AUFGABENSAMMLUNG
INTERNATIONALE BEWERBSAUFGABEN

Diese Sammlung enthält Aufgaben nationaler Olympiaden, die nach inhaltlichen Gesichtspunkten angeordnet werden. Die Angabentexte dürfen nach der üblichen internationalen Vorgangsweise für nicht-kommerzielle Zwecke unter Nennung des Landes und Jahres genutzt werden. Im Rahmen des Projekts MmF wurden die Angaben überwiegend aus dem Englischen übersetzt, Lösungen und Figuren im Projekt erstellt. Wir nennen die Personen, die bei den jeweiligen Aufgaben die Übersetzung vorgenommen und die Lösungen formuliert haben.

Fragen und Feedback per E-Mail sind jederzeit willkommen.

Die Kürzel zum Ursprung der Aufgaben sind wie folgt:

I–SE	IMO Selection examinations
I–T	IMO-training for potential candidates
J	Junior
J–F	Junior-final round
J–SE	Junior selection examinations
S	Senior
S–F	Senior-final round
S–FR12	Final Round National Olympiad Grade 12
S–OC	Senior Open Contest
S–R3	Senior Round 3
T	Teacher training

Datum: 14. Dezember 2022.

Inhaltsverzeichnis

1. Algebra

1.1. Gleichungen und Gleichungssysteme.

1.1. (Irland, 2019 [I–T]) Bestimme alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems mit $x, y, z \geq 1$:

$$\begin{aligned}(x+y)\left(1+\frac{1}{xy}\right) &= \frac{17}{4}\\ (y+z)\left(1+\frac{1}{yz}\right) &= \frac{25}{3}\\ (z+x)\left(1+\frac{1}{zx}\right) &= \frac{33}{4}.\end{aligned}$$

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.2. (Großbritannien, 2018/2019 [S-R1]) Zwei ähnliche Drehzylinder haben folgende Eigenschaften: Die Summe ihrer Höhen ist 1. Die Summe ihrer Oberflächen ist 8π. Die Summe ihrer Volumina ist 2π.
Bestimme die Maße aller möglichen Zylinder mit diesen Eigenschaften.

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.3. (Hongkong, 2019 [I–SE1])

Der Umkreis eines gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Winkel an der Basis x° beträgt, sei gegeben. Zwei Punkte werden zufällig und unabhängig voneinander am Kreis ausgewählt und die Sehne zwischen ihnen gezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne das Dreieck schneidet beträgt $\frac{14}{25}$.

Man bestimme die Summe des größtmöglichen und kleinstmöglichen Wert von x. (MmF-Team) MmF

1.4. (Hongkong, 2019 [I–SE1]) Finde eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$\left\lfloor\frac{x}{1!}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{2!}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{3!}\right\rfloor + \ldots + \left\lfloor\frac{x}{10!}\right\rfloor = 2019.$$

(*Hinweis*: $\lfloor u \rfloor$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich u.) (MmF-Team) MmF

1.2. Ungleichungen.

1.5. (Griechenland, 2019 [J-SE]) Beweise für alle $a, b, c \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{1}{ab(b+1)(c+1)} + \frac{1}{bc(c+1)(a+1)} + \frac{1}{ca(a+1)(b+1)} \geq \frac{3}{(1+abc)^2}.$$

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.6. (Irland, 2019 [S-F]) Es seien x, y, z reelle Zahlen mit $x^2+y^2+z^2+2xyz = 1$.
Beweise

$$8xyz \leq 1.$$

Wann gilt Gleichheit? (Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.7. (Mongolei, 2019 [S-R3]) Es seien $n \geq 1$ eine ganze Zahl und $0 \leq a_1, a_2, \ldots, a_n \leq 1$. Beweise

$$\frac{1 - a_1 a_2 \cdots a_n}{n} \leq \frac{1}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

1.8. (Hongkong, 2019 [S-F]) Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit $ab + bc + ca \geq 1$.

Beweise

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{abc}.$$

(MmF-Team) **MmF**

1.9. (Hongkong, 2019 [I-SE1]) Sei a eine reelle Zahl. Die Funktion $f\colon (3\,;\,5) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-6}$$

besitzt an der Stelle $x = 4$ ihr Maximum.

