

AUFGABENSAMMLUNG – GERADEN & LINEARE FUNKTIONEN

INHALTSVERZEICHNIS

1. Steigungsmessung von Geraden	2
2. Proportionalitäten	5
3. Lineare Gleichungen & Gleichungssysteme in zwei Variablen	11
4. Funktionen	17
5. Lineare Funktionen	21
6. Stückweise definierte Funktionen	30



Unterrichtsmaterialien – Geraden & Lineare Funktionen


MmF

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ [Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Proportionalitäten](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Geradengleichungen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Gleichungssysteme in 2 Variablen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Funktionen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Lineare Funktionen](#)

Wie darf ich die Aufgaben verwenden?


MmF

Das **MmF-Team** entwickelt eigene Aufgabenstellungen. Sie sind mit dem Projektlogo **MmF** gekennzeichnet.

Diese Aufgaben werden unter einer Creative Commons BY-NC-ND 4.0 Lizenz bereitgestellt.

Das bedeutet:



- Die Aufgaben stehen *kostenfrei* zur Verfügung.
- Es dürfen auch nur einzelne Aufgaben aus der Aufgabensammlung für nicht-kommerzielle Zwecke (Lehre, Übungen, Prüfungen, etc.) kopiert werden. In diesem Fall *muss* der Ursprung der Aufgabe aber z.B. anhand des MmF-Logos erkennbar sein.

Alle anderen Aufgaben stammen aus den SR(D)P-Aufgabenpools der [AHS](#) bzw. [BHS](#).

Bei diesen Aufgaben ist das BMBWF-Logo  mit der entsprechenden Aufgabe verlinkt.

Am Ende jedes Abschnitts befinden sich die Ergebnisse der Aufgaben.

Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

1. STEIGUNGSMESSUNG VON GERADEN



MmF-Materialien



Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Steigungsmessung von Geraden](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Winkelfunktionen im rechtwinkligen Dreieck](#)

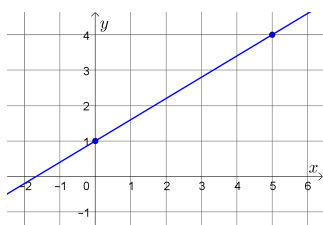
In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

1.1

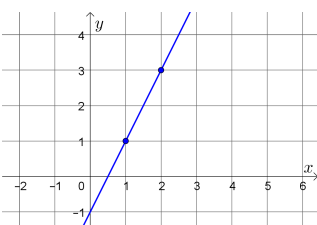


Eine Gerade ist im Koordinatensystem dargestellt.

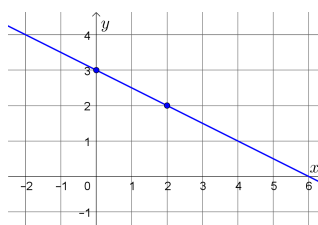
- 1) Zeichne ein Steigungsdreieck der Gerade mit ganzzahligen Kathetenlängen ein.
- 2) Berechne die Steigung k der Gerade.
- 3) Berechne die Steigung (bzw. das Gefälle) der Gerade in Prozent.
- 4) Berechne den Steigungswinkel (bzw. den Neigungswinkel) der Gerade.



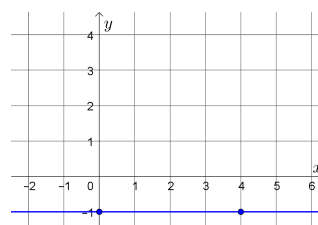
a)



b)



c)

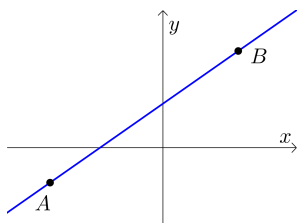


d)

1.2

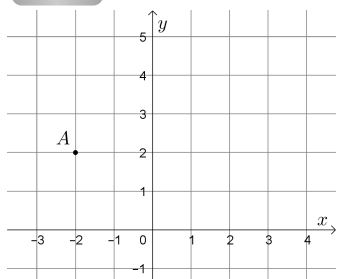


Die dargestellte Gerade verläuft durch die Punkte $A = (-3,2 \mid -0,8)$ und $B = (2,9 \mid 4,1)$.



- a) Zeichne ein Steigungsdreieck mit den Punkten A und B ein.
- b) Berechne die Steigung der Gerade.
- c) Berechne den Steigungswinkel der Gerade.
- d) Für ein anderes Steigungsdreieck der gleichen Gerade gilt: $\Delta y = 42$. Berechne das zugehörige Δx dieses Steigungsdreiecks.

1.3



Zeichne links eine Gerade durch den Punkt A mit Steigung k ein.

- a) $k = 2$
- b) $k = -1$
- c) $k = 0,2$

Hinweis: Stelle $k = 0,2$ als vollständig gekürzten Bruch $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dar.

1.4



Rechts ist eine Internet-Werbung für einen E-Scooter dargestellt.

- a) Angenommen, der E-Scooter kann Straßen mit bis zu 15° Steigungswinkel überwinden.
Berechne, welche Steigung in Prozent der E-Scooter dann maximal überwinden kann.
- b) Angenommen, der E-Scooter kann Straßen mit bis zu 15 % Steigung überwinden.
Berechne, welchen Steigungswinkel der E-Scooter dann maximal überwinden kann.



1.5



Lange galt die Baldwin Street in Neuseeland mit 35 % Steigung als steilste Straße der Welt.

Im Jahr 2019 wurde die Ffordd Pen Llech in Wales mit 37,45 % Steigung zur steilsten Straße der Welt erklärt.

- a) Um wie viele *Prozentpunkte* ist die Ffordd Pen Llech steiler als die Baldwin Street?

Um wie viel *Prozent* ist die Ffordd Pen Llech steiler als die Baldwin Street?

Anmerkung: Beim Vergleich von Prozentpunkten geht es um Differenzen $\ominus - \star$. Bei prozentuellen Vergleichen geht es um Quotienten $\frac{\ominus}{\star}$.

- b) Berechne jeweils den Steigungswinkel der beiden Straßen.

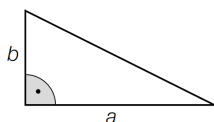
Um wie viel Prozent ist der Steigungswinkel der Ffordd Pen Llech größer als jener der Baldwin Street?

1.6



Die alpine Skiweltmeisterschaft 2015 fand in Vail/Beaver Creek (USA) statt.

Das größte Gefälle der Abfahrtsstrecke Birds of Prey beträgt 45 %. In der nachstehenden Abbildung ist dieses Gefälle durch ein Steigungsdreieck veranschaulicht.



$\frac{a}{b} = 0,45$	☐
$\frac{b}{a} = 45$	☐
$b = \frac{45}{100} \cdot a$	☐
$b = a \cdot \tan(45^\circ)$	☐
$\arctan\left(\frac{b}{a}\right) = 45^\circ$	☐

- 1) Kreuzen Sie den auf die Seitenlängen a und b zutreffenden Zusammenhang an. [1 aus 5]

1.7



Eine Bergstraße hat die konstante Steigung 12 %. Das Auto fährt diese Straße 2 km lang bergauf.

Fertige eine Skizze an.

- a) Berechne den Steigungswinkel α . Hinweis: Mit welcher Winkelfunktion kannst du das Seitenverhältnis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ berechnen?
- b) Welchen Höhenunterschied h in Metern überwindet das Auto dabei?
- c) Wie viele Minuten dauert diese Fahrt mit der mittleren Geschwindigkeit 30 km/h?

1.8



Die Fahrtstrecke im Semmering-Basistunnel wird 27,3 Kilometer lang sein und eine (als konstant angenommene) Steigung von 0,84 % haben. In der folgenden Berechnung des Höhenunterschieds Δh in Metern auf dieser Fahrtstrecke ist genau ein Fehler passiert:

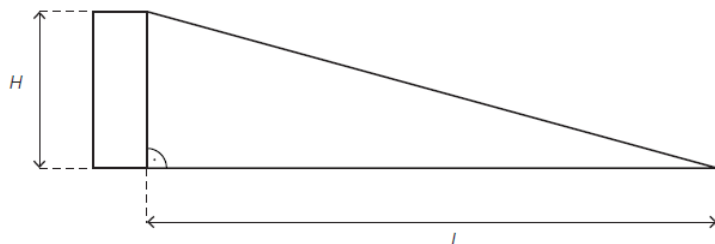
Steigungswinkel: $\alpha = \arctan(0,0084) = 0,481\,27\dots^\circ$

$$\Delta h = \frac{27\,300\text{ m}}{\sin(\alpha)} = 3\,250\,114,6\dots\text{ m}$$

- 1) Stellen Sie die Berechnung und das Ergebnis richtig.

1.9

Ein Skatepark ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können. Im einfachsten Fall ist eine Startrampe eine geneigte ebene Fläche:



Ein Hersteller von Startrampen gibt folgende Maße an: Höhe $H = 1,45$ m, Länge $L = 5,3$ m.

Eine Norm schreibt vor, dass die Steigung maximal 20 % betragen darf.

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob diese Norm eingehalten wird.

1.10



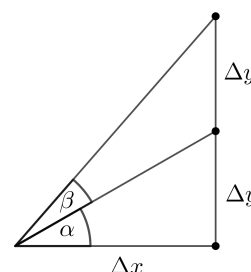
Im rechts dargestellten Bild gilt: $\alpha = 30^\circ$, $\Delta x = 42$ m

- a) Berechne den Winkel β .

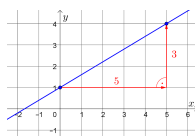
Eine doppelt so große Steigung bedeutet also *nicht* einen doppelt so großen Steigungswinkel.

Steigung und Steigungswinkel sind *nicht* direkt proportional.

- b) Um wie viel Prozent ist β kleiner als α ?



1.1 a) 1)



2) $k = \frac{3}{5} = 0,6$ 3) Steigung: 60 % 4) Steigungswinkel: $\alpha = 30,96^\circ \dots$

b) 1)



2) $k = \frac{2}{1} = 2$ 3) Steigung: 200 % 4) Steigungswinkel: $\alpha = 63,43^\circ \dots$

c) 1)



2) $k = \frac{-2}{4} = -0,5$ 3) Gefälle: 50 % 4) Neigungswinkel: $\alpha = 26,56^\circ \dots$

d) 1) Jedes „Steigungsdreieck“ ist eine waagrechte Strecke. 2) $k = 0$ 3) 0 % 4) $\alpha = 0^\circ$

1.2 Steigung: $k = 0,803\dots$ Steigungswinkel: $\alpha = 38,77^\circ$ $\Delta x = 52,28\dots$

1.3 a) Steigungsdreieck mit $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$ b) Steigungsdreieck mit $\Delta x = 1$, $\Delta y = -1$ c) Steigungsdreieck mit $\Delta x = 5$, $\Delta y = 1$

1.4 a) 26,79... % b) 8,53...°

1.5 a) um 2,45 Prozentpunkte um 7 % b) 19,29...° bzw. 20,53...° um 6,43... %

1.6 Richtig ist die 3. Antwort von oben.

1.7 a) $\alpha = 6,84^\circ$ b) $h = 238,2\dots$ m c) 4 min

1.8 $\Delta h = 27\,300 \text{ m} \cdot \sin(\alpha) = 229,3\dots$ m

1.9 Die Rampe hat eine Steigung von 27,3... %. Die Norm wird also nicht eingehalten.

1.10 a) $\beta = 19,10^\circ$ b) β ist um 36,3... % kleiner als α .

2. PROPORTIONALITÄTEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ [Arbeitsblatt – Proportionalitäten](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

2.1

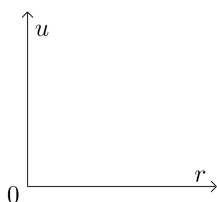
MmF

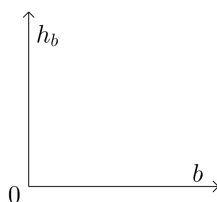
Stelle eine Formel für die gegebenen Größen auf, und trage sie unten in das Kästchen ein.

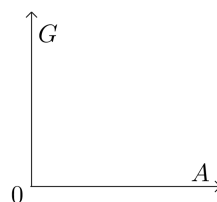
Entscheide, ob die beiden variablen Größen direkt oder indirekt proportional sind.

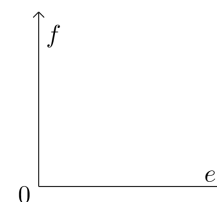
Skizziere den Zusammenhang zwischen den beiden variablen Größen im Koordinatensystem.

