$ m. Überlege den Unterschied zwischen Ebbe und Flut (Tidenhub) am offenen Meer, der durch die Sonne verursacht wird. Der vom Mond verursachte Tidenhub beträgt etwa 64 cm (siehe Aufgabe 3.3**c)**).

b) Erkläre, was mit den Gezeiten bei Spring- und Nippflut passiert. Verwende zur Hilfe Abbildung 11, Aufgabe 3.3**c)** und 3.4**a)**. Schätze den Effekt am offenen Meer ab.

Aufgabe 3.5.

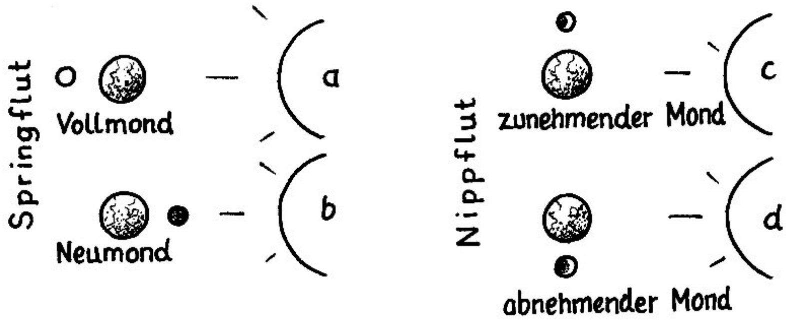

Abbildung 11. Bei Vollmond und Neumond ist die Flut am stärksten (Springflut), bei Halbmond am schwächsten (Nippflut). [10]

a) Wenn am Ozean der Unterschied zwischen Ebbe und Flut selbst bei Springflut (Aufgabe 3.4) nur rund 1 m ausmacht, wie kommt es dann zu den großen Unterschieden zwischen Ebbe und Flut, wie sie in Abbildung 12 eingezeichnet sind?

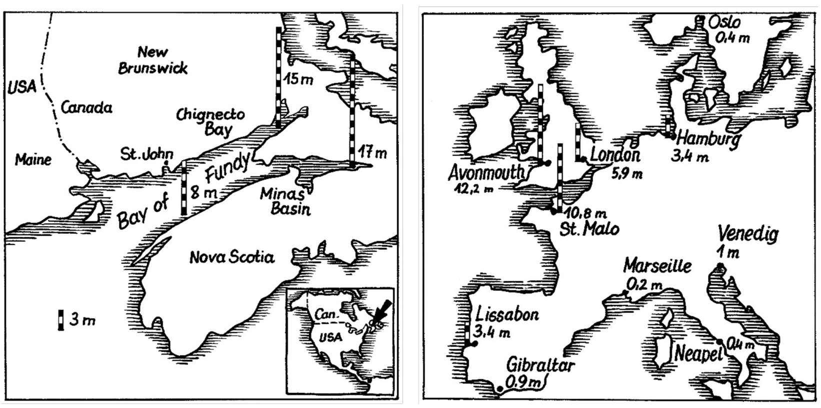

Abbildung 12. Beispiele für maximale Unterschiede zwischen Ebbe und Flut [11]

Aufgabe 3.6. Die Springflut (Aufgabe 3.4), die rund alle 14 Tage auftritt, ist nicht immer gleich groß. Warum kann es dabei zu deutlichen Differenzen kommen?

Aufgabe 3.7. Schätze ab, wie nahe der Mond der Erde kommen müsste, damit er durch die Gezeitenkräfte auseinandergerissen wird. Drücke das Ergebnis in Metern bzw. Erdradien aus. Nimm dazu vereinfacht an, dass der Mond aus zwei Halbkugeln zusammengesetzt ist. Der Schwerpunkt einer Halbkugel liegt bei 3/8 des Radius (Abbildung 13). Wenn die Gezeitenbeschleunigung durch die Erde größer wird als die gegenseitige Gravitationsbeschleunigung der Halbkugeln, würde der Mond in der Mitte auseinanderreißen. Benötigte Daten: Masse des Mondes $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, Radius des Mondes $1{,}74 \cdot 10^{6}$ m, Masse der Erde $6 \cdot 10^{24}$ kg, Radius der Erde $6{,}37 \cdot 10^{6}$ m.

Aufgabe 3.8. Der Film „Independence Day" handelt von einem Angriff Außerirdischer auf die Erde und dessen Abwehr durch die Menschen. Das Mutterschiff der Aliens hat ein Viertel der Größe des Mondes und umkreist die Erde in einem geostationären Orbit (36 000 km über der Erdoberfläche. Schätze die Gezeitenbeschleunigung ab, die ein solches Raumschiff auslösen würde. Was würde das für den Wasserspiegel der Meere bedeuten? Nimm für deine Abschätzung ein kugelförmiges Schiff an und schätze die Dichte größenordnungsmäßig ab. Benötigte Daten: Masse des Mondes $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg, Radius des Mondes $1{,}74 \cdot 10^{6}$ m, Volumen einer Kugel $V = 4 \cdot r^3 \cdot \pi/3$, Gezeitenbeschleunigung

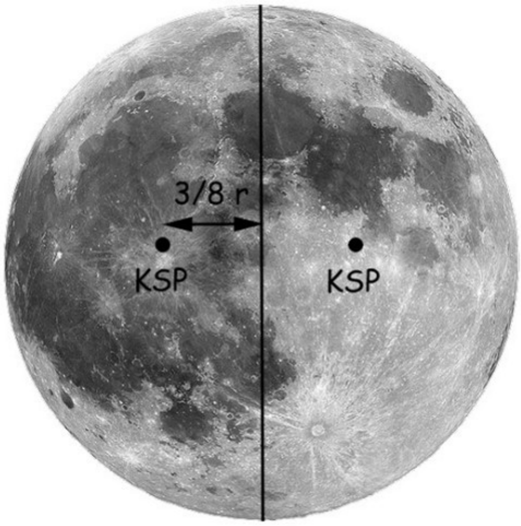

Abbildung 13. Teile für deine Abschätzung den Mond in zwei Hälften. Der Körperschwerpunkt (KSP) einer Halbkugel liegt bei 3/8 des Radius.

$a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot G \cdot M/r^3$ (siehe Aufgabe 3.2) und, um das Ergebnis vergleichen zu können, Gezeitenbeschleunigung und Tidenhub durch den Mond (Lösung zu Aufgabe **3.3b)** und **3.3c)**).

Aufgabe 3.9. Wenn ein Stern mit einer Masse mindestens 8 Sonnenmassen am Ende seines Lebens ausbrennt, dann kann er zu einem Punkt unendlich hoher Dichte zusammenstürzen. Ein Schwarzes Loch wurde geboren! Seine Gravitation ist so gigantisch, dass innerhalb des so genannten Schwarzschildradius nicht einmal das Licht entkommen kann. Deshalb sind Schwarze Löcher schwarz (Abbildung 14). Ihre verheerende Wirkung kommt aber nicht durch die große Masse zu Stande, sondern durch den kleinen Radius. Dadurch kann man sich dem Massenzentrum viel stärker nähern, wodurch Gravitations- und Gezeitenkräfte extrem anwachsen.