Man bestimme alle möglichen Werte für a. (MmF-Team) **MmF**

1.10. (Hongkong, 2019 [I-SE1]) Es seien a, b und c positive reelle Zahlen mit

$$57a + 88b + 125 \geq 1148.$$

Man bestimme den kleinsten Wert des Ausdrucks

$$a^3 + b^3 + c^3 + 5a^2 + 5b^2 + 5c^2.$$

(MmF-Team) **MmF**

1.3. **Folgen und Reihen.**

1.11. (Griechenland, 2019 [S]) Die Folge $\langle a_n \rangle$ sei gegeben durch $a_1 = 1$ und
$a_n = 5a_{n-1} + 3^{n-1}$ für $n \geq 2$.
Bestimme einen geschlossenen Ausdruck für a_n in Abhängigkeit von n, sowie die größte Potenz von 2, die a_k für $k = 2^{2019}$ teilt. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

1.12. (Irland, 2009 [The eccentric postman and 50 other maths problems from Ireland, Nr. 41 (Stephen Buckley)]) Es sei $\langle a_n \rangle$ die „iterierte Fibonaccifolge“. Diese ist gegeben durch $a_n = f(f(n))$ mit $f(1) = f(2) = 1$ und $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$.
Beweise, dass a_n ein Vielfaches von 144 ist, wenn $f(n)$ ein Vielfaches von 14 ist.

(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

1.13. (Irland, 2011 [The Dutch Hillwalking Club and 20+11 other maths problems from Ireland, Nr. 22 (Bernd Kreussler)]) Die ganzen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sind folgendermaßen definiert:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad \text{und} \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \text{ mit } n \geq 1.$$

Bestimme alle ganzen Zahlen $n \geq 1$, für welche die beiden Zahlen $na_{n+1} + a_n$ und $na_n + a_{n-1}$ einen gemeinsamen Faktor größer als 1 besitzen. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.14. (Irland, 2012 [The apocalyptic years 2012 and 53 other maths problems from Ireland, Nr. 19 (Anca Mustata)]) Eine Folge $\langle x_n \rangle$ ist für positive Indizes n gegeben durch

$$x_0 = 3, \quad x_1 = 5 \quad \text{und} \quad x_{n+1} = x_n + 5x_{n-1}.$$

Beweise, dass kein Glied dieser Folge eine Quadratzahl ist. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.15. (Irland, 2013 [Colombian Squares and 20+13 other maths problems from Ireland, Nr. 21 (Stephen Buckley)]) Wir bezeichnen eine doppelt unendliche Folge $\langle s_n \rangle$

$$\ldots,\ s_{-2},\ s_{-1},\ s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots$$

als *unterdurchschnittlich*, wenn $s_n = (s_{n-1} + s_{n+1})/4$ für alle ganzzahligen Indizes gilt.

a) Bestimme eine unterdurchschnittliche Folge mit lauter verschiedenen Folgengliedern.

b) Es sei $\langle s_k \rangle$ eine unterdurchschnittliche Folge mit $s_m = s_n$ für ein Paar verschiedener Indizes m und n. Beweise, dass es dann unendlich viele Paare verschiedener Indizes i und j gibt mit $s_i = s_j$.

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.16. (Irland, 2017 [Powerful Sequences and 20+17 other maths problems from Ireland, Nr. 28, (Tom Laffey)]) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist für Indizes $n \geq 0$ gegeben durch $a_0 = 0$, $a_1 = 2$ und

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 41a_n.$$

Beweise, dass a_{2016} durch 2017 teilbar ist. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.17. (Irland, 2018 [The Game of Greed and 20+18 other maths problems from Ireland, Nr. 23, (Bernd Kreussler)]) Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist für Indizes $n \geq 1$ gegeben durch

$$a_{n+1} = a_n^2 + 2018.$$

Beweise, dass es höchstens einen Index n geben kann, für den a_n eine Kubikzahl ist.

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

1.18. (Irland, 2019 [I-T]) Gegeben seien drei Zahlen a, b, c mit $a + b + c = 0$. Wir definieren eine Folge $\langle s_n \rangle$ durch

$$s_0 = 3, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = -2(ab + bc + ca) \quad \text{und}$$
$$s_k = abcs_{k-3} - (ab + bc + ca)s_{k-2} \quad \forall k \geq 3.$$

Beweise $s_k = a^k + b^k + c^k$ für alle $k \geq 0$. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