- a) Radius r und Umfang u eines Kreises
- b) Seitenlänge b und zugehörige Höhe h_b von Dreiecken mit Flächeninhalt $A = 6 \text{ cm}^2$.
- c) Ankathete A und Gegenkathete G des Winkels $\alpha = 30^\circ$ in rechtwinkligen Dreiecken
- d) Längen der Diagonalen e und f in Deltoiden mit Flächeninhalt $A = 42 \text{ cm}^2$









2.2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Auf einer Luftpumpe für ein aufblasbares Board sind die folgenden zwei Einheiten für den Druck angegeben: pound-force per square inch (psi) und Bar (bar). Die nachstehende Skala zeigt den Zusammenhang zwischen den beiden Einheiten, wobei die Maßzahlen direkt proportional zueinander sind.



- 1) Vervollständigen Sie die obige Skala durch Eintragen des fehlenden Wertes.

2.3

MmF

Bei einem 400 m-Lauf wurden auch die Durchlaufzeiten des Siegers bei 200 m, 300 m und 350 m gestoppt.

Strecke in m	200	300	350	400
Zeit in Sekunden	24,4	36,6	42,9	48,8

Bei einem gleichmäßigen Lauf (immer gleich schnell) wären die Werte direkt proportional. Ist dies der Fall?

2.4

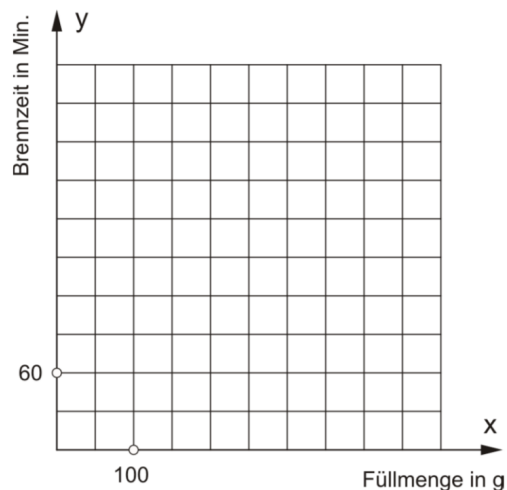


Bei Trekkingtouren werden gerne Gaskocher verwendet. Sie bestehen aus einer Gaskartusche und einem aufschraubbaren Kochaufsatz. Die Füllmenge und die Brennzeit des Gaskochers sind direkt proportional.

- a) Ergänze die fehlenden Werte in der Tabelle.
- b) Veranschauliche die Tabelle, indem du alle Wertepaare (Füllmenge, Brennzeit) als Punkte in das vorbereitete Koordinatensystem einzeichnest.

Es genügt, wenn du die Punkte gut schätzt.

Füllmenge	Brennzeit in Minuten
480	300
160	
320	
400	
	75
	140
	45



2.5

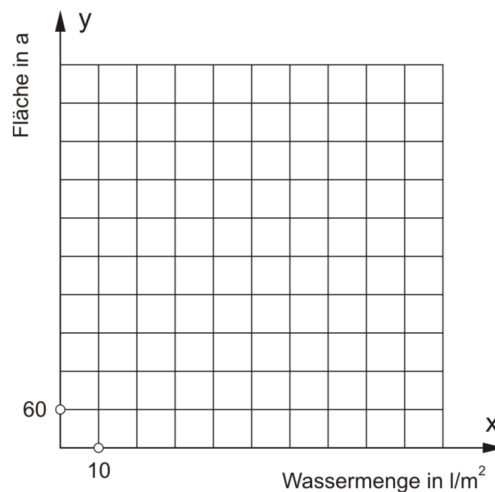


In einer trockenen Gegend bekommt ein Bauer eine Wasserration zum Bewässern seiner Felder zugeteilt. Mit dieser Wasserration muss er auskommen. Die pro m^2 verwendete Wassermenge und die Fläche, die er mit seiner gesamten Wasserration bewässern kann, sind indirekt proportional.

- a) Ergänze die fehlenden Werte in der Tabelle.
- b) Veranschauliche die Tabelle, indem du alle Wertepaare (Wassermenge, Fläche) als Punkte in das vorbereitete Koordinatensystem einzeichnest.

Es genügt, wenn du die Punkte gut schätzt.

Wassermenge in Liter pro m^2	bewässerte Fläche in a
24	100
8	
60	
15	
	600
	60
	24



2.6

MmF

Für die Masse m , das Volumen V und die Dichte ρ eines Körpers gilt: $\rho = \frac{m}{V}$

Um wie viel % wird die Dichte größer/kleiner, wenn ...

- a) ... die Masse um 20 % vergrößert wird und das Volumen gleich bleibt?
- b) ... das Volumen um 20 % verkleinert wird und die Masse gleich bleibt?
- c) ... gleichzeitig die Masse um 20 % vergrößert und das Volumen um 20 % verkleinert wird?

2.7

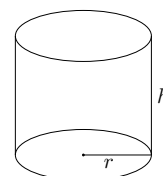
MmF

Für den Radius r , die Höhe h und das Volumen V eines Drehzylinders gilt:

$$V = r^2 \cdot \pi \cdot h$$

Um wie viel % wird das Volumen größer/kleiner, wenn ...

- a) ... die Höhe um 20 % vergrößert wird und der Radius gleich bleibt?
- b) ... der Radius um 20 % verkleinert wird und die Höhe gleich bleibt?
- c) ... gleichzeitig die Höhe um 20 % vergrößert und der Radius um 20 % verkleinert wird?



2.8

MmF

Für den Radius r und das Volumen V einer Kugel gilt: $V = \frac{4 \cdot r^3 \cdot \pi}{3}$

- a) Um wie viel % wird das Volumen größer, wenn der Radius um 10 % vergrößert wird?
- b) Um wie viel % wird das Volumen kleiner, wenn der Radius um ein Viertel seines Werts verkleinert wird?
- c) ★ Um wie viel % muss der Radius vergrößert werden, damit das Volumen um 10 % größer wird?

2.9

MmF

Das *Ohmsche Gesetz* $I = \frac{U}{R}$ stellt einen Zusammenhang zwischen der Stromstärke I , der elektrischen Spannung U und dem elektrischen Widerstand R her.

- a) Entscheide, ob die angegebenen Größen direkt/indirekt/nicht proportional sind.
 - 1) Wenn R gleich bleibt, dann sind I und U ...
 - ☐ ...direkt proportional.
 - ☐ ...indirekt proportional.
 - ☐ ...nicht proportional.
 - 2) Wenn U gleich bleibt, dann sind I und R ...
 - ☐ ...direkt proportional.
 - ☐ ...indirekt proportional.
 - ☐ ...nicht proportional.
 - 3) Wenn I gleich bleibt, dann sind U und R ...
 - ☐ ...direkt proportional.
 - ☐ ...indirekt proportional.
 - ☐ ...nicht proportional.
- b) Fülle die Lücken aus. Größen, die im Satz nicht vorkommen, bleiben gleich groß.
 - 1) Wenn die Spannung verdreifacht wird, dann wird die Stromstärke _____.
 - 2) Wenn der Widerstand verdreifacht wird, dann wird die Stromstärke _____.
- c) Die Stromstärke wird um 42 % größer. Die Spannung wird um 23 % größer.
Um wie viel % muss der Widerstand vergrößert/verkleinert werden?

2.10



Stelle aus der Beschreibung eine Formel auf.

- Der elektrische Widerstand R eines Leiters ist direkt proportional zu seiner Länge l und indirekt proportional zu seiner Querschnittsfläche A . Der Proportionalitätsfaktor ist der spezifische Widerstand ρ .
- Die momentane Temperaturänderung T' eines abkühlenden Tees ist direkt proportional zur Differenz der aktuellen Temperatur T und der Umgebungstemperatur T_U . Der Proportionalitätsfaktor ist k .

2.11

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eine Wohnanlage wird saniert. Die Kosten für die Sanierung in Höhe von € 52 647,60 werden proportional zur Wohnungsgröße aufgeteilt. Die jeweiligen Größen der 4 Wohnungen sind: 52 m^2 , 60 m^2 , 78 m^2 und 102 m^2 .

- Berechnen Sie den Kostenanteil für die Sanierung der größten Wohnung in Euro.

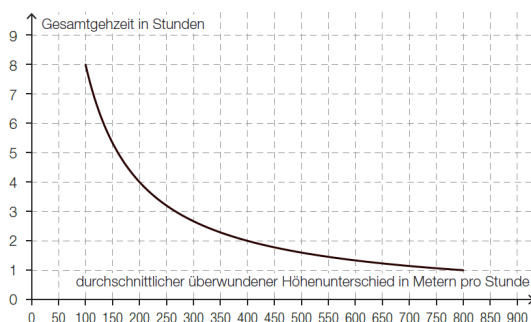
2.12



Herr Kundmann hat voriges Jahr seine Himbeermarmelade selbst gemacht. Er kann sich noch erinnern, dass er 10 kg Himbeeren hatte und dass er Himbeeren und Zucker im Verhältnis 8:5 eingekocht hat. Die Marmelade war ihm aber viel zu süß. Heuer möchte er im Vergleich um 40 % weniger Zucker verwenden, hat aber 13,6 kg Himbeeren geerntet. Berechne die dazupassende Zuckermenge in kg.

2.13

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung



Bei der Besteigung eines bestimmten Berges ist die Gesamtzeit indirekt proportional zu dem durchschnittlichen überwundenen Höhenunterschied in Metern pro Stunde (siehe nebenstehende Abbildung).

- Lesen Sie aus der Abbildung ab, welcher Höhenunterschied bei dieser Besteigung insgesamt überwunden werden muss.

2.14

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Windgeschwindigkeiten werden oft in Kilometern pro Stunde (km/h) oder Knoten (kn) angegeben.

Es gilt: $1 \text{ kn} = 1,852 \text{ km/h}$

Zwischen der Windgeschwindigkeit v (in km/h) und der Windgeschwindigkeit v_k (in kn) besteht ein direkt proportionaler Zusammenhang.

- Stellen Sie eine Gleichung auf, die diesen Zusammenhang beschreibt.

2.15

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Der Luftwiderstand F_W , den ein Apfel während seines Falls von einem Baum erfährt, lässt sich durch folgende Formel berechnen:

$$F_W = k \cdot v^2$$

F_W ... Luftwiderstand

k ... Konstante

v ... Geschwindigkeit des Apfels

Kreuzen Sie die zutreffende Aussage an. [1 aus 5]

Der Luftwiderstand F_W ist proportional zur Geschwindigkeit v .	☐
Wird der Luftwiderstand F_W verdoppelt, vervierfacht sich die Geschwindigkeit v .	☐
Der Luftwiderstand F_W ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v .	☐
Haben Luftwiderstand F_W und Geschwindigkeit v den gleichen Zahlenwert, so gilt $k = 1$.	☐
Nimmt die Geschwindigkeit v um den Wert 1 zu, dann nimmt der Luftwiderstand um den Wert k zu.	☐

2.16

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Der Body-Mass-Index (BMI) ist eine Maßzahl für die Bewertung der Körpermasse eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße. Es gilt:

$$\text{BMI} = \frac{m}{l^2}$$

m ... Körpermasse in kg

l ... Körpergröße in m

- 1) Berechnen Sie, wie viel Kilogramm die Person abnehmen muss, wenn sie eine Körpergröße von 186 cm hat und einen BMI von 22 kg/m^2 erreichen will.
- 2) Begründen Sie anhand der angegebenen Formel, warum auch der BMI um 10 % sinkt, wenn die Körpermasse um 10 % abnimmt.

2.17

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eine Wand wird mit einem Beamer beleuchtet. Die Beleuchtungsstärke B durch den Beamer ist indirekt proportional zum Quadrat der Entfernung x von der beleuchteten Wand.

B ... Beleuchtungsstärke in Lux

x ... Entfernung zwischen Beamer und beleuchteter Wand in m

- 1) Berechnen Sie, um wie viel Prozent man die Entfernung verändern muss, um die Beleuchtungsstärke auf das 1,5-Fache zu erhöhen.
- 2) Interpretieren Sie anhand des Ergebnisses, ob es sich um eine Erhöhung oder Verringerung der Entfernung handelt.

2.18

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die Anzahl der Heizungstage, für die ein Vorrat an Heizöl in einem Tank reicht, ist indirekt proportional zum durchschnittlichen Tagesverbrauch x (in Litern).