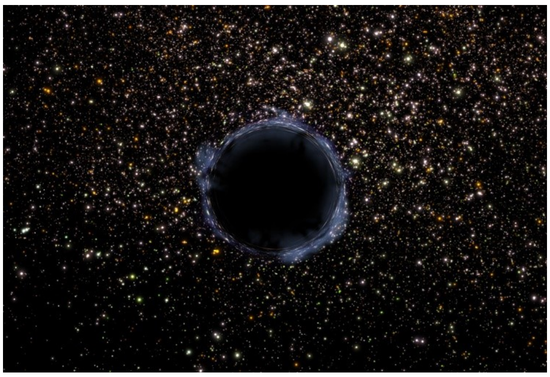

Abbildung 14. Künstlerische Darstellung eines schwarzen Lochs. [12]

a) Berechne zunächst den Schwarzschildradius eines Schwarzen Lochs mit 10 Sonnenmassen bzw. 4,3 Millionen Sonnenmassen. Ersteres kann durch eine Supernova am Ende des Lebens eines massereichen Sterns entstehen, zweiteres wird im Zentrum unserer Milchstraße vermutet. Die Formel für den Schwarzschildradius lautet $R_s = 2 \cdot G \cdot M/c^2$. Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $3 \cdot 10^8$ m/s, die Sonnenmasse $2 \cdot 10^{30}$ kg, $G = 6{,}67 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m^3 kg^{-1} s^{-2}}$.

b) Schätze ab, welche Gezeitenbeschleunigung ein Astronaut etwa aushalten kann, wenn er mit Kopf oder Füßen in Richtung Schwarzes Loch fällt. Natürlich bist du dabei auf eine wirkliche Vermutung angewiesen!

c) Schätze nun die Gezeitenbeschleunigung ab, die auf einen Astronauten wirkt, wenn er mit den Füßen zuerst in dieses Schwarze Loch fällt. Überlege, in welchem Abstand vom Schwarzen Loch die kritischen $10 \cdot g$ (siehe Teil **b)**) erreicht werden. Vergleich dein Ergebnis mit dem Schwarzschildradius.

d) Es wurde schon viel darüber spekuliert, ob man zwei Schwarze Löcher zur Reise durchs All verwenden könnte, wenn sie durch ein so genanntes Wurmloch in Verbindung stünden. Dieses könnte ein Abkürzer durch den Raum sein, weil sich dieser in der Nähe von Schwarzen Löchern unendlich stark krümmt. Damit ein Astronaut unbeschadet durch ein Wurmloch fliegen kann, muss er aber den Schwarzschildradius durchqueren können, ohne auseinander gerissen zu werden. Ist das bei unseren beiden Schwarzen Löchern der Fall?

e) Schätze allgemein ab, wie groß die Masse eines Schwarzen Lochs sein muss, damit man am Schwarzschildradius nicht „spaghettisiert“ wird und durch das Wurmloch fliegen kann. Nimm dazu an, dass die Gezeitenbeschleunigung am Schwarzschildradius maximal $10 \cdot g$ betragen darf und drücke das Ergebnis in Sonnenmassen aus.

4. Hilfestellungen & Lösungen

1.1 Die Erde beschreibt vereinfacht angenommen eine Kreisbahn um die Sonne. In Wirklichkeit ist die Bahn leicht elliptisch. Der Unterschied im Abstand zur Sonne macht aber nur etwa 1 % aus und ist daher zu vernachlässigen. Die Erde braucht 365,25 Tage um die Sonne. Das sind etwa $3{,}16\cdot10^7$ s. Der Abstand zwischen Erde und Sonne beträgt rund 150 Millionen km oder $1{,}5\cdot10^{11}$ m. Die Kreisbahn um die Sonne hat daher eine Länge von $U = 2\cdot r\cdot\pi = 9{,}42\cdot10^{11}$ m. Das Tempo der Erde um die Sonne beträgt daher $v = s/t = 9{,}42 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}/3{,}16 \cdot 10^7\,\mathrm{s} = 3 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$.

Die Zentripetalkraft wird durch die Gravitationskraft hervorgerufen. Man kann daher beide Kräfte gleichsetzen und nach m_{Sonne} auflösen:

$$F_G = G \cdot \frac{m_{Sonne} \cdot m_{Erde}}{r^2} = F_{ZP} = \frac{m_{Erde} \cdot v^2}{r} \Rightarrow m_{Sonne} = \frac{r \cdot v^2}{G} = 2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem in der Literatur angeführten Wert überein.

1.2a) Durch Gleichsetzung der allgemeinen Gewichtsformel mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz erhält man $m \cdot g = G \cdot \frac{M\cdot m}{r^2}$ und somit $g = \frac{G\cdot M}{r^2}$. Am Pol wirkt nur die Schwerkraft. Mit den bekannten Werten ergibt sich für g daher $9{,}867\,\mathrm{m/s^2}$. Am Äquator wirkt aber zusätzlich die Zentrifugalbeschleunigung $a_{zp} = v^2/r = \omega^2 \cdot r$ gegen die Gravitationsbeschleunigung g_{grav}. g ist daher $g_{grav} - a_{zp}$. Die Winkelgeschwindigkeit der Erde beträgt $2\cdot\pi/86\,120\,\mathrm{s}$ $= 7{,}3 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s^{-1}}$ (Anmerkung: Eine volle Umdrehung der Erde entspricht einen Sterntag und ist 4 Minuten kürzer als ein Sonnentag). Für die Zentrifugalbeschleunigung am Äquator ergibt sich daher $0{,}034\,\mathrm{m/s^2}$ und für g somit $9{,}767\,\mathrm{m/s^2}$. Die gemessenen Werte liegen bei $9{,}832\,\mathrm{m/s^2}$ am Pol (Abweichung 3,5 %) und $9{,}780\,\mathrm{m/s^2}$ am Äquator (Abweichung 1,3 %).

1.2b) Aus der Sicht einer nichtrotierenden Beobachterin wirkt auf einen Punkt auf der Erdoberfläche eine Zentripetalbeschleunigung von $0{,}034\,\mathrm{m/s^2}$. Der Boden wird mit diesem Wert von den Füßen weg beschleunigt. Daher muss man ihn von g_{grav} abziehen und kommt zum selben Ergebnis.

1.3 Wenn sich ein:e Reiter:in aufs Pferd setzt, dann ist diese:r etwas weiter vom Erdmittelpunkt entfernt und das Gewicht sinkt daher um einen Tick ab. Weil es nur um die Gewichtsänderung des:der Reiter:in geht, müssen wir bei unserer Abschätzung das Gewicht des Pferdes nicht mit einbeziehen. Nimm an, der:die Reiter:in hat 80 kg. Wenn du in das Gravitationsgesetz einsetzt, erhältst du für das Gewicht auf der Erdoberfläche 789,020 354 N. Nimm nun an, dass der KSP beim Sitzen auf dem Pferd 1,5 m höher liegt. Wenn du nun für den Abstand vom Erdmittelpunkt

$r + 1{,}5\,\mathrm{m}$ annimmst, bekommst du ein Gewicht von $789{,}019\,982\,\mathrm{N}$, also um $3{,}7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N}$ weniger. Die relative Gewichtsveränderung ist daher $\Delta F_G/F_G = 4{,}7 \cdot 10^{-7}$, liegt also in der Größenordnung von einem Zehnmillionstel – zugegeben nicht sehr viel. Aber trotzdem: Der:die Reiter:in wird tatsächlich etwas leichter.