1.19. (Hongkong, 2019 [I-SE2]) Bestimme alle Folgen p_1, p_2, p_3, ... von Primzahlen, für die es eine ganze Zahl k gibt, sodass die Rekursionsvorschrift

$$p_{n+2} = p_{n+1} + p_n + k$$

für alle positiven ganzen Zahlen n erfüllt ist. (MmF-Team) **MmF**

1.4. **Polynome.**

1.20. (Irland, 2019 [I-T]) Bestimme alle reellen Polynome $p(x)$ mit der Eigenschaft, dass

$$p(x^2) = (p(x))^2 + p(x) - \frac{1}{4}$$

für alle reellen Zahlen x gilt. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

1.5. **Funktionalgleichungen.**

1.21. (Estland, 2018/2019 [I-SE]) Bestimme alle reellen Funktionen, für die

$$f(x^2)f(y^2) + |x|f(-xy^2) = 3|y|f(x^2y)$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

1.22. (Großbritannien, 2018/2019 [S-R2]) Bestimme alle $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, für die $f(x) \leq f(y)$ für alle $x \leq y$ gilt, mit

$$f(x^4) + f(x^2) + f(x) + f(1) = x^4 + x^2 + x + 1$$

für alle $x > 0$. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2. Kombinatorik

2.1. **Spiele.**

2.1. (Griechenland, 2019 [J]) Auf einer Tafel stehen die positiven ganzen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, , 2018$ geschrieben. John und Mary spielen folgendes Spiel. In jedem Zug wählen sie zwei Zahlen a und b unter den vorhandenen Zahlen aus, löschen sie von der Tafel, und schreiben an ihrer Stelle die beiden Zahlen $5a - 2b$ und $3a - 4b$. John behauptet, dass sie sich auf eine geeignete Vorgangsweise einigen können, um nach einigen Zügen die Zahlen $3, 6, 9, \ldots, 6054$ auf der Tafel zu haben. Mary behauptet, dass dies nicht möglich ist. Wer hat recht? (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.2. (Estland, 2018/2019 [S-OC]) Juri und Mari spielen ein Spiel. Juri beginnt, und zeichnet ein Dreieck auf ein Blatt Papier. Dann zeichnet Mari eine Gerade durch den Mittelpunkt einer der Mittelparallelen des Dreiecks. Schließlich zeichnet Juri eine zweite Gerade durch diesen selben Mittelpunkt. Die beiden Geraden schneiden das Dreieck dann in vier Teile. Juri bekommt das Stück mit der größten Fläche und das Stück mit der kleinsten (oder jeweils eine der Größten bzw. Kleinsten, wenn es mehrere gibt), und Mari die anderen beiden. Die größte Gesamtfläche gewinnt.
Hat einer der Spielenden eine Gewinnstrategie? Wenn ja, wer?
Hinweis: Die *Mittelparallelen* eines Dreiecks sind die Verbindungsstrecken von jeweils zwei Seitenmittelpunkten (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.2. **Enumerative Kombinatorik.**