Aufgabenstellung:

In einem Tank befinden sich 1500 Liter Heizöl. Geben Sie einen Term an, der die Anzahl $d(x)$ der Heizungstage in Abhängigkeit vom durchschnittlichen Tagesverbrauch x bestimmt!

$$d(x) = \underline{\hspace{10em}}$$

2.19

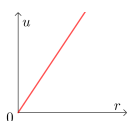
Aus drei unterschiedlich großen Schneekugeln wird ein Schneemann gebaut. Der Radius der untersten Kugel ist um 10 % größer als jener der mittleren Kugel. Der Radius der obersten Kugel ist um 10 % kleiner als jener der mittleren Kugel. Das Verhältnis des Volumens der untersten Kugel V_u zu jenem der obersten Kugel V_o kann auf verschiedene Arten angegeben werden:

als ganzzahliges Verhältnis: $V_u : V_o = \boxed{} : \boxed{}$

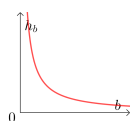
als Verhältnis in Bezug auf 1: $V_u : V_o = 1 : \boxed{}$

1) Ergänzen Sie in den oben angegebenen Verhältnissen jeweils die fehlenden Zahlen.

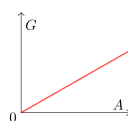
2.1 a) $u = 2 \cdot \pi \cdot r$



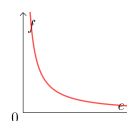
b) $b \cdot h_b = 12$



c) $\frac{G}{A} = 0,577...$



d) $e \cdot f = 84$



2.2 15 psi = 1,03 bar

2.3 Nein, weil $\frac{200}{24,4} \neq \frac{350}{42,9}$

2.4

Füllmenge	Brennzeit in Minuten
480	300
160	100
320	200
400	250
120	75
224	140
72	45

2.5

Wassermenge in Liter pro m ²	bewässerte Fläche in a
24	100
8	300
60	40
15	160
4	600
40	60
100	24

2.6 a) Die Dichte wird um 20 % größer. b) Die Dichte wird um 25 % größer. c) Die Dichte wird um 50 % größer.

2.7 a) Das Volumen wird um 20 % größer. b) Das Volumen wird um 36 % kleiner. c) Das Volumen wird um 23,2 % kleiner.

2.8 a) Das Volumen wird um 33,1... % größer. b) Das Volumen wird um 57,81... % kleiner.

c) Der Radius muss um 3,22... % vergrößert werden.

2.9 a) 1) direkt proportional 2) indirekt proportional 3) direkt proportional

b) 1) verdreifacht 2) gedrittelt

c) Der Widerstand muss um 13,38... % verkleinert werden.

2.10 a) $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ b) $T' = k \cdot (T - T_U)$

2.11 € 18 390,60

2.12 5,1 kg

2.13 800 Höhenmeter

2.14 $v = 1,852 \cdot v_k$ oder $v_k = 0,539... \cdot v$

2.15 Der Luftwiderstand F_W ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit v .

2.16 1) Die Person muss 34,58... kg abnehmen.

2) $BMI_{\text{neu}} = \frac{0,9 \cdot m}{l^2} = 0,9 \cdot \frac{m}{l^2} = 0,9 \cdot BMI_{\text{alt}}$ Der neue BMI ist also um 10 % kleiner als der alte BMI.

2.17 Die Entfernung muss um 18,35... % verringert werden.

2.18 $d(x) = \frac{1500}{x}$

2.19 $V_u : V_o = 1331 : 729$ $V_u : V_o = 1 : 0,547...$

3. LINEARE GLEICHUNGEN & GLEICHUNGSSYSTEME IN ZWEI VARIABLEN



MmF-Materialien



MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Geradengleichungen](#)
- ✓ [Arbeitsblatt – Gleichungssysteme in 2 Variablen](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

3.1

MmF

Prüfe, ob das Zahlenpaar eine Lösung der Gleichung $3 \cdot x - 2 \cdot y = 12$ ist.

- a) $(6 \mid -3)$ b) $(2 \mid 3)$ c) $(12 \mid -12)$ d) $(8 \mid 6)$ e) $(-2 \mid -9)$

3.2

MmF

Ermittle fünf Zahlenpaare, die Lösungen der folgenden Gleichung sind.

- a) $x + 2 \cdot y = 24$ b) $100 \cdot x + 8 \cdot y = 1000$ c) $3 \cdot x + 0 \cdot y = 12$ d) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0$

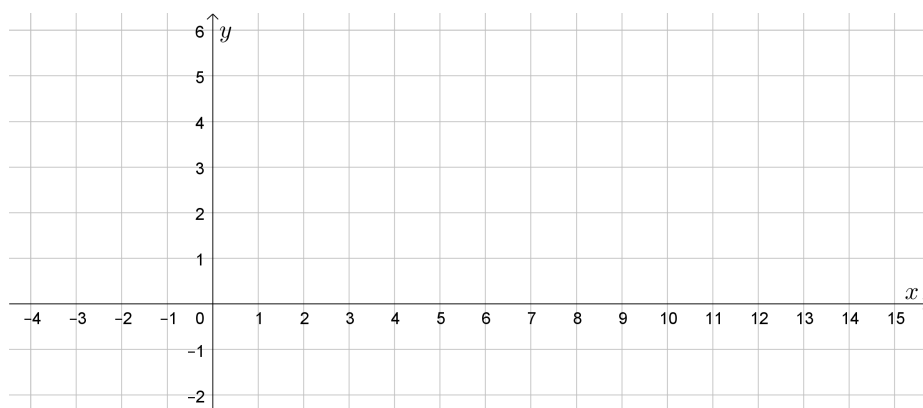
3.3

MmF

Ein Ausschnitt der Zahlenebene ist unten dargestellt.

Ermittle alle Lösungen $(x \mid y)$ der Gleichung $x + 3 \cdot y = 14$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$, die in diesem Ausschnitt liegen.

Zeichne die entsprechenden Gitterpunkte in das Koordinatensystem ein.



3.4

MmF

Prüfe, ob die Gleichung dieselbe Lösungsmenge wie $10 \cdot x - 15 \cdot y = 40$ hat.

- a) $-8 \cdot x + 12 \cdot y = 32$ b) $x = \frac{3}{2} \cdot y - 4$ c) $3 \cdot y - 2 \cdot x + 8 = 0$ d) $y = \frac{2 \cdot x - 8}{3}$ e) $20 \cdot y - 30 \cdot x = 80$

3.5

MmF

Schreib den Text als lineare Gleichung in zwei Variablen an.

Ermittle drei ganzzahlige Zahlenpaare, die diese Bedingung erfüllen.

- Das Vierfache einer Zahl ist um eins größer als eine zweite Zahl.
- Ein Fünftel einer Zahl ist um eins kleiner als eine zweite Zahl.
- Vermindert man das Dreifache einer Zahl um das Doppelte einer zweiten Zahl, so ergibt sich 18.

3.6

MmF

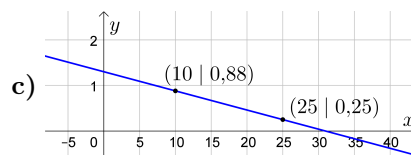
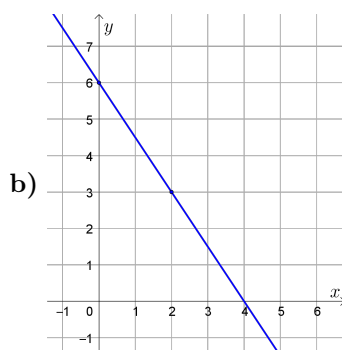
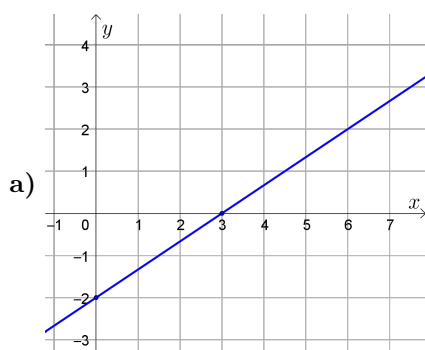
Eine Gerade hat die Steigung k und verläuft durch den Punkt P . Erstelle eine Gleichung der Gerade.

- a) $P = (4 | 6)$, $k = 1$ b) $P = (3 | 1)$, $k = 2$ c) $P = (4 | -2)$, $k = -3$ d) $P = (-3 | -5)$, $k = \frac{5}{3}$

3.7

MmF

Ermittle eine Gleichung der dargestellten Gerade in der Form $y = k \cdot x + d$.

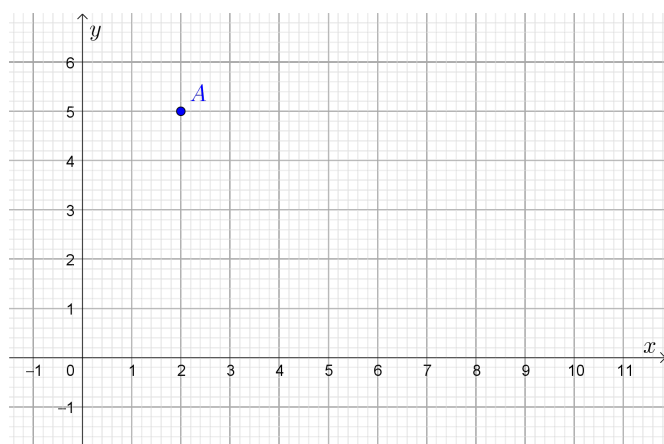


3.8

MmF

Eine Gerade verläuft durch die Punkte $A = (2 | 5)$ und $B = (9 | y_B)$.

- Berechne y_B so, dass die Gerade die Steigung $k = -0,6$ hat.
- Zeichne den Punkt B und die Gerade unten ein.
- Ermittle eine Gleichung der Gerade in der Form $y = k \cdot x + d$.
- Berechne die Schnittpunkte der Gerade mit den Koordinatenachsen.



3.9

MmF

Ergänze die fehlenden Koordinaten so, dass alle Punkte auf einer Gerade liegen.

x	2	5	7	
y	1,5		-6	-9

3.10

MmF

Überprüfe jeweils rechnerisch, ob die drei Punkte P , Q und R auf einer Gerade liegen.

- a) $P = (0,5 \mid -3)$, $Q = (3 \mid 2)$, $R = (0,25 \mid -3,5)$ b) $P = (2 \mid 5)$, $Q = (-1 \mid 3)$, $R = (0 \mid 4)$

3.11

MmF

Zwei Geraden in der Ebene haben genau eine der drei folgenden Lagebeziehungen:

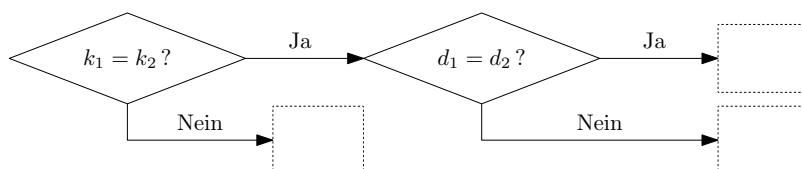
- i) ident ii) parallel (aber nicht ident) iii) schneidend (aber nicht ident)

- a) Die Gleichungen zweier Geraden g und h sind in der Form

$$g: y = k_1 \cdot x + d_1 \quad \text{und} \quad h: y = k_2 \cdot x + d_2$$

gegeben. Die Lagebeziehung der Geraden hängt von k_1 , k_2 , d_1 bzw. d_2 ab.

Trage die 3 Lagebeziehungen i), ii) bzw. iii) richtig in die Kästchen ein:



- b) Begründe, welche Lagebeziehung die beiden Geraden haben.

1) $g: y = 3 \cdot x + 5$ und $h: y = 2 \cdot x - 3$

4) $g: y = -\frac{1}{5} \cdot x + 8$ und $h: y = -0,2 \cdot x - 3$

2) $g: y = -\frac{2}{3} \cdot x + \frac{1}{4}$ und $h: y = -\frac{2}{3} \cdot x - 4$

5) $g: y = 0,1 \cdot x + 1$ und $h: y = \frac{1}{10} \cdot x + 1$

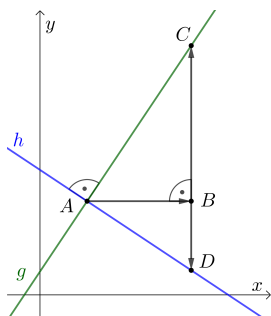
3) $g: y = 0,5 \cdot x + \frac{1}{4}$ und $h: y = \frac{1}{2} \cdot x + 0,25$

6) $g: y = 2 \cdot x + 5$ und $h: y = -2 \cdot x + 5$

3.12

MmF

Wenn zwei Geraden einander im rechten Winkel schneiden, dann gibt es einen Zusammenhang zwischen ihren Steigungen. Die beiden Geraden g und h schneiden einander im Punkt A im rechten Winkel.



Ausgehend vom Punkt A ist ein Steigungsdreieck $\triangle ABC$ von g eingezeichnet. Ausgehend vom Punkt A ist ein Steigungsdreieck $\triangle ABD$ von h eingezeichnet.

- a) Begründe, warum die beiden Steigungsdreiecke ähnlich zueinander sind.