1.4 Die Gravitationskraft wirkt als Zentripetalkraft. Daher kann man beide Kräfte gleichsetzen. Aus $F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ und $F_{zp} = \frac{m \cdot v^2}{r}$ folgt durch Gleichsetzen und Umformen $G = \frac{v^2 \cdot r}{M}$. Die Bahngeschwindigkeit ist $v = \omega \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot r/T$. Wenn du die bekannten Werte einsetzt und die Umlaufzeit T in Sekunden umrechnest, erhältst du $G = 6{,}67 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$, und das ist auch der Wert, der in der Literatur angegeben ist.

1.5 Die Überlegung mit Hausverstand: Wenn man etwas von der Erde ins Weltall schießen will, dann muss man die Fluchtgeschwindigkeit von $11{,}2\,\mathrm{km/s}$ erreichen oder überschreiten. Wenn man genau die Fluchtgeschwindigkeit erwischt, dann kommt das Objekt im Unendlichen zum Stillstand. Wenn wir den Film umgekehrt ablaufen lassen, dann haben wir ein Objekt, das aus dem Unendlichen auf die Erde fällt und dort beim Aufprall eine Geschwindigkeit von $11{,}2\,\mathrm{km/s}$ erreicht.

Die exakte Rechnung: Die Formel für die potenzielle Energie im Gravitationsfeld einer Zentralmasse lautet $E_p = G \cdot m \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$. Nehmen wir an, dass sich der Brocken zuerst in extrem großer Entfernung von der Erde befunden hat. Der negative Term in der Klammer ist daher praktisch null und kann vernachlässigt werden. Nehmen wir weiters an, dass die Geschwindigkeit des Brockens zu Beginn null war. Auf Grund des Energieerhaltungssatzes muss sich daher die potenzielle Energie vollständig in kinetische Energie umwandeln. Wir können diese beiden Energien daher gleichsetzen und nach v auflösen:

$$\frac{G \cdot m \cdot M}{r_1} = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow v = \sqrt{2 \cdot G \cdot \frac{M}{r_1}}$$

Das ist im Prinzip die Formel für die Fluchtgeschwindigkeit. Gäbe es keine Atmosphäre, würden wir somit $11{,}2\,\mathrm{km/s}$ als Aufprallgeschwindigkeit erwarten. Wir wollen aber berechnen, wie groß die Geschwindigkeit in $250\,\mathrm{km}$ Höhe ist. Daher ist ein etwas kleinerer Wert zu erwarten. Wenn man die bekannten Daten einsetzt (wobei $r_1 = \text{Erdradius} + 250\,\mathrm{km}$ ist), erhält man rund $11\,\mathrm{km/s}$. Das ist die Mindestgeschwindigkeit, die durch die Gravitation der Erde verursacht wird. Warum wird die Geschwindigkeit in den meisten Fällen größer sein? Weil die Sonne den Brocken zusätzlich beschleunigt!

1.6 Die Winkelgeschwindigkeit ω ist $2 \cdot \pi/T$. Die Gravitationskraft liefert die für die Kreisbahn nötige Zentripetalkraft. Man kann diese Kräfte daher gleichsetzen:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = m \cdot \omega^2 \cdot r = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot r}{T^2}$$

Wenn man nun kürzt und umstellt, erhält man

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} = C$$

und das ist nichts anderes als das 3. Keplersche Gesetz.

1.7a) Einerseits folgt aus dem Gravitationsgesetz für die Kraft, mit der die Sonne die Erde auf der Kreisbahn hält

$$F_G = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} = 3{,}6 \cdot 10^{22}\,\mathrm{N}$$

Andererseits beträgt die Geschwindigkeit der Erde um die Sonne $v = U/T = 2 \cdot \pi \cdot r/T = 29{,}9\,\mathrm{km/s} \approx 3 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$. Für die Zentripetalkraft $F_{zp} = \frac{m \cdot v^2}{r}$, die ja durch die Gravitationskraft entsteht, erhält man daher logischer Weise ebenfalls $3{,}6 \cdot 10^{22}\,\mathrm{N}$.

$200\,\mathrm{N/mm^2}$ sind $200 \cdot 10^6\,\mathrm{N/m^2} = 2 \cdot 10^8\,\mathrm{N/m^2}$. Man würde daher ein Stahlseil mit einem Querschnitt von rund $1{,}8 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m^2}$ benötigen. Der Querschnitt des Seils ist $A = r^2 \cdot \pi$. Daraus folgt $r = (A/\pi)^{1/2}$. Der Radius des Seils müsste daher $7{,}57 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ betragen. Nachdem der Radius der Erde $6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$ ist, wäre das Seil somit dicker als die Erde selbst! Das gibt Probleme!

1.7b) Ein Seil hat die Form eines Zylinders und somit das Volumen $r^2 \cdot \pi \cdot h$, wobei r der oben berechnete Radius ist und h der Abstand von Erde zu Sonne. Das ergibt für das Volumen des Seils $2{,}7 \cdot 10^{25}\,\mathrm{m^3}$. Ein Kubikmeter Wasser hat eine Masse von 1000 kg. Ein Kubikmeter Stahl hat daher eine Masse von rund 8000 kg. Unser Seil hätte daher die imposante Masse von $2{,}1 \cdot 10^{29}\,\mathrm{kg}$. Es wäre damit rund $3{,}6 \cdot 10^4$-mal so schwer wie die Erde selbst. Auch das würde größere Probleme mit sich bringen.

1.8 Aus $m \cdot g = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2}$ folgt $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$. Da G eine Konstante ist, ist die Fallbeschleunigung g an der Oberfläche eines beliebigen Objekts daher proportional zu M/r^2. Damit können wir die Fallbeschleunigung am Mond im Vergleich zu der auf der Erde ausrechnen. Wenn du für $M = 1/81$ und für $r = 1/3{,}67$ einsetzt, erhältst du $g \sim 1/6$. Die Fallbeschleunigung am Mond beträgt daher etwa 1/6 der Erdbeschleunigung.