2.3. (Irland, 2019 [I-T]) In einem Kartendeck befinden sich 10 Karten, die mit den Zahlen von 1 bis 10 beschriftet sind. In einem Spiel zieht man zufällig Karten der Reihe nach aus dem Deck, ohne sie zurückzulegen, solange die Zahlen ansteigen. Der Spieler bekommt dann so viele Punkte, wie gezogen wurden, bevor zum ersten Mal eine Karte mit niedrigerem Wert als die Karte davor gezogen wird. Für die Karten 4 1 bekommt man also einen Punkt und für die Karten 3 5 9 8 bekommt man 3 Punkte. Es ist also möglich, Punkteergebnisse von 1 bis 10 zu erhalten.
Beweise, dass die Wahrscheinlichkeit k Punkte zu erhhalten für eine Zahl $1 \leq k \leq 9$ gleich $\frac{k}{(k+1)!}$ ist. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.4. (Irland, 2019 [I-T]) Früh in der Hockeysaison hat ein Spieler weniger als $\frac{k}{6}$ seiner Schüsse erfolgreich verwandelt. Zum Ende der Saison hatte er seine Erfolgsquote schon über $\frac{k}{6}$ gebracht.
Beweise, dass es für $k = 1$ und für $k = 2$ jeweils möglich ist, dass es keinen Zeitpunkt gegeben hat, zu dem seine Erfolgsquote genau $\frac{k}{6}$ betragen hat.
Beweise aber, dass es für $k \in \{3, 4, 5\}$ sicher einen Zeitpunkt gegeben haben muss, zu dem seine Erfolgsquote genau gleich $\frac{k}{6}$ war. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.5. (Estland, 2018/2019 [I-SE]) Bootien besteht aus drei Inseln, auf denen es insgesamt 2019 Städte gibt. Es gibt verschiedene Flugrouten, die jeweils drei Städte in beiden Richtungen verbinden, die sich auf drei verschiedenen Inseln befinden. Je zwei Städte in Bootien werden durch höchstens eine Flugroute verbunden.
Bestimme die Maximalanzahl von Flugrouten in Bootien. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.6. (Großbritannien, 2018/2019 [S-R1]) Auf eine Tafel soll eine aus fünf zweiziffrigen Zahlen bestehende Zahlenmenge geschrieben werden. Jede Zahl soll durch 3 teilbar sein und alle zehn Ziffern $0, 1, 2, \ldots, 9$ sollen auf der Tafel vorkommen.
Wie viele verschiedene Mengen sind möglich? (Hinweis: Die erste Ziffer einer mehrziffrigen Zahl kann niemals 0 sein.) (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.7. (Großbritannien, 2018/2019 [S–R1]) Ein n-*Ring* sei für $n \geq 3$ definiert als eine Anordnung von n nicht notwendigerweise verschiedenen Zahlen in einem Kreis, mit der Eigenschaft, dass die Summe von drei angrenzenden Zahlen im Kreis jeweils gleich n ist.
Man bestimme die Anzahl von Zahlen $3 \leq n \leq 2018$ für die es einen n-Ring gibt.
(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.8. (Hongkong, 2019 [I–SE1]) Ist es möglich, 24 paarweise verschiedene Punkte in der Ebene so auszuwählen, dass keine drei kollinear liegen und 2019 paarweise verschiedene Ebenen so bestimmt werden können, dass jede Ebene mindestens 3 der ausgewählten Punkte enthält und jedes Tripel der Punkte auf einer der Ebenen liegt? (MmF-Team) **MmF**

2.3. Graphen.

2.9. (Mongolei, 2019 [J]) In einer Schulklasse gibt es eine ungerade Anzahl von Kindern. Jedes Kind hat mindestens einen Freund in der Klasse, und je zwei Kinder mit einem gemeinsamen Freund haben unterschiedlich viele Freunde.

a) Gibt es sicher ein Kind mit genau 3 Freunden in der Klasse?
b) Gibt es sicher ein Kind mit genau 6 Freunden in der Klasse?

(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

2.4. Optimierung.

2.10. (Argentinien, 2018 [S–F]) 16 paarweise verschiedene positive ganze Zahlen werden so in die Felder eines 4×4 Rasters geschrieben, dass sich jeweils eine Zahl in jedem Feld befindet. In jeder Zeile und in jeder Spalte befindet sich eine Zahl, die gleich der Summe der anderen drei ist. Es sei M die größte unter den 16 Zahlen. Bestimme den kleinstmöglichen Wert von M.
(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3. Geometrie

3.1. Kongruente Dreiecke.

3.1. (Irland, 2019 [S–F]) Die Winkelsymmetrale w_α im rechtwinkeligen Dreieck ABC mit $\angle CBA = 90°$ schneide BC in D. Der Lotfußpunkt von D auf AC sei F.
Beweise, dass DF eine Tangente des Inkreises von ABC ist. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.2. (Irland, 2019 [I–T]) Im Viereck $ABCD$ sind die Seiten AB und CD parallel, und es gilt $BC = AB + CD$.
Beweise, dass sich die Winkelsymmetralen von $\angle CBA$ und $\angle DCB$ rechtwinkelig auf der Seite AD schneiden. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.2. Peripheriewinkelsatz.