Es gilt also: $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$

Die Steigung k_1 von g ist positiv. Die Steigung k_2 von h ist negativ.

- b) Zeige, dass $k_1 \cdot k_2 = -1$ gilt.

3.13

MmF

Eine Gerade verläuft durch den Punkt C und steht normal auf die Gerade durch die Punkte A und B .
Erstelle eine Gleichung der Gerade.

- a) $A = (-1 | 2)$, $B = (3 | 6)$, $C = (3 | 1)$ b) $A = (1 | 1)$, $B = (-1 | 5)$, $C = (3 | 3)$
c) $A = (-2 | 5)$, $B = (2 | -1)$, $C = (-1 | 2)$ d) $A = (3 | 7)$, $B = (-2 | -2)$, $C = (0 | 2)$

3.14

MmF

Aus der **Linearfaktorform** $y = k \cdot (x - x_N)$ ist die Steigung $k \neq 0$ einer Gerade und ihre Schnittstelle x_N mit der x -Achse direkt abzulesen.

Der Punkt $(x_N | 0)$ liegt auf der Gerade, weil $k \cdot (x_N - x_N) = k \cdot 0 = 0$ gilt.

Wandle die gegebene Geradengleichung in die Linearfaktorform um, und ermittle x_N .

Hinweis: Hebe k heraus.

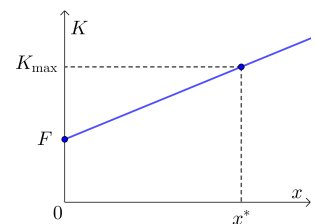
- a) $y = 2 \cdot x - 6$ b) $y = -3 \cdot x - 6$ c) $y = \frac{1}{2} \cdot x - 1$ d) $y = -\frac{3}{2} \cdot x + \frac{2}{3}$

3.15

MmF

Zwischen den Größen x und K besteht der dargestellte lineare Zusammenhang.
Stelle mithilfe von x^* , F und $K_{\max}$ eine Gleichung für diesen Zusammenhang auf.

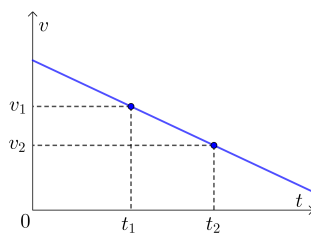
$$K = \boxed{} \cdot x + \boxed{}$$



3.16

MmF

Zwischen den Größen t und v besteht ein linearer Zusammenhang:



$v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_1) + v_1$	☐
$v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_1) + v_2$	☐
$v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_2) + v_1$	☐
$v = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_2) + v_2$	☐
$v = \frac{v_1 - v_2}{t_1 - t_2} \cdot (t - t_1) + v_1$	☐

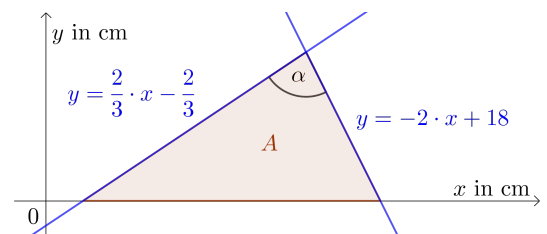
Kreuze rechts jene 3 Gleichungen an, die diesen Zusammenhang richtig beschreiben.

3.17

MmF

Das dargestellte Dreieck wird durch zwei Geraden und einen Teil der x -Achse begrenzt.

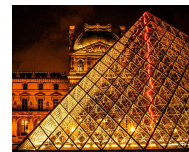
- a) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks.
b) Berechne den eingezeichneten spitzen Winkel α .



3.18 Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Die Glaspypamide des Louvre ist eine quadratische Pyramide mit einer Basislänge von 35,42 Metern (m) und einer Höhe von 21,65 m.

Eine Seitenfläche besteht aus 18 Dreiecken und 153 Rauten und nimmt eine Glasfläche von 486 m^2 ein. Die Glasfläche einer Raute ist doppelt so groß wie jene eines Dreiecks.



- 1) Berechnen Sie die Glasfläche eines dreieckigen Glassegments.

3.19 Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten. Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar 2617 €, jenes von Katharina betrug 3433 €.

- 1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

3.20 Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Ein Hotel kann 93 Zimmer vermieten. Das Hotel verfügt über 174 Betten, die als Einbettzimmer und auch Doppelbettzimmer angeboten werden.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl an Ein- und Doppelbettzimmern.
- 2) Berechnen Sie die Höhe der Einnahmen bei voller Auslastung pro Nacht, wenn die Übernachtung inkl. Frühstück im Einbettzimmer 90 € und im Doppelbettzimmer 75 € pro Person kostet.

3.21 Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Für ein öffentliches Verkehrsmittel wurden an einem Tag 150 000 Fahrscheine verkauft.

Ein Vollpreisfahrschein kostet €2,60, ein ermäßigter Fahrschein €1,20.

Durch den Verkauf von x Vollpreisfahrscheinen und y ermäßigten Fahrscheinen wurden an diesem Tag insgesamt €337 500 eingenommen.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y .
- 2) Berechnen Sie x und y .

3.22 Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Weine der Sorten Zweigelt und Grüner Veltliner werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.

1 Kiste Zweigelt und 1 Karton Grüner Veltliner kosten insgesamt 47,40 €.

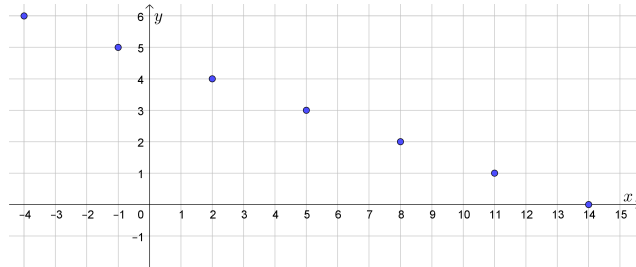
2 Kisten Grüner Veltliner und 1 Karton Zweigelt kosten insgesamt 72 €.

- 1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche Zweigelt und der Preis für eine Flasche Grüner Veltliner berechnet werden können.
- 2) Berechnen Sie den Preis für eine Flasche Zweigelt und den Preis für eine Flasche Grüner Veltliner.

3.1 a) nein b) nein c) nein d) ja e) ja

3.2 a) Zum Beispiel: $(24 | 0), (22 | 1), (20 | 2), \dots$ b) Zum Beispiel: $(10 | 0), (18 | -100), (26 | -200), \dots$
c) Zum Beispiel: $(4 | 0), (4 | 1), (4 | 2), \dots$ d) Zum Beispiel: $(2 | 3), (4 | 6), (6 | 9), \dots$

3.3 $(-4 | 6), (-1 | 5), (2 | 4), (5 | 3), (8 | 2), (11 | 1), (14 | 0)$



3.4 a) nein b) nein c) ja d) ja e) nein

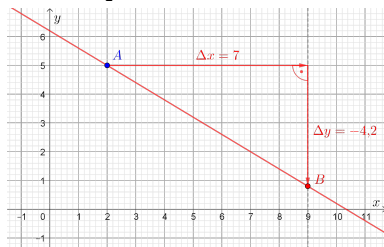
3.5 a) $4 \cdot x = y + 1$ Zum Beispiel: $(0 | -1), (1 | 3), (2 | 7)$

b) $\frac{1}{5} \cdot x = y - 1$ Zum Beispiel: $(5 | 2), (10 | 3), (15 | 4)$

c) $3 \cdot x - 2 \cdot y = 18$ Zum Beispiel: $(6 | 0), (8 | 3), (10 | 6)$

3.6 a) $y = x + 2$ b) $y = 2 \cdot x - 5$ c) $y = -3 \cdot x + 10$ d) $y = \frac{5}{3} \cdot x$

3.7 a) $y = \frac{2}{3} \cdot x - 2$ b) $y = -\frac{3}{2} \cdot x + 6$ c) $y = -0,042 \cdot x + 1,3$



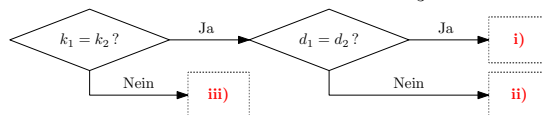
3.8 a) $y_B = 0,8$ b) c) $y = -0,6 \cdot x + 6,2$ d) $S_x = (10,33... | 0), S_y = (0 | 6,2)$

x	2	5	7	9
y	1,5	-3	-6	-9

3.10 a) Ja, weil die Gerade durch P und Q hat die gleiche Steigung 2 wie die Gerade durch P und R .

b) Nein, die Gerade durch P und Q hat die Steigung $\frac{2}{3}$, aber die Gerade durch P und R hat die Steigung $\frac{1}{2}$.

3.11 a)



b) schneidend, weil die Geraden unterschiedliche Steigungen haben

c) parallel, weil die Geraden bei gleichen Steigungen unterschiedliche Ordinatenabschnitte haben

d) ident, weil sowohl die Steigungen als auch die Ordinatenabschnitte der Geraden gleich sind

e) parallel, weil die Geraden bei gleichen Steigungen unterschiedliche Ordinatenabschnitte haben

f) ident, weil sowohl die Steigungen als auch die Ordinatenabschnitte der Geraden gleich sind

g) schneidend, weil die Geraden unterschiedliche Steigungen haben

3.12 a) Aus $\alpha = \angle BAC$ folgt sowohl $\angle ACB = 90^\circ - \alpha$ (Winkelsumme 180°) als auch $\angle DAB = 90^\circ - \alpha$ (Komplementärwinkel).

b) Aus $k_1 = \frac{BC}{AB}$ und $k_2 = -\frac{BD}{AB}$ folgt, dass $k_1 \cdot k_2 = -\frac{BC}{AB} \cdot \frac{BD}{AB} = -1$.

3.13 a) $y = -x + 4$ b) $y = \frac{1}{2} \cdot x + \frac{2}{3}$ c) $y = \frac{2}{3} \cdot x + \frac{8}{3}$ d) $y = -\frac{5}{9} \cdot x + 2$

3.14 a) $y = 2 \cdot (x - 3), x_N = 3$ b) $y = -3 \cdot (x + 2), x_N = -2$ c) $y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2), x_N = 2$ d) $y = -\frac{3}{2} \cdot (x - \frac{4}{9}), x_N = \frac{4}{9}$

3.15 $K = \frac{K_{\max} - F}{x^*} \cdot x + F$

3.16 Gleichungen 1, 4 und 5 sind richtig.

3.17 a) $A = 16 \text{ cm}^2$ b) $\alpha = 82,87...^\circ$

3.18 $1,5 \text{ m}^2$

3.19 Das Grundgehalt beträgt 2260 €, die Abgeltung für eine Überstunde 25,50 €.

3.20 1) $x + y = 93, x + 2 \cdot y = 174$ $x \dots$ Anzahl Einzelzimmer $y \dots$ Anzahl Doppelzimmer 2) 13 230 €

3.21 1) $x + y = 150\,000, 2,6 \cdot x + 1,2 \cdot y = 337\,500$ 2) $x = 112\,500, y = 37\,500$

3.22 1 Flasche Zweigelt: 2,80 € 1 Flasche Grüner Veltliner: 2,30 €

4. FUNKTIONEN



MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

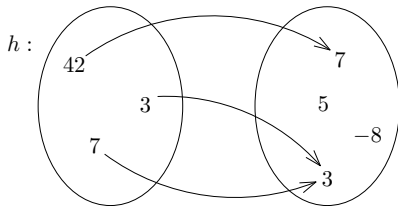
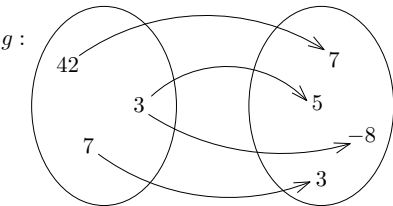
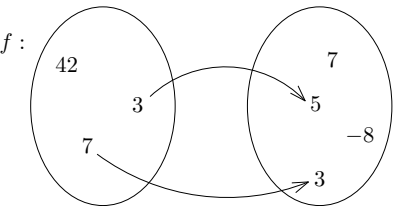
✓ [Arbeitsblatt – Funktionen](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 10. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

4.1

MmF

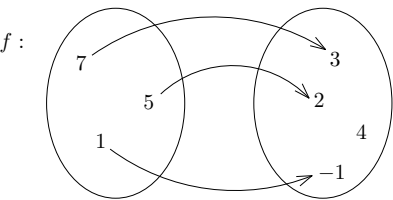
Begründe, welche der folgenden Zuordnungen eine Funktion mit Definitionsmenge $D = \{3, 7, 42\}$ sind.



4.2

MmF

Gib die Definitionsmenge D der dargestellten Funktion f an, und fülle die Wertetabelle aus.