1.9 Die benötigte Zentripetalkraft für die Kurvenfahrt liefert die Reibungskraft. Die Zentripetalkraft kann daher niemals größer sein als die Reibungskraft zwischen Reifen und Straße. Es muss also gelten: $F_{zp} \leq F_r$ oder $\frac{m \cdot v^2}{r} \leq \mu \cdot m \cdot g$. Die Masse kürzt sich weg. Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und minimalem Kurvenradius ist also nicht von der Masse abhängig, sondern nur von der Reibung. Wenn man nach r auflöst, erhält man $r \geq \frac{v^2}{\mu \cdot g}$. Man kann daher auch schreiben $r_{min} = \frac{v^2}{\mu \cdot g}$ und es gilt daher $r_{min} \sim 1/g$. Weil die Fallbeschleunigung am Mond nur rund 1/6 der Erde beträgt (Aufgabe 1.8), müssen daher die Kurvenradien 6-mal so groß sein, wenn man mit demselben Tempo fahren will wie auf der Erde.

1.10 Nach dem Unabhängigkeitsprinzip kann man vertikale und horizontale Geschwindigkeit unabhängig voneinander betrachten. Schauen wir uns nur die vertikale Geschwindigkeitskomponente an. Aus $a = v/t$ folgt $t = v/a \sim 1/a$. Nachdem die Mondbeschleunigung rund 1/6 der Erdbeschleunigung beträgt (siehe Aufgabe 1.8), ist daher die Steige- und Fallzeit bei gleicher Abwurfgeschwindigkeit 6-mal so lang. Bei gleicher Vertikalgeschwindigkeit sind daher auch mindestens 6-fache Wurfweiten zu erwarten. Wenn der Wurf im Freien stattfindet, sind die Wurfweiten noch größer, weil der Luftwiderstand fehlt.

1.11 Genau in der Mitte einer Kugel ist man schwerelos, weil alle Massenteile gleich stark nach außen ziehen. Das ist allgemein so. Wie sieht es in der Hälfte zwischen Mittelpunkt und Radius aus? Dort würde man, wenn die Kugel homogen ist, genau die Hälfte wiegen, weil die Gravitationskraft von der Erdoberfläche bis zum Erdmittelpunkt linear absinkt. Die Erde ist allerdings keine homogene Kugel.

1.12 Das Gewicht kann man über das Newtonsche Gravitationsgesetz berechnen: $F_g = \frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} \sim \frac{M}{r^2}$. Wenn du dich quasi in die Erde bohrst, dann spielen die Schichten über dir für dein Gewicht keine Rolle mehr, sondern nur mehr der Teil unter dir. r sinkt daher ab, aber die Masse M, die eine Rolle spielt, ebenfalls. Die Dichte ϱ eines Objekts berechnet sich aus Masse durch Volumen. Daher gilt $M = \varrho \cdot V \sim V$. Das Volumen einer Kugel ist wiederum

$V = 4 \cdot r^3 \cdot \pi/3 \sim r^3$. Daher gilt auch $M \sim r^3$. Wenn du das oben einsetzt, erhältst du $F_g \sim M/r^2 \sim r^3/r^2 \sim r$. Das Gewicht sinkt also bei einer homogenen Massenverteilung proportional mit dem Radius ab. Auf halber Strecke würdest du nur mehr die Hälfte wiegen und in der Mitte gar nichts mehr (siehe auch Aufgabe 1.11). Die tatsächlichen Verhältnisse in der Erde sind jedoch wesentlich komplizierter, weil diese im Inneren eine größere Dichte aufweist als in den äußeren Schalen.

2.1 Einerseits gilt für das Gewicht $F_G = m \cdot g$. Andererseits kannst du das Gewicht auch über $F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ berechnen. Durch Gleichsetzen und Umformen erhältst du eine Gleichung für g in Abhängigkeit des Abstandes zum Erdmittelpunkt: $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$. Für die Erdoberfläche gilt $r = \frac{6{,}37 \cdot 10^6}{m}$. Grafisch dargestellt sieht das so aus wie in Abbildung 15. Die ISS befindet sich in einer Höhe von 320 bis 440 km über der Erdoberfläche. Dort ist aber die Gravitation ganz grob gesagt erst um 10 % gesunken. Die Schwerelosigkeit entsteht also nicht durch die fehlende Gravitation. Sie ist eine Folge des freien Falls.

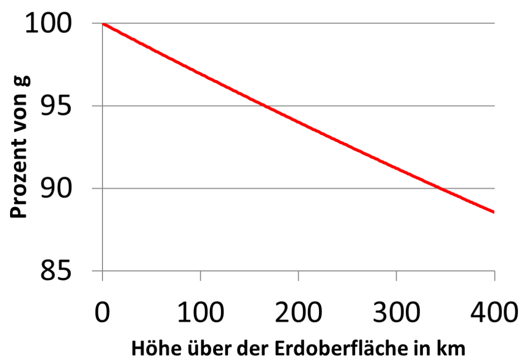

Abbildung 15. Das Absinken der Fallbeschleunigung g mit der Höhe über dem Erdboden.

2.2 Die Atmosphäre hört nicht einfach so auf, sondern sie wird dünner und dünner, wie du in Abbildung 6 sehen kannst. Die mittlere Bahnhöhe der ISS nimmt durch den Luftwiderstand 50 bis 150 m pro Tag ab. Diesem Höhenverlust wird je nach Erfordernissen des Stationsbetriebs in unregelmäßigen Abständen durch Triebwerkszündungen ent-gegengewirkt, früher vom Space Shuttle (diese Missionen wurden 2011 eingestellt), heutzutage von Sojus oder Progress, sodass die mittlere Höhe der Station zwischen etwa 320 und 440 Kilometern gehalten wird. Ohne diese Zündungen würde die Raumstation über kurz oder lang abstürzen.

2.3**a)** Die Bremsung in der Hochatmosphäre ist so gering, dass die Bahn des Satelliten trotzdem näherungsweise immer kreisförmig bleibt. Der Satellit sinkt auf eine Spiralbahn ab. Aus $F_G = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ und $F_{zp} = \frac{mv^2}{r}$ folgt durch Gleichsetzen und Umformen $v = \sqrt{G \cdot M/r}$. Wenn die ISS durch die Reibung etwas gebremst wird, dann sinkt sie auf eine neue Kreisbahn ab. Weil die Geschwindigkeit aber proportional $1/\sqrt{r}$ ist, steigt mit absinkendem Radius die Geschwindigkeit sogar an.

Sehen wir uns die Energien dazu an. Die kinetische Energie ist allgemein $E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$. Die Geschwindigkeit v ergibt sich aber wiederum aus dem Abstand zum Erdmittelpunkt (siehe Gleichung oben). Wenn man das einsetzt, dann erhält man $E_{kin} = \frac{m \cdot G \cdot M}{2 \cdot r}$. Die Differenz zwischen der kinetischen Energie unten (etwa in 300 km Höhe) und oben (400 km) ist daher

$$\Delta E_{kin} = \frac{m \cdot G \cdot M}{2 r_{unten}} - \frac{m \cdot G \cdot M}{2 \cdot r_{oben}} = \frac{m \cdot G \cdot M}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_{unten}} - \frac{1}{r_{oben}} \right).$$

Der Unterschied in der potenziellen Energie ist jedoch

$$\Delta E_{pot} = m \cdot G \cdot M \cdot \left(\frac{1}{r_{unten}} - \frac{1}{r_{oben}} \right).$$

Daraus folgt $\Delta E_{kin} = \Delta E_{pot}/2$. Was bedeutet das? Beim Absinken erhöht sich E_{kin} und gleichzeitig sinkt E_{pot} ab, aber nur um die Hälfte. Zum Absinken muss man daher einen Satelliten bremsen. Bei der ISS besorgt das die Luftreibung. Durch das Absinken gewinnt er aber an kinetischer Energie, und es erhöht sich paradoxer Weise seine Bahngeschwindigkeit. Die Gesamtenergie sinkt jedoch ab.