3.3. (Griechenland, 2019 [J–F]) Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck mit dem Umkreismittelpunkt O. Die Streckensymmetrale von BC (durch den Mittelpunkt E von BC) schneidet die Gerade AB in Z. Der Umkreis von CEZ schneidet AB ein zweites Mal in H und die Gerade CD in einem Punkt $T \neq D$. Die Gerade ET schneidet AD in K und CH in L.
Beweise, dass die Punkte A, H, L und K auf einem gemeinsamen Kreis liegen.
(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.4. (Griechenland, 2019 [S–F]) Es sei ABC ein Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O und $AB < AC < BC$. Es sei D der Mittelpunkt des kleinen Umkreisbogens AB. Die Gerade AD schneidet die Gerade BC in E und der Umkreis von BDE schneidet die Gerade AB zum zweiten Mal in Z. Der Umkreis von ADZ schneidet die Gerade AC zum zweiten Mal in H.
Beweise, dass $BE = AH$ gilt. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.5. (Griechenland, 2019 [J–SE]) Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit dem Umkreismittelpunkt O. Es bezeichne E den Lotfußpunkt vom Mittelpunkt D von BC auf die Seite AB. Ferner schneide die Gerade AO die Gerade DE in Z.
Beweise, dass A, Z, D und C auf einem gemeinsamen Kreis liegen. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.6. (Mongolei, 2019 [J–R3]) Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis berühre die Seite BC in E und es bezeichne F den Schnittpunkt der Geraden AI mit der Seite BC. Wir nehmen an, der Umkreis ω von ABC schnede den Umkreis von AEF in einem Punkt $D \neq A$.
Beweise $\angle ADI = 90°$. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.7. (Mongolei, 2019 [S–R3]) Die Eckpunkte A und C eines Dreiecks ABC liegen auf einem Kreis. Dieser Kreis schneidet AB ein zweites Mal in M und BC ein zweites Mal in K. Der Umkreis von BKM schneidet die Strecke AK in D. Weiters schneidet die Gerade BD die Strecke MK in S und die Strecke AC in L. Schließlich sei T ein Punkt auf der Strecke AB mit $\angle ALT = \angle CBL$.
Beweise, dass die Geraden TS und AK parallel sind. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.8. (Großbritannien, 2018/2019 [S–R2]) Es sei ABC ein Dreieck und ℓ die Gerade durch B normal zu AB. Die Gerade normal zu BC durch A schneide ℓ in D, und die Streckensymmetrale von BC schneide ℓ in P. Ferner sei E der Lotfußpunkt von D auf AC.
Beweise, dass das Dreieck BPE gleichschenkelig ist. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.9. (Argentinien, 2018 [S–F]) Es sei P ein Punkt außerhalb eines Kreises Γ und PA eine Tangente an Γ. Die Gerade ℓ geht durch P und schneidet Γ in den Punkten B und C, wobei B zwischen P und C liegt. Es sei D der zu A bezüglich P symmetrische Punkt. Ferner seien ω_1 der Umkreis von DAC und ω_2 der Umkreis von PAB. Diese beiden Kreise schneiden sich in $E \neq A$ und die Gerade EB schneidet ω_1 in einem zweiten Punkt F.
Beweise $CF = AB$. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.10. (Argentinien, 2018 [S–F]) Es sei ABC ein spitzwinkeliges Dreieck mit $AC > AB$. Ferner sei Γ der Umkreis von ABC und D der Mittelpunkt des kleinen Bogens BC auf Γ. Seien E und F Punkte auf den Strecken AB bzw. AC mit $AE = AF$. Weiters sei $P \neq A$ der zweite Schnittpunkt des Umkreises von AEF mit Γ. Die Punkte G und H seien die Punkte ungleich P in den PE bzw. PF den Kreis Γ schneiden. Schließlich seien J und K die Schnittpunkte von DG und DH mit AB bzw. AC. Beweise, dass die Gerade JK durch den Mittelpunkt von BC geht.

(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.3. **Pol-Polare.**

3.11. (Irland, 2019 [I–T]) Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck und D der zu B bezüglich C symmetrische Punkt. Die Tangenten an den Umkreis von ABC durch D berühren diesen in den Punkten E und H, und die Tangente an den Umkreis in C schneide EH im Punkt F.
Beweise, dass das Dreieck FAD gleichseitig ist. (Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

3.4. **Spiegelung.**

3.12. (Großbritannien, 2018/2019 [S–R1]) Es sei Γ ein Halbkreis mit Durchmesser AB. Der Punkt C liegt auf dem Durchmesser AB und Punkte E und D liegen auf dem Bogen BA, wobei E zwischen B und D liegt. Die Tangenten an Γ in D bzw. E schneiden einander in F. Es gilt ferner $\angle DCA = \angle BCE$.
Beweise

$$\angle DFE = \angle DCA + \angle BCE.$$

(Geretschläger und MmF-Team) **MmF**

4. Zahlentheorie

4.1. Diophantische Gleichungen.

4.1. (Griechenland, 2019 [S]) Bestimme alle positiven rationalen Lösungen der Gleichung

$$yx^y = y + 1.$$

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.2. (Irland, 2019 [I–T]) Zeige, dass es unendlich viele Tripel positiver, ganzer Zahlen gibt, die relativ prim sind, und die Gleichung

$$a^2 = b^2 + c^2 + bc$$

lösen. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.3. (Großbritannien, 2018/2019 [S–R1]) Ares multipliziert eine ganze Zahl mit einer um 9 größeren Zahl und Grace multipliziert eine ganze Zahl mit einer um 6 größeren Zahl. Beide erhalten dasselbe Ergebnis T.
Bestimme alle möglichen Werte von T. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.2. Potenzen.