$D =$

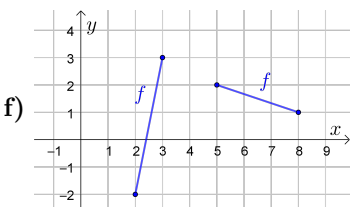
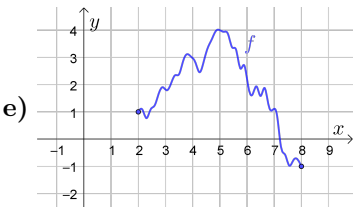
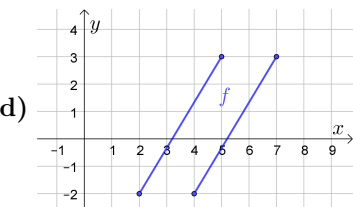
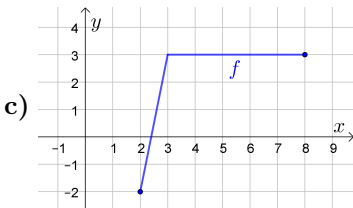
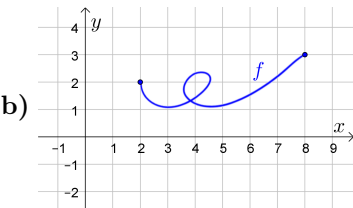
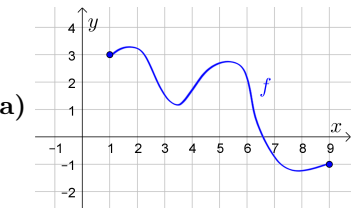
x			
$f(x)$			

4.3

MmF

Begründe, ob der Graph einer Funktion f mit $x \mapsto f(x)$ dargestellt ist.

Ermittle bei Funktionen die Definitionsmenge.



4.4



Begründe, ob die angegebene Zuordnung *sicher* eine Funktion ist.

- Definitionsmenge: alle 28 Schüler*innen einer Klasse
Wertemenge: $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$
Zuordnung: Schüler*in dieser Klasse $\mapsto$ Katalognummer
- Definitionsmenge: $\{1, 2, 3, \dots, 28\}$
Wertemenge: alle 28 Schüler*innen einer Klasse
Zuordnung: Katalognummer $\mapsto$ Schüler*in dieser Klasse
- Definitionsmenge: alle 28 Schüler*innen einer Klasse
Wertemenge: alle Unterrichtsfächer
Zuordnung: Schüler*in dieser Klasse $\mapsto$ Unterrichtsfach mit Notenstand „Sehr gut“
- Definitionsmenge: alle 28 Schüler*innen einer Klasse
Wertemenge: $\mathbb{R}$
Zuordnung: Schüler*in dieser Klasse $\mapsto$ aktuelle Körpergröße in Zentimeter
- Definitionsmenge: alle 28 Schüler*innen einer Klasse
Wertemenge: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
Zuordnung: Schüler*in dieser Klasse $\mapsto$ Anzahl Haustiere
- Definitionsmenge: alle 28 Schüler*innen einer Klasse
Wertemenge: alle E-Mail-Adressen
Zuordnung: Schüler*in dieser Klasse $\mapsto$ E-Mail-Adresse

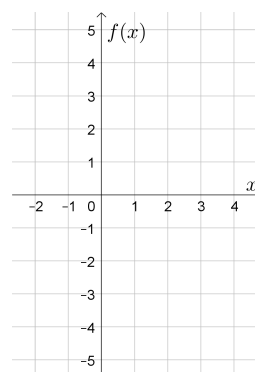
4.5



Die Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = 2 \cdot x - 1$ ist eine **lineare Funktion**.

- a) Vervollständige die Wertetabelle.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						



- b) Zeichne rechts die Wertepaare als Punkte in der Zahlenebene ein.
c) Zeichne rechts den Funktionsgraphen ein.

Der Graph jeder linearen Funktion ist eine **Gerade**.

4.6



Die mittlere Geschwindigkeit bei einem 100 m-Lauf hängt von der benötigten Zeit t ab.
 $\bar{v}(t)$ ist die mittlere Geschwindigkeit in m/s, wenn die benötigte Zeit t Sekunden beträgt.

- a) Stelle eine Gleichung der Funktion auf: $\bar{v}(t) =$

- b) Vervollständige die Wertetabelle.

t in s	9	10	11	12	13	14	15
$\bar{v}(t)$ in m/s							

4.7

Die Funktion f mit Funktionsgleichung $f(x) = -x^2 + 4 \cdot x + 1$ ist eine **quadratische Funktion**.

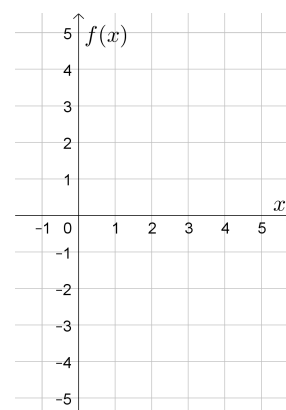
a) Vervollständige die Wertetabelle.

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$							

b) Zeichne rechts die Wertepaare als Punkte in der Zahlenebene ein.

c) Skizziere rechts den Funktionsgraphen.

Der Graph jeder quadratischen Funktion ist eine (quadratische) **Parabel**.



4.8

Die Funktion f mit Funktionsgleichung $f(\alpha) = \sin(\alpha)$ ist die **Sinusfunktion**.

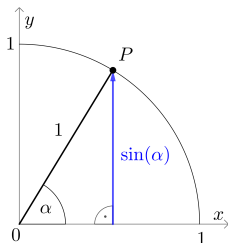
Sie ordnet jedem Winkel α in $D =]0^\circ; 90^\circ[$ das Verhältnis $\frac{\text{Gegenkathete von } \alpha}{\text{Hypotenuse}}$ im rechtwinkligen Dreieck zu.

a) Vervollständige die Wertetabelle. Gib die ersten 3 Nachkommastellen an.

α	$0,1^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	$89,9^\circ$
$\sin(\alpha)$										

b) Zeichne die Wertepaare als Punkte in der Zahlenebene ein.

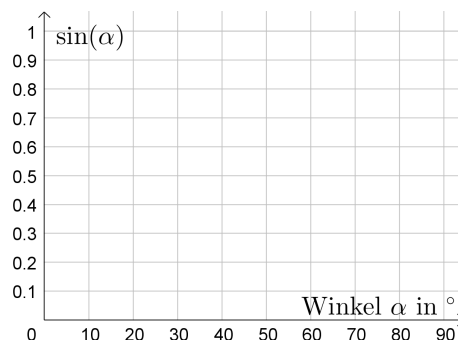
c) Skizziere rechts den Funktionsgraphen.



Links ist der Einheitskreis im 1. Quadranten dargestellt. Warum hat die senkrechte Strecke die Länge $\sin(\alpha)$?

Der Punkt P am Kreisbogen ist beweglich. Welchen Wert vermutest du für $\sin(90^\circ)$ bzw. $\sin(0^\circ)$? Kontrolliere mit dem Taschenrechner.

Berechne mit dem Taschenrechner $\sin(150^\circ)$. Wie könnte $\sin(\alpha)$ für stumpfe Winkel definiert sein?



- 4.1 f ist keine Funktion, weil 42 kein Funktionswert zugeordnet wird.
 g ist keine Funktion, weil 3 mehr als ein Funktionswert zugeordnet wird.
 h ist eine Funktion, weil jeder Zahl in D genau ein Funktionswert zugeordnet wird.

4.2 $D = \{1, 5, 7\}$

x	1	5	7
$f(x)$	-1	2	3

- 4.3 a) Ja, der Graph einer Funktion mit Definitionsmenge $D = [1; 9]$ ist dargestellt.
 (Zu jedem x -Wert in D gibt es genau einen zugehörigen y -Wert.)
 b) Nein, es ist kein Funktionsgraph, weil es z.B. an der Stelle $x = 5$ mehrere zugehörige y -Werte gibt.
 c) Ja, der Graph einer Funktion mit Definitionsmenge $D = [2; 8]$ ist dargestellt.
 (Zu jedem x -Wert in D gibt es genau einen zugehörigen y -Wert.)
 d) Nein, es ist kein Funktionsgraph, weil es z.B. an der Stelle $x = 4,5$ zwei zugehörige y -Werte gibt.
 e) Ja, der Graph einer Funktion mit Definitionsmenge $D = [2; 8]$ ist dargestellt.
 (Zu jedem x -Wert in D gibt es genau einen zugehörigen y -Wert.)
 f) Ja, der Graph einer Funktion mit Definitionsmenge $D = [2; 3] \cup [5; 8]$ ist dargestellt.
 (Zu jedem x -Wert in D gibt es genau einen zugehörigen y -Wert.)
- 4.4 a) Ja, weil jede*r Schüler*in genau eine Katalognummer hat.
 b) Ja, weil es zu jeder Katalognummer genau eine*n Schüler*in gibt.
 c) Nein, weil ein*e Schüler*in auch in keinem oder in mehreren Fächern den Notenstand „Sehr gut“ haben kann.
 d) Ja, weil jede*r Schüler*in zu jedem Zeitpunkt genau eine Körpergröße hat.
 e) Ja, weil jede*r Schüler*in eine bestimmte Anzahl von Haustieren hat.
 f) Nein, weil ein*e Schüler*in auch keine oder mehrere verschiedene E-Mail-Adressen haben kann.

4.5

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-5	-3	-1	1	3	5



4.6 a) $\bar{v}(t) = \frac{100}{t}$

b)

t in s	9	10	11	12	13	14	15
$\bar{v}(t)$ in m/s	11,1...	10	9,09...	8,33...	7,69...	7,14	6,66...

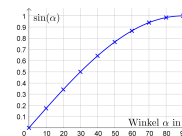
4.7

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-4	1	4	5	4	1	-4



4.8

α	$0,1^\circ$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	$89,9^\circ$
$\sin(\alpha)$	0,001	0,173	0,342	0,5	0,642	0,766	0,866	0,939	0,984	0,999



5. LINEARE FUNKTIONEN



MmF-Materialien



Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ [Arbeitsblatt – Lineare Funktionen](#)

In der Aufgabensammlung [Mathematik auf Augenhöhe – 9. Schulstufe](#) sind weitere Aufgaben zu diesem Thema.

5.1



Jeden Monat hängen die Stromkosten (in €) vom Stromverbrauch (in kWh) ab.

- Bei einem Stromverbrauch von 100 kWh betragen die Stromkosten 25,50 €.
- Bei einem Stromverbrauch von 150 kWh betragen die Stromkosten 35,25 €.

a) Diese Abhängigkeit wird durch eine lineare Funktion S beschrieben:

$$S(x) = k \cdot x + d$$

x ... Stromverbrauch in kWh

$S(x)$... Stromkosten in €

Ermittle die Werte k und d .

- b) Interpretiere den Wert d unter Verwendung der Einheiten im Sachzusammenhang.
 c) Interpretiere den Wert k unter Verwendung der Einheiten im Sachzusammenhang.
 d) Berechne die Stromkosten bei einem Stromverbrauch von 250 kWh.
 e) Wie groß war der Stromverbrauch bei 20 € Stromkosten?

5.2

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

In Saunen werden zur Zeitmessung meist Sanduhren verwendet. Der Sand in einer solchen Sanduhr benötigt 15 Minuten, bis er von oben nach unten vollständig durchgerieselt ist. Pro Minute rieseln 4 Gramm Sand von oben nach unten. Die gesamte Sandmenge befindet sich zu Beginn ($t = 0$) im oberen Teil der Sanduhr (siehe nebenstehende Skizze).



- 1) Erstellen Sie eine Gleichung derjenigen linearen Funktion, die der Zeit t in Minuten die Sandmenge im oberen Teil der Sanduhr in Gramm zuordnet.

5.3

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Zur Reinigung eines Schwimmbeckens muss das Wasser abgelassen werden. Zu Beginn sind 2 Millionen Liter Wasser im Becken. Mithilfe von Pumpen werden gleichmäßig 5000 Liter pro Minute abgesaugt.

- 1) Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die die noch im Becken vorhandene Wassermenge in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.
 2) Berechnen Sie, wie lange das Abpumpen der gesamten Wassermenge dauert.