2.3b) Aus Abbildung 6 kann man grob abschätzen, dass die ISS zu Beginn des Jahres 1999 in rund 5 Monaten von 400 km auf 385 km abgesunken ist. Wie lange braucht die ISS für eine Umdrehung um die Erde in diesen Höhen? Aus $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ (siehe Aufgabe **2.3a)**) kannst du zunächst einmal die Bahngeschwindigkeit in 400 km Höhe ausrechnen (siehe Tabelle 2). Dann berechnest du den Umfang der Kreisbahn in dieser Höhe und kannst daraus die Umlaufzeit abschätzen. Dieselben Berechnungen führst du für eine Höhe von 385 km durch. Nehmen wir als Mittelwert für die Umlaufzeit im Bereich 385 bis 400 km Höhe 5522 s an.

Fünf Monate haben $1{,}32 \cdot 10^7$ s. In dieser Zeit macht die ISS daher 2378 Umläufe. Dabei verliert sie 15 km an Höhe, das macht etwas mehr als 6 m pro Umlauf, aber bei rund 15 Umläufen pro Tag immerhin knapp 100 m Höhenverlust pro Tag. In 5 Monaten summiert sich das auf rund 15 km. Weil die Geschwindigkeit in Summe dabei um bloß 9 m/s zunimmt, erhöht sich die Geschwindigkeit pro Tag nur um etwa 5,6 cm/s.

Bahngeschwindigkeit in 400 km Höhe ($v = \sqrt{G \cdot M/r}$)	7690 m/s
Bahnumfang in 400 km Höhe ($U = 2 \cdot \pi \cdot r$)	$4{,}254 \cdot 10^7$ m
Umlaufzeit in 400 km Höhe ($T = U/v$)	5532 s = 92,2 min
Bahngeschwindigkeit in 385 km Höhe ($v = \sqrt{G \cdot M/r}$)	5532 s = 7697 m/s
Bahnumfang in in 385 km Höhe ($U = 2 \cdot \pi \cdot r$)	$4{,}244 \cdot 10^7$ m
Umlaufzeit in 385 km Höhe	5514 s = 91,90 min
Mittelwert der Umlaufzeit	5522 m
5 Monate (152 Tage) in Sekunden	$1{,}31 \cdot 10^7$ s
Umläufe der ISS in 5 Monaten	2390
Umläufe pro Tag	15, 6
Höhenverlust pro Umlauf (15 000 m/2378)	6,3 m
Höhenverlust pro Tag	98,68 m ≈ 100 m
Differenz der Umlaufgeschwindigkeiten in 385 und 400 km Höhe	9 m/s
Geschwindigkeitszunahme pro Tag	0,059 m/s = 5,9 cm/s

TABELLE 2. Berechnete Daten zu Aufgabe 2.3**b)**

2.4 Die Lösung ist Antwort c. Die Mondbahn entspricht am ehesten einem Vieleck. Allerdings ist der Effekt in Abbildung 8 übertrieben dargestellt. Eine nähere Erklärung findest zu in der Hilfe zu Aufgabe 2.5.

2.5a) Der Umfang der Erdbahn beträgt $2 \cdot \pi \cdot 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m $= 9{,}42 \cdot 10^{11}$ m, die Umlaufzeit $365 \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24$ s $= 3{,}15 \cdot 10^7$ s. Die Tangentialgeschwindigkeit der Erde beträgt daher rund $3 \cdot 10^4$ m/s oder 30 km/s. Der Umfang der Mondbahn beträgt $2{,}4 \cdot 10^9$ m, die Umlaufzeit $2{,}36 \cdot 10^6$ s. Die Tangentialgeschwindigkeit des Mondes beträgt daher rund 10^3 m/s oder 1 km/s. Die Erde ist also rund 30-mal so schnell um die Sonne unterwegs wie der Mond um die Erde. Daher scheidet b in Abbildung 8 aus. Eine Schleifenbahn mit rückläufiger Bewegung würde nämlich voraussetzen, dass sich der Mond um die Erde schneller bewegt als die Erde um die Sonne.

2.5b) Erde und Mond bewegen sich um den gemeinsamen Schwerpunkt, das Baryzentrum. Generell ist es so, dass niemals ein Objekt um das andere kreisen kann, ohne dass sich das Zentralobjekt ebenfalls bewegt. Auch die Sonne wird durch die Umkreisung der Planeten in eine Art Taumelbewegung versetzt.

2.5c) Durch Gleichsetzen von $F = m \cdot g$ mit dem Gravitationsgesetz und Umformen erhältst du $g = G \cdot M/r^2$. Für g_{S-M} ergibt sich dann rund $6 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$. Du kannst dabei vereinfacht für r den Abstand von Sonne zu Erde einsetzen, weil die variable Mondentfernung auf Grund der großen Entfernung von Sonne zu Erde praktisch keine Rolle spielt. Für g_{E-M} ergeben sich rund $2{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{m/s^2}$. Die Sonne zieht den Mond also mehr als doppelt so stark an wie die Erde. Ist das nicht verblüffend? Damit scheidet Bahn a in Abbildung 8 aus. Diese würde voraussetzen, dass die Anziehungskraft der Erde auf den Mond größer ist, als die der Sonne auf den Mond. Nur dann könnte es zu einer Krümmung der Mondbahn von der Sonne weg kommen (konvexe Krümmung).

Tatsächlich entspricht die Mondbahn schematisch gesehen c in Abbildung 8. Sie ist, salopp gesagt, eine Art 12-Eck, weil das Jahr rund 12 synodische Monate hat, und daher immer konkav, also immer zur Sonne hin gekrümmt. In Abbildung 16 siehst du eine maßstabsgetreue Abbildung der Mondbahn.

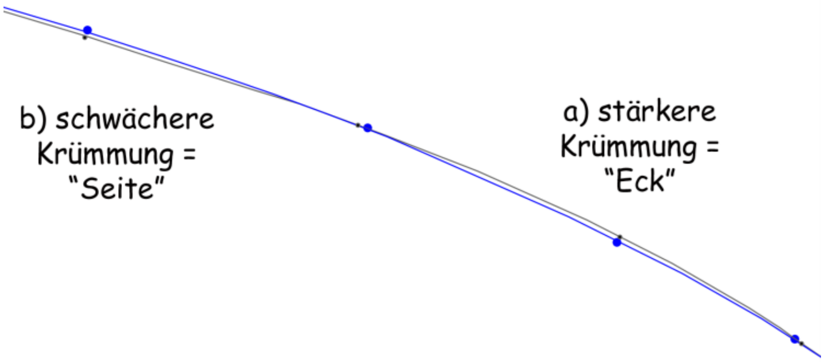

Abbildung 16. Maßstabsgetreue Bahn von Erde und Mond um die Sonne. a) Die Erde befindet sich zwischen Mond und Sonne. Der Mond erfährt eine stärkere Beschleunigung, die Bahn um die Sonne ist stärker gekrümmt. Das entspricht dem „Eck“ des 12-Ecks. b) Der Mond befindet sich zwischen Erde und Sonne. Er erfährt dadurch in Summe eine schwächere Beschleunigung, die Bahn um die Sonne ist schwächer gekrümmt. Das entspricht der „Seite“ des 12-Ecks.