4.4. (Argentinien, 2018 [S–F]) Untersuche, ob es 2018 paarweise verschiedene positive ganze Zahlen gibt, mit der Eigenschaft, dass die Summe ihrer Quadrate eine Kubikzahl ist und die Summe ihrer dritten Potenzen eine Quadratzahl. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.3. Primzahlen und Primfaktoren.

4.5. (Irland, 2019 [S–F]) Wir definieren rekursiv *Quasi-Primzahlen* durch folgende Vorschrift:

- Die erste Quasi-Primzahl ist $q_1 = 2$.
- Für $n \geq 2$ ist die n-te Quasi-Primzahl q_n die kleinste ganze Zahl größer als q_{n-1}, die nicht in der Form $q_i q_j$ dargestellt werden kann, mit $1 \leq i \leq j \leq n-1$.

Untersuche, ob die Zahl 1000 eine Quasi-Primzahl ist. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.6. (Mongolei, 2019 [J–R3]) Es bezeichne $P(n)$ den größten Primfaktor von n.
Beweise, dass es eine ganze Zahl $n > 2^{2019}$ gibt, sodass $P(n-1)$, $P(n)$ und $P(n+1)$ alle nicht größer als $2\sqrt{n}$ sind. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.7. (Schweiz, 2019 [S–F]) Sei $\mathbb{P}$ die Menge aller Primzahlen und M eine Teilmenge von $\mathbb{P}$ mit mindestens drei Elementen, sodass folgende Eigenschaft gilt: Für jede natürliche Zahl k und für jede Teilmenge $A = \{p_1, p_2 \ldots, p_k\}$ von M mit $A \neq M$ sind alle Primfaktoren von $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k - 1$ in M. Zeige, dass $M = \mathbb{P}$ gilt. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.4. Teilbarkeit.

4.8. (Estland, 2018/2019 [S–FR12]) Bestimme alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, dass ein konvexes n-Eck existiert, dessen Innenwinkel in Grad gemessen aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.9. (Estland, 2018/2019 [S–OC]) Es seien a und b positive ganze Zahlen mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{5a^4 + a^2}{b^4 + 3b^2 + 4}$$

eine ganze Zahl ist.
Beweise, dass a eine zusammengesetzte Zahl sein muss. Bestimme ein Beispiel für ein Zahlenpaar mit der gegebenen Eigenschaft. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.10. (Mongolei, 2019 [S–R3]) Beweise, dass es für jede ganze Zahl $k > 0$ eine ganze Zahl $n > 0$ gibt, sodass $1 + 2^n + 3^n$ durch 7^k teilbar ist. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.11. (Mongolei, 2019 [T]) Bestimme die kleinste ganze Zahl $n \geq 2$, für die es positive ganze Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gibt mit

$$a_1^2 + \ldots + a_n^2 \mid (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1.$$

(Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.12. (Hongkong, 2019 [I–SE2]) Sei $p \in \mathbb{P}_{>10}$ eine Primzahl größer als 10.

Man beweise: Es gibt positive ganze Zahlen m und n mit $m + n < p$, sodass

$$5^m \cdot 7^n - 1$$

durch p teilbar ist. (MmF-Team) MmF

4.5. Zahlensysteme.

4.13. (Argentinien, 2018 [S–F]) Es sei n eine positive ganze Zahl. Man zeige, dass die Zahl $n \cdot (2^n - 1)$ als Summe von n paarweise verschiedenen Zweierpotenzen dargestellt werden kann. (Geretschläger und MmF-Team) MmF

4.14. (Hongkong, 2018 [S–F]) Bestimme die Anzahl nicht-negativer ganzer Zahlen k, mit $0 \leq k \leq 2188$, mit der Eigenschaft, dass $\binom{2188}{k}$ durch 2188 teilbar ist.

(*Hinweis.* Der Binomialkoeffizient ist definiert durch $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.) (MmF-Team) MmF