5.4

Albert und Beate klettern an Seilen hoch. Alberts Höhe über dem Boden zu einem bestimmten Zeitpunkt lässt sich näherungsweise durch die folgende Funktion h_A beschreiben:

$$h_A(t) = 10,16 \cdot t + 152,4$$

t ... Zeit in Sekunden (s)

$h_A(t)$... Höhe von Albert über dem Boden zur Zeit t in Zentimetern (cm)

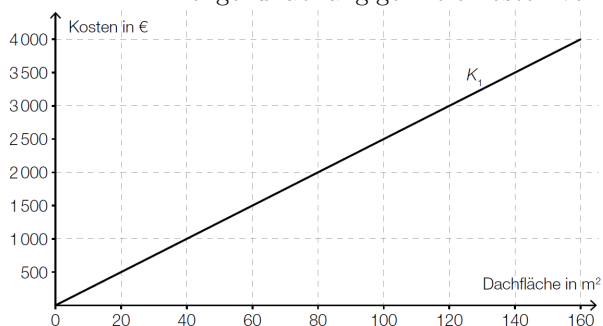
- 1) Erklären Sie die Bedeutung des Koeffizienten 10,16 im gegebenen Sachzusammenhang.
- 2) Berechnen Sie, wie viele Sekunden Albert benötigt, um eine Höhe von 5 Metern zu erreichen.

5.5

Zwei Unternehmen legen ihre Angebote für das Eindecken von Einfamilienhäusern vor:

Angebot 1: Das Angebot des ersten Anbieters ist in der unten stehenden Abbildung als Graph der Kostenfunktion K_1 dargestellt.

Angebot 2: Die Kosten betragen 20 € je m^2 Dachfläche, dazu kommen mengenunabhängige Lieferkosten von 500 €.

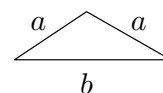


- 1) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Kostenfunktion K_2 für das Angebot 2 im Intervall $[0; 160]$ ein.
- 2) Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung ab, welches Angebot bei einer Dachfläche von $120 m^2$ kostengünstiger ist.

5.6

Aus einem 50 cm langen Stück Draht soll ein gleichschenkliges Dreieck gebogen werden.

Die Basislänge b hängt dabei von der Schenkellänge a ab.



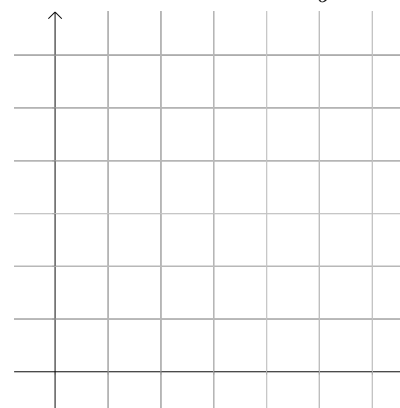
- a) Ermittle die Parameter k und d der linearen Funktion:

$$b(a) = k \cdot a + d$$

a ... Schenkellänge in cm

$b(a)$... Basislänge in cm

- b) Interpretiere den Wert der Steigung k in diesem Sachzusammenhang.
- c) Welche Werte sind für die Länge a sinnvoll?
Gib damit die Definitionsmenge der Funktion an.
- d) Beschrifte und skaliere die Achsen sinnvoll.
Zeichne dann den Funktionsgraphen rechts ein.



5.7

Pellets sind Heizmaterial aus gepressten Sägespänen.

Die Gesamtkosten für eine Pelletslieferung setzen sich aus einer fixen Grundgebühr und den Kosten für die Liefermenge zusammen. Dabei ist für jede Tonne Pellets der gleiche Preis zu bezahlen.

Ein Pelletshändler bietet auf seiner Website einen Online-Rechner an. Eine Kundin verwendet diesen Online-Rechner und notiert die Gesamtkosten für drei verschiedene Liefermengen:

Liefermenge in Tonnen	Gesamtkosten in Euro
2	500
4	960
5,5	1260

- 1) Überprüfen Sie nachweislich, ob der Online-Rechner die Gesamtkosten wie oben beschrieben berechnet.

5.8

Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen. Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden.

Im Jahr 1956 wurde bei den Männern ein neuer Weltrekord mit der Weite 19,06 m aufgestellt.

Eine Faustregel besagt, dass sich seit 1956 der Weltrekord bei den Männern alle 1,5 Jahre um 21 cm verbessert hat. Die Weltrekordweite (in Metern) soll gemäß dieser Faustregel in Abhängigkeit von der Zeit t (in Jahren) durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion f . Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 1956.

Im Jahr 1988 betrug der Weltrekord bei den Männern 23,06 m.

- 2) Ermitteln Sie für das Jahr 1988 die prozentuelle Abweichung des Funktionswerts von f von dieser Weltrekordweite.

5.9

Beurteile jeweils, ob es sich um ein lineares Modell handelt.

Ermittle im Falle eines linearen Modells auch die zugehörige Steigung k und den Ordinatenabschnitt d .

- Ein Wasserbehälter wird durch einen konstanten Zufluss gefüllt.
Zu Beginn ($t = 0$) sind 20 m^3 Wasser enthalten, und es fließen in 3 Stunden 12 m^3 Wasser hinzu.
 $V(t)$ ist die im Behälter enthaltene Wassermenge in Kubikmeter zur Zeit t in Stunden.
- $u(a)$ ist der Umfang eines Quadrats mit der Seitenlänge a .
- Gemäß der *Grundgleichung der klassischen Mechanik* ist die auf einen Körper mit der Masse m einwirkende Kraft F direkt proportional zur Beschleunigung a des Körpers: $F = m \cdot a$
 $F(a)$ ist (bei konstanter Masse m) die Kraft in Abhängigkeit von der Beschleunigung.
- $A(r)$ ist den Flächeninhalt eines Kreises in Abhängigkeit von seinem Radius r .
- $A(h)$ ist der Flächeninhalt eines Trapezes mit den Paralleelseiten a und c in Abhängigkeit von der Höhe h .

5.10



Im Folgenden werden die Kerzenhöhen zweier Kerzen K_1 und K_2 in Abhängigkeit von der Zeit nach dem Entzünden durch ihre *Abbrennfunktionen* beschrieben.

$$K_1 : h(t) = 48 - 3 \cdot t \quad K_2 : h(t) = 32 - t$$

t ... Zeit nach dem Entzünden in Stunden

$h(t)$... Kerzenhöhe h zur Zeit t in cm

- Gib an, welche der beiden Kerzen vor dem Entzünden höher war. Begründe deine Entscheidung.
- Welche der beiden Kerzen brennt schneller ab? Begründe deine Entscheidung.
- Die beiden Kerzen werden zum Zeitpunkt $t = 0$ erstmalig und gleichzeitig entzündet.
Berechne wie lang es dauert, bis die beiden Kerzen gleich hoch sind.
- Die beiden Kerzen werden zum Zeitpunkt $t = 0$ erstmalig und gleichzeitig entzündet.
Berechne, wann der Längenunterschied der beiden Kerzen 9 cm beträgt.

5.11



Mit der folgenden Formel kannst du zwischen der Temperatur in °F (Fahrenheit) und °C (Celsius) umrechnen:

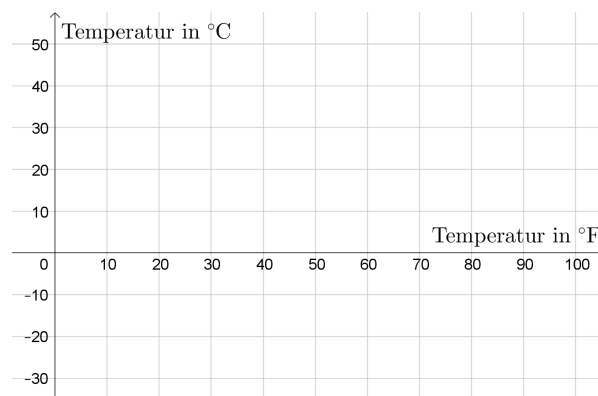
$$C = \frac{F - 32}{1,8}$$

C ... Temperatur in °C

F ... Temperatur in °F

- a) Vervollständige die Umrechnungstabelle:

F	32	0	100		
C				100	42



- b) Begründe, warum $C(F) = \frac{F - 32}{1,8}$ eine lineare Funktion ist.

Hinweis: Zeige, dass $C(F) = k \cdot F + d$ gilt. Welche Werte haben k und d ?

- c) Zeichne den Graphen der linearen Funktion im Koordinatensystem oben ein.

- d) Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein:

„Wenn die Temperatur um 1 °F steigt, dann steigt die Temperatur um °C.“

- e) Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein:

„Wenn die Temperatur um 1 °C steigt, dann steigt die Temperatur um °F.“

- f) Berechne denjenigen Zahlenwert, bei dem die Temperaturangabe in °C und °F den gleichen Wert hat.

Wenn $f(x) = x$ gilt, dann heißt der Punkt $(x \mid f(x)) = (x \mid x)$ auch **Fixpunkt von f** .

5.12

Zwischen der Temperatur in der Einheit Grad Celsius ($^{\circ}\text{C}$) und der Temperatur in der Einheit Grad Fahrenheit ($^{\circ}\text{F}$) besteht ein linearer Zusammenhang. Ein Thermometer, das die Temperatur in beiden Einheiten anzeigt, zeigt an einem Wintertag zu verschiedenen Zeitpunkten folgende Werte:

25 $^{\circ}\text{C}$	36,5 $^{\circ}\text{F}$	5,0 $^{\circ}\text{C}$	41,0 $^{\circ}\text{F}$
-----------------------	-------------------------	------------------------	-------------------------

f ... Temperatur in der Einheit $^{\circ}\text{F}$

c ... Temperatur in der Einheit $^{\circ}\text{C}$

- 1) Argumentieren Sie unter Verwendung der angezeigten Werte, dass zwischen c und f kein direkt proportionaler Zusammenhang bestehen kann.
- 2) Erstellen Sie eine Formel zur Berechnung von f aus c .

5.13

Wir verraten dir eine Information über eine lineare Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$.

Kannst du damit den Wert von k und/oder den Wert von d *sicher* ermitteln?

- a) Es gibt eine Zahl a mit $f(-a) = -f(a)$.
- b) Es gibt zwei verschiedene Zahlen a und b mit $f(a) = a$ und $f(b) = b$.
- c) Es gibt eine Zahl a und eine Zahl $c \neq 1$ mit $f(c \cdot a) = c \cdot f(a)$.

5.14

Blut versorgt die Organe des menschlichen Körpers mit Sauerstoff. Das Herz pumpt das Blut in einem Kreislaufsystem durch den Körper.

Die Pumpleistung des Herzens (in Litern pro Minute) kann in Abhängigkeit vom Alter (in Jahren) annähernd durch eine lineare Funktion P beschrieben werden. Sie beträgt bei 20-jährigen Personen 5 Liter pro Minute und bei 70-jährigen Personen 2,5 Liter pro Minute.

- 1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von P auf.
- 2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser linearen Funktion im gegebenen Sachzusammenhang.

5.15

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Ein vereinfachtes Modell des Zusammenhangs zwischen der Höhe über dem Meeresspiegel und dem Luftdruck nimmt eine konstante Abnahme des Luftdrucks um 10 hPa pro 100 Höhenmeter an. Der Luftdruck auf Höhe des Meeresspiegels beträgt rund 1013 hPa. Verwenden Sie die folgenden Bezeichnungen:

h ... Höhe über dem Meeresspiegel in m

$f(h)$... Luftdruck in der Höhe h in hPa

- 1) Stellen Sie die Gleichung der Funktion f auf, die diesen Zusammenhang im vereinfachten Modell beschreibt.

5.16

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Eine Patientin soll 50 ml Infusionslösung erhalten. Die Tropfgeschwindigkeit des Infusionsgeräts wird zu Beginn auf 8 Milliliter pro Stunde (ml/h) eingestellt. Nach 3 Stunden verändert der Arzt die Tropfgeschwindigkeit, damit die Infusionsflasche nach weiteren 5 Stunden leer ist.

- 1) Berechnen Sie, auf welche neue Tropfgeschwindigkeit in ml/h der Arzt das Gerät einstellen muss.
- 2) Stellen Sie diejenige Funktionsgleichung auf, die den Inhalt in der Infusionsflasche in Abhängigkeit von der Zeit nach Veränderung der Tropfgeschwindigkeit beschreibt.

5.17

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

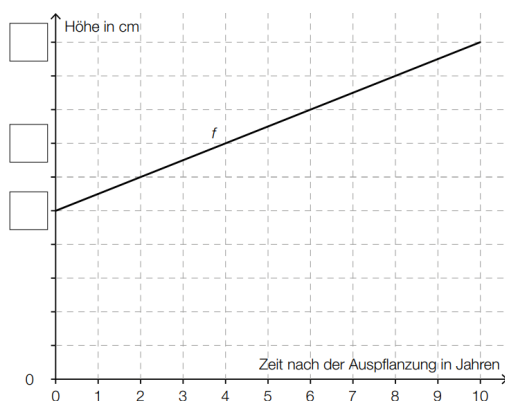
Verschiedene Pharmaunternehmen produzieren Impfstoffe, die in Packungen verkauft werden. Unternehmen *A* hat einen neuen Impfstoff entwickelt. Unternehmen *B* möchte diesen Impfstoff auch vertreiben. Es stehen 2 Möglichkeiten für diesen Vertrieb zur Auswahl:

1. Unternehmen *B* kauft die Rechte von Unternehmen *A* um € 10 Millionen. Außerdem fallen laufende Produktionskosten in Höhe von € 25 pro Packung an.
 2. Unternehmen *B* kauft das Produkt direkt von Unternehmen *A* um € 50 pro Packung.
- 1) Stellen Sie die beiden Funktionsgleichungen auf, die den Zusammenhang zwischen der Anzahl der erzeugten Packungen x und den entstehenden Gesamtkosten K (in Euro) für Unternehmen *B* beschreiben.