2.6 Das Baryzentrum Erde – Mond bewegt sich näherungsweise auf einer Kreisbahn um die Sonne. Der Mond fällt nicht auf die Sonne, weil er relativ zu ihr eine sehr hohe Tangentialgeschwindigkeit besitzt. Schließlich fällt ja auch die Erde nicht auf Sonne, obwohl diese die Erde viel stärker anzieht als der Mond.

3.1 Der Komet wurde auf Grund der Gezeitenkräfte des Jupiters auseinandergerissen. Gezeitenkräfte entstehen durch die unterschiedlichen Gravitationskräfte, die ein Himmelskörper auf verschiedene Teile eines anderen Körpers ausübt. Diese Kräfte können zu einer Deformation führen (etwa bei Ebbe und Flut auf der Erde) oder sogar zum Zerreißen oder Zerbröseln eines Objekts, wie das beim Kometen der Fall war.

3.2 Die Gravitationsbeschleunigung im Feld einer Masse folgt aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz: $a = \frac{G \cdot M}{r^2}$. Nimm nun an, dass eine kleine Masse auf eine große fällt, etwa ein Astronaut in ein Schwarzes Loch. Er soll mit den Füßen auf das Schwarze Loch zufallen. Auf die Füße wirkt daher die Gravitationskraft stärker als auf den Kopf. Nimm an, die Größe des Astronauten ist Δr. Der Unterschied in der Beschleunigung von Kopf und Füßen entspricht dann der Gezeitenbeschleunigung.

$$\Delta a = a_{gez} = \frac{G \cdot M}{(r - \Delta r)^2} - \frac{G \cdot M}{r^2} = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{\frac{(r-\Delta r)^2}{r^2}} - 1 \right)$$
$$= \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{\left(\frac{r-\Delta r}{r}\right)^2} - 1 \right) = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{(1 - \Delta r/r)^2} - 1 \right)$$

Wegen $\frac{1}{(1-\Delta r/r)^2} = 1 + 2 \cdot \Delta r/r + 3 \cdot (\Delta r/r)^2 + \ldots$ (siehe Angabe) bekommen wir daher

$$a_{gez} = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \left(\frac{1}{(1 - \Delta r/r^2)} - 1 \right) \approx \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot (1 + 2 \cdot \Delta r/r - 1) = 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$$

wenn wir den dritten Term vernachlässigen. Für die Gezeitenbeschleunigung erhält man daher $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$.

3.3a) Die Oberfläche von astronomischen Objekten ist kugelförmig. Warum? Weil alle Punkte der Oberfläche dieselbe potenzielle Energie aufweisen müssen. Würde zum Beispiel das Wasser an einer Stelle höher stehen, hätte es eine höhere potenzielle Energie und würde so weit absinken, bis die potenzielle Energie der Umgebung entspricht. Aus demselben Grund rollt eine Kugel auch an den tiefsten Punkt einer Schale.

Wie verändert die Gezeitenkraft des Mondes die Oberfläche der Meere? Die Oberfläche stellt sich wiederum so ein, dass alle Punkte gleiche potenzielle Energie aufweisen. Allerdings ist die Gesamtbeschleunigung auf einen mondzugewandten Punkt ein bisschen geringer, weil die Gravitation des Mondes in die Gegenrichtung der Erdgravitation wirkt. Deshalb muss dort das Wasser etwas höher stehen, damit es wiederum die gleiche potenzielle Energie aufweist (siehe auch Aufgabe **3.3b)**).

3.3b) Für einen Punkt an der Oberfläche der Erde ist die Gezeitenbeschleunigung durch den Mond nach $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$ etwa $10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$. Für Δr musst du in dieser Gleichung den Erdradius einsetzen, weil uns ja interessiert, wie groß der Unterschied in den Beschleunigungen zwischen dem Erdmittelpunkt und der Erdoberfläche ist. Für r musst du den Abstand Erde – Mond einsetzen. Nachdem g rund $10\,\mathrm{m/s^2}$ ist, beträgt die Gezeitenbeschleunigung durch den Mond bloß 10^{-7} g, also den Zehnmillionsten Teil der Erdbeschleunigung. Das ist verblüffend wenig!

3.3c) Zunächst brauchen wir eine allgemeine Formel für die Fallbeschleunigung g. Du erhältst diese durch Gleichsetzen der Gewichtskraft mit der Formel für die Gravitationskraft: $m \cdot g = G \cdot M \cdot m/r^2$. Durch Auflösen nach g erhältst du $g = \frac{G \cdot M}{r^2}$. Die potenzielle Energie im inhomogenen Feld beträgt im Vergleich mit einem Punkt im Unendlichen $E_P = \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$. Man kann aber auch schreiben $E_P = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \cdot r = m \cdot g \cdot r$. Weil E_p an der Oberfläche überall gleich groß, folgt aus $E_p = m \cdot r \cdot g =$ konstant der Zusammenhang $r \sim 1/g$. Das ist natürlich ein bisschen getrickst, denn g hängt ja selbst vom Radius ab. Für kleine Veränderungen von r, wie das bei den Gezeiten der Fall ist, ändert sich jedoch g nicht merklich. Die Fallbeschleunigung verringert sich an der Erdoberfläche durch die Gezeitenbeschleunigung des Mondes um den Faktor 10^{-7}. Die Wasseroberfläche stellt sich aber immer so ein, dass überall an der Oberfläche die gleiche potenzielle Energie herrscht. Für kleine Zahlen gilt $1/(1-x) \approx 1 + x$. Daher ist $r \sim 1/(g - a_{gez}) = 1/(1 - 10^{-7}) \approx 1 + 10^{-7}$.

Auf der mondzugewandten Seite muss das Wasser daher um den Zehnmillionsten Teil des Erdradius höher stehen, also um $6{,}37 \cdot 10^6\,\mathrm{m}/10^{-7} = 0{,}637\,\mathrm{m}$. Der Tidenhub, also der Unterschied zwischen Ebbe und Flut, macht am offenen Meer 64 cm aus. Die Rechnung ist nicht ganz exakt, weil die Absenkung der Meere quer zur Erde-Mond-Richtung nicht berücksichtigt ist. Die Größenordnung bleibt aber dieselbe.

3.4a) Wenn du in $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$ einsetzt, erhältst du für die Gezeitenbeschleunigung durch die Sonne $5 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m/s^2}$. Das entspricht der Hälfte des Effekts, der durch den Mond ausgelöst wird (siehe Aufgabe **3.3b)**), also rund 32 cm. Wie kann man das erklären? Die Masse der Sonne ist viel größer als die des Mondes. Für die Gezeitenkraft ist aber nicht nur diese entscheidend, sondern auch, wie inhomogen das Feld ist, also wie stark die Feldlinien der Sonne im Abstand der Erde noch auseinandergehen. Weil die Sonne rund 400-mal so weit von der Erde entfernt ist wie der Mond, divergieren die Feldlinien kaum noch. Deshalb ist überraschender Weise die Gezeitenbeschleunigung durch die Sonne geringer als die des Mondes.

3.4b) Der Mond erzeugt durch die Gezeitenkräfte auf der Erde zwei Flutberge, einen auf der ihm zugewandten und einen auf der abgewandten Seite („Mondflut"). Aber nicht nur der Mond, auch die Sonne übt auf die Erde Gezeitenkräfte aus („Sonnenflut"). Dieser Effekt ist allerdings nur rund halb so groß (Teil **a)**). Wenn Sonne, Mond und Erde in einer Linie stehen, dann addieren sich beide Effekte und es entsteht eine besonders starke Flut, die Spring-flut. Am offenen Meer macht diese dann einen Unterschied von $64\,\mathrm{cm} + 32\,\mathrm{cm} \approx 1\,\mathrm{m}$ aus. Wenn Mond, Erde und Sonne im rechten Winkel stehen, dann schwächen sich beide Effekte gegenseitig ab, und es entsteht die so genannte Nippflut. Diese macht am offenen Meer $64\,\mathrm{cm} - 32\,\mathrm{cm} \approx \frac{1}{3}\,\mathrm{m}$. Die Springflut ist also am offenen Meer rund dreimal so hoch wie die Nippflut.

3.5 An den Küsten kann es durch Stau- und Resonanzeffekte zu wesentlich höheren Unterschieden zwischen Ebbe und Flut kommen.

3.6 Zusätzlich zu Neu- oder Vollmond müssen für einen gewaltigen Tidenhub noch folgende Umstände günstig zusammenwirken:

1) Der Mond kommt auf seiner elliptischen Bahn um die Erde manchmal bis auf 10 % näher an die Erde heran. Am erdnächsten Punkt (Perigäum) hat er eine um 33 % stärkere gezeitenerzeugende Kraft als am erdfernsten Punkt (Apogäum).

2) Dasselbe gilt für Erde und Sonne: am nächsten Punkt (Perihel) ist die Gezeitenkraft um 10 % größer als am entferntesten (Apogäum). Wann ist die Erde am nächsten zur Sonne? Im Winter (Nordhalbkugel)!

3) Wenn der Luftdruck gering ist, wirkt er dem Steigen des Wassers weniger entgegen.

4) Letztlich kann auch der Wind die Flutwelle noch verstärken. Man spricht dann von Sturmflut.

3.7 Wenn man die Formel für die Kraft und das Gravitationsgesetz gleichsetzt, erhält man $m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2}$ und $g = G \cdot \frac{M}{r^2}$. Wenn wir die gegenseitige Fallbeschleunigung der Mondhalbkugeln berechnen wollen, müssen wir für M die halbe Masse des Mondes ($3{,}65 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$) einsetzen. Nennen wir die Masse daher $M_{m/2}$. Für r müssen wir den Abstand der Schwerpunkte der Halbkugeln einsetzen. Dieser beträgt $(6/8) \cdot 1{,}74 \cdot 10^6\,\mathrm{m} = 1{,}3 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$. Nennen wir diesen Abstand r_{ksp}. Wir erhalten daher $g = G \cdot \frac{M_{m/2}}{r_{ksp}^2}$.

Die Gezeitenbeschleunigung ist allgemein $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$. Als Ausdehnung des Objekts Δr nehmen wir in unserem Fall den Abstand der Schwerpunkte der Mondhalbkugeln, also r_{ksp}. M ist die Masse der Erde, also M_e, und r der kritische Abstand Erde – Mond, also r_{krit}. Wir können die Gezeitenbeschleunigung daher so anschreiben: $a_{gez} \approx 2 \cdot r_{ksp} \cdot \frac{G \cdot M_e}{r_{krit}^3}$.

Die kritische Entfernung ist dann erreicht, wenn die Gezeitenbeschleunigung so groß wird wie die gegenseitige Beschleunigung der Mondhalbkugeln. Dann droht der Mond zu zerreißen. Wir können daher die Gleichungen gleichsetzen und nach r_{krit} auflösen:

$$G \cdot \frac{M_{m/2}}{r_{ksp}^2} = 2 \cdot r_{ksp} \cdot \frac{G \cdot M_E}{r_{krit}^3}$$

und

$$r_{krit} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_E \cdot r_{ksp}^3}{M_{m/2}}} = r_{ksp} \cdot \sqrt[3]{\frac{2 \cdot M_E}{M_{m/2}}}$$

Wenn wir alle Werte einsetzen, erhalten wir für $r_{krit} = 9 \cdot 10^6$ m oder etwa 1,4 Erdradien. Andere Berechnungsmodelle liefern etwas andere Werte, aber die Größenordnung bleibt dieselbe. Der Mond müsste der Erde schon verdammt nahe kommen, damit er durch die Gezeitenkräfte zerreißt (Abbildung 17).

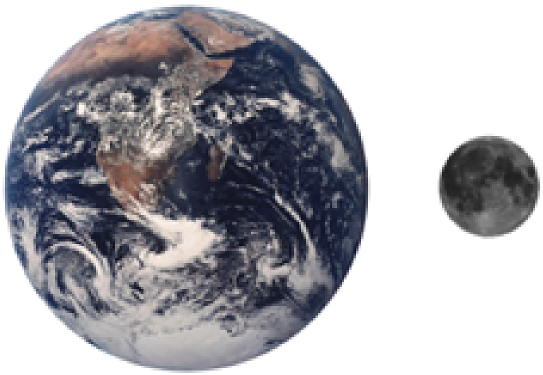

Abbildung 17. So nahe müsste der Mond in etwa der Erde kommen, damit er durch die Gezeitenkräfte auseinandergerissen wird.

3.8 Zuerst müssen wir die Masse des Raumschiffs berechnen, das wir vereinfacht kugelförmig annehmen. Das Volumen einer Kugel ist $V = 4 \cdot r^3 \cdot \pi/3$. r ist in unserem Fall $\frac{1}{4}$ des Mondradius, also $4{,}35 \cdot 10^5$ m. Das Volumen dieser Kugel beträgt somit $3{,}45 \cdot 10^{17}$ m^3. Nehmen wir an, das Raumschiff hat die Dichte von Wasser. Schließlich trifft das ja auch in etwa für alle Schiffe zu, selbst wenn es sich um Trümmer wie Flugzeugträger handelt. Ein Kubikmeter Wasser hat eine Masse von 1000 kg, das Raumschiff der Aliens somit $3{,}44 \cdot 10^{20}$ kg.