5.18

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Buchsbäume werden in verschiedenen Sorten mit unterschiedlichem Höhenwachstum angeboten.



Ein bestimmter Buchsbaum der Sorte *A* wuchs in den ersten 10 Jahren nach der Auspflanzung jeweils 3 cm pro Jahr. 4 Jahre nach der Auspflanzung hatte der Buchsbaum eine Höhe von 42 cm. Die Höhe des Buchsbaums in Abhängigkeit von der Zeit nach der Auspflanzung wird durch eine lineare Funktion f beschrieben. Der Graph dieser Funktion ist im nebenstehenden Koordinatensystem dargestellt. Dabei fehlt die Skalierung der vertikalen Achse.

- 1) Tragen Sie die fehlenden Werte in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

5.19

Bundesministerium
Bildung, Wissenschaft
und Forschung

Der Höhenmesser eines Fallschirmspringers zeigt 60 Sekunden nach dem Absprung eine Meereshöhe von 1300 Metern an. Ab dieser Meereshöhe sinkt der Fallschirmspringer jeweils 100 Meter in 14 Sekunden. Dabei soll die Meereshöhe des Fallschirmspringers (in Metern) in Abhängigkeit von der Zeit t (in Sekunden) durch eine Funktion h beschrieben werden.

- 1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion h . Wählen Sie $t = 0$ für den Zeitpunkt 60 Sekunden nach dem Absprung.

Der Fallschirmspringer landet auf einem Feld, das auf einer Meereshöhe von 350 Metern liegt.

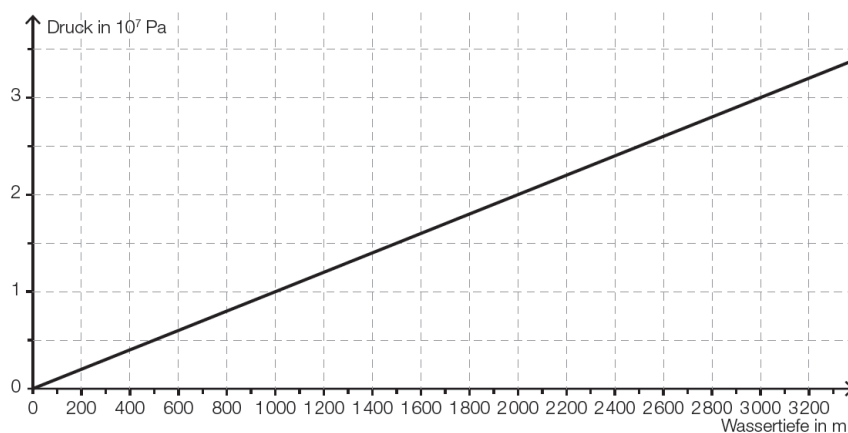
- 2) Berechnen Sie, wie lange der gesamte Fallschirmsprung (vom Absprung bis zur Landung) dauert.

5.20

Mit zunehmender Wassertiefe steigt der Druck. Dieser kann in Bar (bar) oder Pascal (Pa) angegeben werden.

$1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

Die nachstehende Grafik zeigt den Druck (in 10^7 Pa) in Abhängigkeit von der Wassertiefe (in Metern).



Robben erreichen beim Tauchen aufgrund des Drucks eine maximale Tiefe von 700 m.

Pottwale können einem um 230 bar größeren maximalen Druck als Robben ausgesetzt sein.

- 1) Lesen Sie aus der obigen Grafik ab, welchem Druck Robben in 700 m Tiefe ausgesetzt sind.
- 2) Ermitteln Sie, welche maximale Tiefe Pottwale erreichen können.

5.21

In den USA gibt es eine Grillenart, die ihre Zirp-Rate abhängig von der Temperatur verändert: Je wärmer es ist, desto öfter zirpt die Grille. Daher wird sie als Thermometergrille bezeichnet.

a) Bei 75°F zirpt eine Thermometergrille 140-mal pro Minute und bei 65°F 100-mal pro Minute.

- 1) Stellen Sie die Gleichung derjenigen linearen Funktion auf, die die Temperatur in $^\circ\text{F}$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute beschreibt.

b) Der Zusammenhang zwischen der Anzahl der Zirpgeräusche pro Minute und der Temperatur wird durch die Modellfunktion T beschrieben:

$$T(N) = 60 + \frac{N - 92}{4,7} \quad \dots \text{Temperatur in } ^\circ\text{F} \text{ bei } N \text{ Zirpgeräuschen pro Minute}$$

- 1) Bestimmen Sie, wie oft die Thermometergrille durchschnittlich in 15 Sekunden bei einer Temperatur von 70°F zirpt.
- 2) Bestimmen Sie den Wert der Steigung.
- 3) Beschreiben Sie, welche Bedeutung der Wert der Steigung in diesem Sachzusammenhang hat.

- 5.1 a) $k = 0,195 \text{ €/kWh}$, $d = 6 \text{ €}$
 b) Wenn der Stromverbrauch 0 kWh beträgt, dann sind die Stromkosten $d = 6 \text{ €}$. (Fixkosten/Grundgebühr)
 c) Die Steigung $k = 0,195 \text{ €/kWh}$ gibt an, dass die Stromkosten pro zusätzlich verbrauchter kWh um 0,195 € steigen.
 d) $S(250) = 16,94 \text{ €} \Rightarrow$ Die Stromkosten betragen 16,94 €.
 e) $S(x) = 20 \Rightarrow x = 303,4 \dots \text{ kWh} \Rightarrow$ Der Stromverbrauch betrug 303,4... kWh.

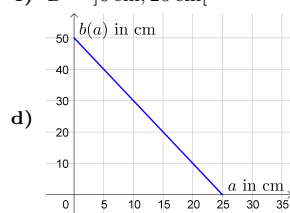
5.2 $s(t) = -4 \cdot t + 60$ $t \dots$ Zeit in min $s(t) \dots$ Sandmenge zur Zeit t in g

5.3 $f(t) = 2\,000\,000 - 5000 \cdot t$ $t \dots$ Zeit in Minuten $f(t) \dots$ vorhandene Wassermenge zum Zeitpunkt t in Litern
 Es dauert 400 Minuten, bis die gesamte Wassermenge abgepumpt ist.

- 5.4 1) Pro Sekunde steigt die Höhe von Albert um 10,16 cm.
 Er klettert also mit einer Geschwindigkeit von 10,16 cm/s am Seil hoch.
 2) Nach $t = 34,2 \dots$ Sekunden erreicht Albert eine Höhe von 5 Metern.

- 5.5 1) Gerade durch die Punkte (0 | 500) und (100 | 2500) 2) Angebot 2 ist günstiger.

- 5.6 a) $k = -2$, $d = 50$.
 b) Wenn beide Schenkel um 1 cm verlängert werden, dann muss die Basis um 2 cm kürzer werden.
 c) $D =]0 \text{ cm}; 25 \text{ cm}[$



- 5.7 Nein, weil die 3 Punkte nicht auf einer Gerade liegen.

5.8 1) $f(t) = 0,14 \cdot t + 19,06$ 2) $f(32) = 23,54 \Rightarrow \frac{23,54 - 23,06}{23,06} = 2,08 \dots \%$

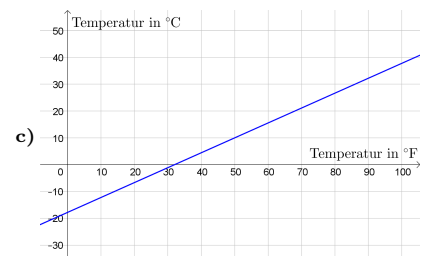
- 5.9 a) linear mit $k = 4$ und $d = 20$ b) linear mit $k = 4$ und $d = 0$ c) linear mit $k = m$ und $d = 0$ d) nicht linear e) linear mit $k = \frac{a+c}{2}$ und $d = 0$

- 5.10 a) Die Kerze K_1 war zu Beginn größer. Begründung: Die Anfangshöhe lässt sich mit $h(0)$ berechnen, und beträgt somit für K_1 48 cm und für K_2 nur 32 cm.
 b) Die Kerze K_1 brennt schneller ab. Begründung: Die Abbrenngeschwindigkeit lässt sich anhand der Steigung der Funktion bestimmen, und beträgt somit für K_1 3 cm/h und für K_2 nur 1 cm/h.
 c) $48 - 3 \cdot t = 32 - t \Rightarrow t = 8$ und $h(8) = 24$
 Nach 8 Stunden sind die Kerzen gleich hoch (24 cm).
 d) $(32 - t) - (48 - 3 \cdot t) = 9 \Rightarrow t = 12,5$
 $K_1: h(12,5) = 10,5$ und $K_2: h(12,5) = 19,5$
 Der Größenunterschied 9 cm ergibt sich bei einer Brennzeit von 12,5 Stunden.
 $(48 - 3 \cdot t) - (32 - t) = 9 \Rightarrow t = 3,5$
 $K_1: h(3,5) = 28,5$ und $K_2: h(3,5) = 37,5$
 Der Größenunterschied 9 cm ergibt sich auch bei einer Brennzeit von 3,5 Stunden.

5.11 a)

F	32	0	100	212	107,6
C	0	-17,7...	37,7...	100	42

b) $C(F) = \frac{1}{1,8} \cdot F - \frac{32}{1,8}$ ist eine lineare Funktion mit Steigung $k = 0,555 \dots$ und $d = -17,7 \dots$



d) $0,555 \dots ^\circ\text{C}$ e) $1,8 \dots ^\circ\text{F}$ f) $-40 ^\circ\text{F} = -40 ^\circ\text{C}$

- 5.12 Eine Verdopplung von c ($2,5 \cdot 2 = 5$) hat *keine* Verdopplung von f bewirkt ($36,5 \cdot 2 \neq 41$).
 Also können c und f nicht direkt proportional sein.

$f = 1,8 \cdot c + 32$ (Auch hier erkennt man an $d = 32 \neq 0$, dass f und c *nicht* direkt proportional sind.)

- 5.13 a) k ist nicht eindeutig, $d = 0$ b) $k = 1$, $d = 0$ c) k ist nicht eindeutig, $d = 0$

5.14 $P(t) = -0,05 \cdot t + 6$

Pro Lebensjahr nimmt die Pumpleistung des Herzens um 0,05 Liter pro Minute ab.

5.15 $f(h) = 1013 - \frac{1}{10} \cdot h$

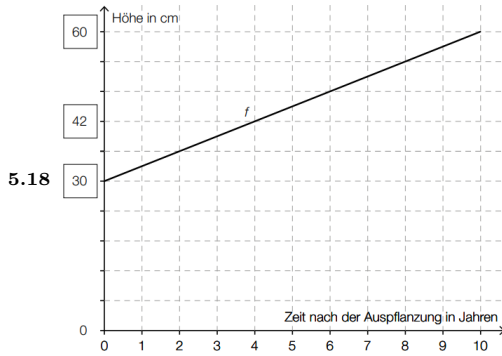
5.16 Die neue Tropfgeschwindigkeit beträgt 5,2 ml/h.

$$f(t) = 26 - 5,2 \cdot t$$

$t \dots$ Zeit in Stunden nach Neueinstellung durch den Arzt

$f(t) \dots$ verbleibende Menge in der Infusionsflasche in ml zur Zeit t

5.17 1. Möglichkeit: $K_1(x) = 25 \cdot x + 10\,000\,000$ 2. Möglichkeit: $K_2(x) = 50 \cdot x$



5.19 1) $h(t) = 1300 - \frac{100}{14} \cdot t$ 2) Der Fallschirmsprung dauert vom Absprung bis zur Landung insgesamt 193 Sekunden.

5.20 $0,7 \cdot 10^7$ Pa 3000 m

5.21 a) $y = 0,25 \cdot x + 40$ $x \dots$ Anzahl Zirpgeräusche pro Minute, $y \dots$ Temperatur in $^{\circ}\text{F}$

b) $\frac{139}{4} \approx 35$ Zirpgeräusche in 15 Sekunden

$k = \frac{1}{4,7} = \frac{\Delta T}{\Delta N} \rightsquigarrow$ Eine Temperaturzunahme um 1°F entspricht einer Zunahme um 4,7 Zirpgeräusche pro Minute.