Jetzt kannst du in die Gleichung für die Gezeitenbeschleunigung einsetzen: $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$. M ist die Masse des Raumschiffs, das auf der Erde die Gezeitenbeschleunigung verursacht, r der Abstand des Raumschiffs, also 36 000 km oder $3{,}6 \cdot 10^7$ m, Δr ist der Radius der Erde. Wenn du die Zahlen einsetzt, erhältst du eine Gezeitenbeschleunigung von $6{,}3 \cdot 10^{-6}$ m/s^2. Die Gezeitenbeschleunigung durch das Raumschiff ist also rund 6-mal so groß wie die durch den Mond.

Was bedeutet das für Flut und Ebbe? Weil sich das Raumschiff im geostationären Orbit befindet, stehen die Flutberge immer still. An zwei Stellen über dem Äquator wird daher der Wasserspiegel um 3,6 m dauerhaft steigen – und das würde zu saftigen Überschwemmungen führen. Auch weiter nördlich oder südlich, wo sich die Hebung nicht mehr so stark bemerkbar macht, kann es trotzdem zu starken Überschwemmungen kommen. Außerdem kommt hier die Flut durch den Mond noch dazu.

3.9a) Wenn du die bekannten Daten in die Formel für den Schwarzschildradius einsetzt ($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$), so erhältst du für das kleine Schwarze Loch einen Radius von etwa 30 km, für das große einen Radius von etwa 1/12 des Abstands von Erde zu Sonne (Tabelle 3).

	Schwarzes Loch (10 Sonnenmassen)	Schwarzes Loch ($4{,}3 \cdot 10^6$ Sonnenmassen)
absolute Masse	$2 \cdot 10^{31}$ kg	$8{,}6 \cdot 10^{36}$ kg
Schwarzschildradius (R_s)	$2{,}96 \cdot 10^4\,\mathrm{m} \approx 30\,\mathrm{km}$	$1{,}27 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m} \approx 1/12$ des Abstands von Erde zu Sonne
kritischer Abstand (r_{krit})	$3{,}63 \cdot 10^6\,\mathrm{m} \approx 3600\,\mathrm{km}$	$2{,}74 \cdot 10^8\,\mathrm{m} \approx 1/550$ des Abstands von Erde zu Sonne
	$r_{krit} > R_s$	$r_{krit} < R_s$

TABELLE 3. Berechnete Daten zu Aufgabe 3.9**a)**

3.9b) Eine Gezeitenbeschleunigung von $100\,\mathrm{m/s^2}$ oder $10 \cdot g$ würde bedeuten, dass Kopf und Füße mit dem 10-fachen des Körpergewichts auseinandergezogen werden. Salopp gesagt wäre das so, als würde man dich auf der Erde am Kopf aufhängen und noch 10 Personen mit deinem Körpergewicht an deine Füße hängen. Es ist sehr unwahrscheinlich, dass das ein Mensch aushält. Wir sind aber großzügig, und schätzen die obere noch tolerierbare Gezeitenbeschleunigung mit $10 \cdot g$ ab – wahrscheinlich liegt sie um einige niedriger!

3.9c) Die Gezeitenbeschleunigung ist $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$. Daraus folgt für $a_{gez} = 10 \cdot g$ und $r = r_{krit}$ die Gleichung $r_{krit} = \sqrt[3]{\frac{2 \cdot \Delta r \cdot G \cdot M}{10 \cdot g}}$. Nehmen wir an, der Astronaut ist 1,8 m groß (Δr). Weil wir die maximal tolerierbare Gezeitenbeschleunigung mit $100\,\mathrm{m/s^2}$ angenommen haben, ergeben sich für die kritischen Entfernungen rund $3{,}6 \cdot 10^6$ m und $2{,}7 \cdot 10^8$ m (siehe Tabelle 3).

3.9d) Beim kleinen Schwarzen Loch würde der Astronaut schon in sehr großer Entfernung spaghettisiert werden. Beim großen Schwarzen Loch liegt aber der kritische Abstand innerhalb des Schwarzschildradius – hier könnte der Flug durch das Schwarze Loch theoretisch gelingen.

3.9e) Rechnen wir zunächst ganz allgemein. Die Gezeitenbeschleunigung ist $a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3}$. Wir wollen die Beschleunigung am Schwarzschildradius wissen, und müssen diesen daher für r einsetzen.

$$a_{gez} \approx 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{r^3} = 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{\left(\frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}\right)^3} = 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M}{\frac{8 \cdot G^3 \cdot M^3}{c^6}} =$$
$$= 2 \cdot \Delta r \cdot \frac{G \cdot M \cdot c^6}{8 \cdot G^3 \cdot M^3} = \frac{\Delta r \cdot c^6}{4 \cdot G^2 \cdot M^2}$$

Dann können wir nach M umformen:

$$M = \sqrt{\frac{\Delta r \cdot c^6}{4 \cdot G^2 \cdot a_{gez}}} = \frac{c^3}{2 \cdot G} \cdot \sqrt{\frac{\Delta r}{a_{gez}}}$$

Wenn wir für Δr unsere 1,8 m einsetzen und für a_{gez} $100\,\mathrm{m/s^2}$, dann vereinfacht sich die Gleichung zu $M = \frac{c^3}{2 \cdot G} \cdot 0{,}134$. Die kritische Masse hängt dann also nur von zwei Naturkonstanten ab und beträgt $2{,}7 \cdot 10^{34}$ kg oder rund 14 000 Sonnenmassen. Erst wenn ein Schwarzes Loch diese Masse übersteigt, könnte zumindest theoretisch dem Astronauten ein unbeschadeter Flug durch ein Wurmloch gelingen.

Bildnachweise

[1] DALLE-E.

[2] NASA. Gravity anomalies on Earth.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Gravity_anomalies_on_Earth.jpg

[3] Pixabay. Meteor.
https://pixabay.com/de/illustrations/ai-generierte-meteor-meteorit-raum-8392920/

[4] NASA. NASA Apollo 17 Lunar Roving Vehicle.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:NASA_Apollo_17_Lunar_Roving_Vehicle.jpg

[5] NASA. International Space Station after undocking of STS-132.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:International_Space_Station_after_undocking_of_STS-132.jpg

[6] Rmw. Internationale Raumstation Bahnhöhe. (CC BY-SA 3.0)
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internationale_Raumstation_Bahnh%C3%B6he.png

[7] Nohel, Ales. (2014). Project MarsX.
https://www.researchgate.net/figure/Comparison-of-Nominal-Atmospheric-Density-versus-Height-for-Earth-and-Mars-NASA-2001a_fig8_265093506

[8] NASA. Shoemaker-Levy 9 on 1994-05-17.
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Shoemaker-Levy_9_on_1994-05-17.png

[9] Williams, David. Shoemaker-Levy 9.
https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/sl9/image/sl9comp_pal2.gif

[10] Janosch Slama.

[11] Janosch Slama.

[12] NASA.