Oder: $k \approx 0,21 \rightsquigarrow$ Eine Zunahme der Zirpgeräusche pro Minute um 1 entspricht einer Temperaturzunahme um rund $0,21^{\circ}\text{F}$.

6. STÜCKWEISE DEFINIERTE FUNKTIONEN

6.1



Für die stückweise lineare Funktion f gilt:

$$\begin{cases} -2 \cdot x + 3 & \text{für } x \leq 2, \\ \frac{3}{2} \cdot x - 1 & \text{für } 2 < x < 6, \\ 6 & \text{für } 6 \leq x < 9, \\ -x + 15 & \text{für } x \geq 9. \end{cases}$$

a) Fülle die Wertetabelle von f aus.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$														

Stückweise definierte Funktionen können *Sprungstellen* haben.

f hat zum Beispiel an der Stelle $x = 2$ eine Sprungstelle:

$$f(2) = -2 \cdot 2 + 3 = -1 \quad \text{aber} \quad \frac{3}{2} \cdot 2 - 1 = 2 \neq -1$$

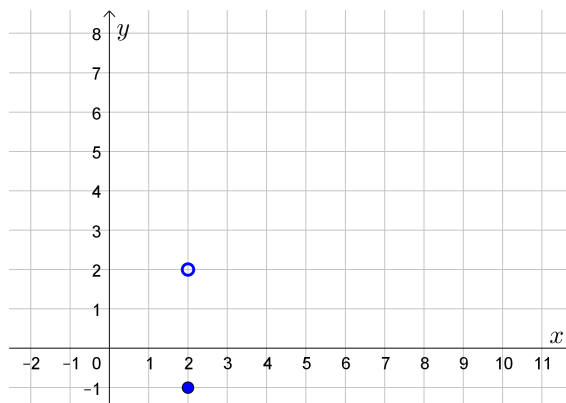
Die Sprungstelle $x = 2$ ist rechts eingezeichnet.

Der Punkt am Graphen wird mit $\bullet$ markiert

und der andere Punkt mit $\circ$.

b) Ermittle alle Sprungstellen von f .

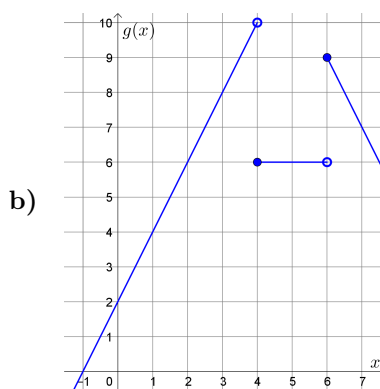
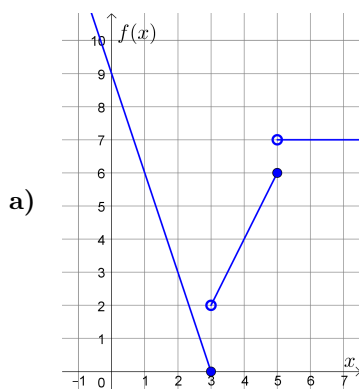
c) Zeichne den Graphen von f rechts ein.



6.2



Ermittle die Funktionsterme der dargestellten stückweise linearen Funktion.



6.3



Wenn eine stückweise lineare Funktion *keine* Sprungstellen hat, dann sagen wir die Funktion ist *stetig*.

Untersuche, ob die gegebene Funktion stetig ist.

Allgemein machen *stetige* Funktionen keine sprunghaften Veränderungen.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot x + 4 & \text{für } x < 6 \\ -\frac{5}{2} \cdot x + 23 & \text{für } 6 \leq x < 10 \\ -x + 8 & \text{für } x \geq 10 \end{cases} \quad \text{b) } g(x) = \begin{cases} -\frac{3}{4} \cdot x + \frac{1}{2} & \text{für } x \leq -2 \\ 2 & \text{für } -2 < x < 4 \\ 2 \cdot x - 7 & \text{für } x \geq 4 \end{cases}$$

6.4



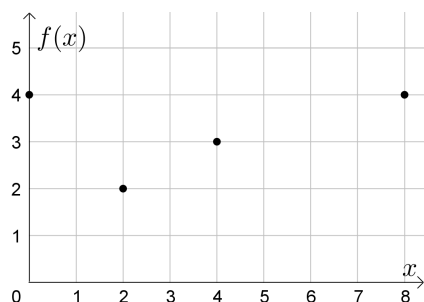
Berechne a , b und c so, dass die Funktion f stetig ist.

$$f(x) = \begin{cases} -2 \cdot x + a & \text{für } x < -3 \\ 4 \cdot x + 5 & \text{für } -3 \leq x < 2 \\ b \cdot x - 1 & \text{für } 2 \leq x \leq 5 \\ c \cdot x + 9 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

6.5



Im Koordinatensystem sind 4 Messpunkte dargestellt, z.B. die Temperatur zu 4 verschiedenen Zeitpunkten. Bei *linearer Interpolation* werden von links nach rechts benachbarte Messpunkte mit einer Strecke verbunden. Die Punkte auf diesem Streckenzug liefern dann Schätzwerte („Interpolationswerte“), z.B. die Temperatur zu Zeitpunkten, an denen nicht gemessen wurde.



- Zeichne den Graphen dieser Funktion f links ein.
- Ermittle auf jedem der 3 Abschnitte einen Funktionsterm von f .
- Berechne den Interpolationswert zu

$$1) x_1 = 0,5 \quad 2) x_2 = 3 \quad 3) x_3 = 4,7$$

und stelle ihn grafisch dar.

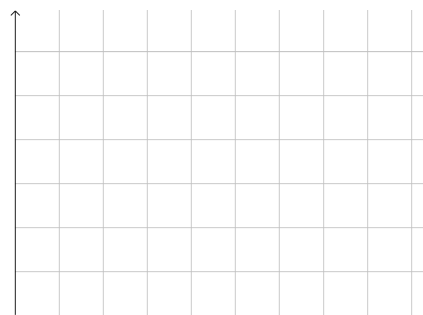
6.6



In einem einfachen Modell geht man davon aus, dass eine Kerze gleichmäßig abbrennt.

Ihre Höhe $h(t)$ in cm hängt also linear von der Brenndauer t in Stunden ab. Die 30 cm hohe Kerze brennt in 7 Stunden vollständig ab.

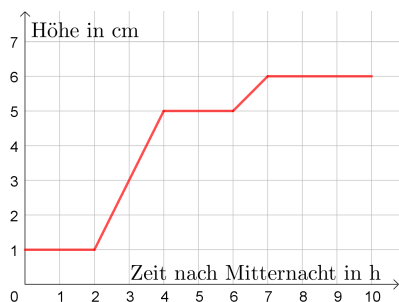
- Skizziere im nachstehenden Koordinatensystem den Graphen der zugehörigen Funktion h . Nimm dabei an, dass die Kerze zum Zeitpunkt $t = 0$ erstmalig angezündet wird, und im dargestellten Bereich (ohne Pause) vollständig abbrennt.
- Berechne die Steigung der Funktion h .
Interpretiere den Wert der Steigung im Sachzusammenhang.
- Ermittle eine Funktionsgleichung von h .
- Berechne $h(4,2)$, und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- Berechne die Lösung der Gleichung $h(t) = 10$, und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.
- Berechne $h(5) - h(2)$, und interpretiere das Ergebnis im Sachzusammenhang.



6.7

In der vergangenen Nacht hat es bis in die Morgenstunden immer wieder geregnet.

Das nachstehende Diagramm zeigt die Höhe des Wasserstandes in einem zylinderförmigen Messgefäß ($V = r^2 \cdot \pi \cdot h$) mit Radius $r = 12$ cm und Höhe h in Abhängigkeit von der Zeit nach Mitternacht.



- In welchen Zeiträumen hat es geregnet?
In welchen Zeiträumen hat es nicht geregnet?
- Wie viele Liter Wasser befanden sich um 3:00 Uhr im Messgerät?
- Um wie viele Zentimeter ist der Wasserstand im Gefäß zwischen 02:30 Uhr und 07:00 Uhr gestiegen?
- Ermittle die Funktionsterme für den Wasserstand in Abhängigkeit von der Zeit nach Mitternacht.
- Wann waren zum ersten Mal 2 Liter im Messgefäß?

6.8

Die nachstehend angeführten 3 Messwerte wurden an einem Vormittag aufgezeichnet und sollen mithilfe einer abschnittsweise definierten linearen Funktion T in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden.

t in h	T in °C
6	8
9	10
12	16

t ... Zeit nach Mitternacht in Stunden (h)

$T(t)$... Temperatur nach t Stunden in Grad Celsius (°C)

Es wird angenommen, dass in den Intervallen $[6; 9]$ und $[9; 12]$ die Temperatur jeweils linear zunimmt.

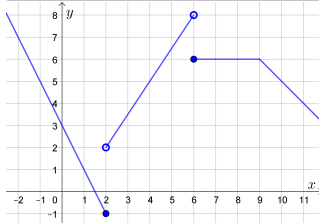
- Stellen Sie die Funktion T abhängig von der Zeit t im Intervall $[6; 12]$ auf.
- Berechnen Sie mithilfe dieser Funktion T die Temperatur um 11:30 Uhr.

6.1 a)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(x)$	7	5	3	1	-1	3,5	5	6,5	6	6	6	6	5	4

b) $x = 2$ und $x = 6$

c)



6.2 a)
$$f(x) = \begin{cases} -3 \cdot x + 9 & \text{für } x \leq 3 \\ 2 \cdot x - 4 & \text{für } 3 < x \leq 5 \\ 7 & \text{für } x > 5 \end{cases}$$

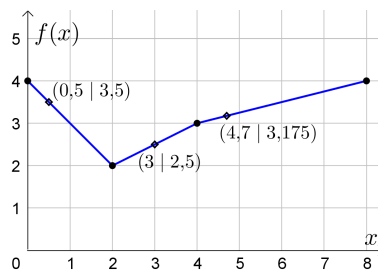
b)
$$g(x) = \begin{cases} 2 \cdot x + 2 & \text{für } x < 4 \\ 6 & \text{für } 4 \leq x < 6 \\ -2 \cdot x + 21 & \text{für } x \geq 6 \end{cases}$$

6.3 a) Der Graph von f verläuft sprunfrei durch $(6 | 8)$ und $(10 | -2)$, also ist f stetig.

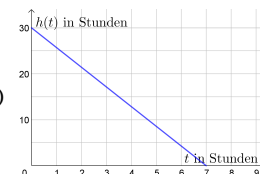
b) Der Graph von g macht an der Stelle $x = 4$ einen Sprung von der Höhe 2 auf die Höhe 1, also ist g *nicht* stetig.

6.4 $a = -13$ $b = 7$ $c = 5$

6.5
$$f(x) = \begin{cases} -x + 4, & \text{wenn } 0 \leq x \leq 2, \\ 0,5 \cdot x + 1, & \text{wenn } 2 \leq x \leq 4, \\ 0,25 \cdot x + 2, & \text{wenn } 4 \leq x \leq 8 \end{cases}$$



6.6 a)



b) $k = -\frac{30}{7} \text{ cm/h} = -4,28... \text{ cm/h}$ Pro Stunde wird die Kerze um 4,28... cm kleiner.

c) $h(t) = -\frac{30}{7} \cdot t + 30$

d) $h(4,2) = 12$ Nach 4,2 h hat die Kerze noch 12 cm Höhe.

e) $h(4,666...) = 10$ Nach 4,666... Stunden hat die Kerze noch 10 cm Höhe.

f) $h(5) - h(2) = -12,85...$ Nach 5 Stunden ist die Kerze um 12,85... cm kleiner nach 2 Stunden.

6.7 a) Geregnet hat es von 02:00 Uhr bis 04:00 Uhr (etwas stärker) und von 06:00 Uhr bis 07:00 Uhr (etwas schwächer). In den übrigen Zeiträumen hat es nicht geregnet.

b) 1,35... L

c) Der Wasserstand ist um 4 cm gestiegen.

d)
$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 \cdot t - 3 & \text{für } 2 \leq t \leq 4 \\ 5 & \text{für } 4 \leq t \leq 6 \\ t - 1 & \text{für } 6 \leq t \leq 7 \\ 6 & \text{für } 7 \leq t \leq 10 \end{cases}$$

e) ca. 03:43 Uhr

6.8 a)
$$T(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot t + 4, & \text{wenn } 6 \leq t \leq 9, \\ 2 \cdot t - 8, & \text{wenn } 9 \leq t \leq 12 \end{cases}$$

b) 15°C