SO VIEL RECHNEN MUSS SEIN – 8. SCHULSTUFE (AHS)

Inhaltsverzeichnis

So viel Rechnen muss sein – Konzeptideen

- Der Titel „So viel Rechnen muss sein“ dieser Aufgabensammlung ist eine Hommage an die Publikation „So viel Mathe muss sein!“ unserer Kolleg*innen der AG cosh aus Baden-Württemberg.
  Tatsächlich enthält diese Sammlung auch Aufgaben mit anderen Handlungsdimensionen als Rechnen.
- Die Aufgaben dieser Sammlung haben eine wesentliche Gemeinsamkeit:
  Sie können und sollen nur mit Stift, Papier, Geodreieck und Formelsammlung gelöst werden.
- Die Ausnahme von dieser Regel bilden jene Aufgaben, die gesondert mit dem Taschenrechnersymbol gekennzeichnet sind. Bei diesen Aufgaben soll der Taschenrechner auch numerische Auswertungen ermöglichen.
- Diese Sammlung enthält auch Aufgaben, die mit einem markiert sind.
  Diese Aufgaben sind anspruchsvoller und gehen über das Basisniveau hinaus.
- Wir bedanken uns bei den vielen Kolleg*innen, die mit ihren Rückmeldungen zur Weiterentwicklung von „So viel Rechnen muss sein“ beigetragen haben. Die vorliegende Aufgabensammlung ist kein abgeschlossenes Werk. Sie durchläuft weiterhin einen Feedbackprozess und wird in Schritten adaptiert und verbessert.

Datum: 1. September 2022.

1. Rechnen mit Quadratwurzeln

Rechnen mit Quadratwurzeln ✓ MmF

- Vergleichen und Ordnen von Dezimalzahlen
- Unterscheiden rationaler von irrationalen Zahlen
- Kennen der Quadratzahlen von $1^2 = 1$ bis $10^2 = 100$ und der Kubikzahlen von $1^3 = 1$ bis $5^3 = 125$
- Schätzen von Quadratwurzeln durch systematisches Probieren
- Rechenregeln für Wurzeln: $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ und $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$
- Rechnen mit rationalen und irrationalen Zahlen
- Ermitteln von Näherungswerten für reelle Zahlen

1.1. Mika denkt sich das folgende mathematische Rechenspiel für seine*ihre beiden Geschwister aus:
Von einem Computerprogramm werden nach dem Zufallsprinzip zwei ganze Zahlen von 1 bis 100 angezeigt.
Diese sollen dann so schnell wie möglich addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden.
Wer als zuerst alle vier Ergebnisse richtig hat, bekommt ein Stück Schokolade zur Belohnung.
Mika behauptet nun, dass jedes der vier Rechenergebnisse wieder eine ganze Zahl ist, unabhängig davon, welche zwei Zahlen ursprünglich ausgewählt wurden.

Mika hat sich leider geirrt. Finde ein geeignetes Gegenbeispiel, das Mikas Behauptung widerlegt. MmF

1.2. Gegeben sind fünf Aussagen über Zahlen. Kreuze alle wahren Aussagen an:

- ☐ Jede rationale Zahl ist eine natürliche Zahl.
- ☐ Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl.
- ☐ Jede Bruchzahl ist eine rationale Zahl.
- ☐ Die Quadratwurzel jeder natürlichen Zahl ist eine irrationale Zahl.
- ☐ Jede irrationale Zahl ist eine reelle Zahl.

MmF

1.3. Eine reelle Zahl gehört entweder der Teilmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder der Teilmenge der irrationalen Zahlen $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ an. Entscheide bei den folgenden Zahlen und Rechenergebnissen, ob es sich um eine rationale oder irrationale Zahl handelt. Kreuze die jeweils zutreffende Menge an.

	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$
$\pi - 1$	☐	☐
$\sqrt{\frac{81}{16}}$	☐	☐
$\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}$	☐	☐
3,141 592 65	☐	☐
$\pi - \frac{\pi}{100}$	☐	☐

MmF

1.4. Ordne die folgenden Zahlen nach ihrer Größe.

6,31 $\quad \sqrt{36} \quad \sqrt{37}$ 6,13 6,3 $\quad \sqrt{36{,}01} \quad \frac{631}{99}$

MmF

1.5. Kreuze jeweils alle Zahlenbereiche an, in denen die Zahl enthalten ist.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
3,7					
$\sqrt{17}$					
-8					
273					
$\frac{5}{8}$					
$\sqrt{49}$					

MmF

Zahlen als Quadratwurzeln schreiben MmF

Jede nichtnegative reelle Zahl lässt sich als Quadratwurzel einer nichtnegativen reellen Zahl darstellen. Dazu wird die Zahl quadriert und dann die Quadratwurzel über das Quadrat der Zahl geschrieben.

Zum Beispiel: $1{,}5 = \sqrt{1{,}5^2} = \sqrt{2{,}25}$ bzw. $\frac{3}{8} = \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{64}}$

1.6. Schreibe die Zahl als Quadratwurzel aus einer Dezimalzahl oder einem Bruch.

a) 3 **b)** 30 **c)** 17 **d)** 0,17 **e)** $\frac{1}{2}$ **f)** $\frac{5}{7}$ MmF

1.7. Ziehe die Quadratwurzel.

a) $\sqrt{100}$ **b)** $\sqrt{10\,000}$ **c)** $\sqrt{1\,000\,000}$ **d)** $\sqrt{0{,}01}$ **e)** $\sqrt{0{,}0001}$ **f)** $\sqrt{0{,}000\,001}$ MmF

1.8. Ziehe die Quadratwurzel.

a) $\sqrt{900}$ **b)** $\sqrt{40\,000}$ **c)** $\sqrt{25\,000\,000}$ **d)** $\sqrt{0{,}09}$ **e)** $\sqrt{0{,}0081}$ **f)** $\sqrt{0{,}000\,016}$ MmF

1.9. Ziehe die Kubikwurzel.

a) $\sqrt[3]{64}$ **b)** $\sqrt[3]{0{,}064}$ **c)** $\sqrt[3]{64\,000}$ **d)** $\sqrt[3]{27}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}027}$ **f)** $\sqrt[3]{27\,000\,000}$ MmF

1.10. Ziehe die Quadratwurzel.

a) $\sqrt{36 \cdot 25}$ **b)** $\sqrt{\frac{9}{49}}$ **c)** $\sqrt{225}$ **d)** $\sqrt{\frac{49}{2500}}$ **e)** $\sqrt{0{,}0001 \cdot 16}$ **f)** $\sqrt{\frac{8100}{144}}$ MmF

1.11. Ermittle jeweils die nächstkleinere und nächstgrößere ganze Zahl.

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt{92}$ **c)** $\sqrt{31}$ **d)** $\sqrt{54}$ **e)** $-\sqrt{11}$ **f)** $-\sqrt{80}$ MmF

1.12. Wir können $\sqrt{2500}$ berechnen, indem wir 2500 geschickt in Faktoren zerlegen:

$$\sqrt{2500} = \sqrt{25 \cdot 100} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{100} = 5 \cdot 10 = 50$$

Berechne jeweils die angegebene Wurzel auf diese Weise.

a) $\sqrt{3600}$ **b)** $\sqrt{900}$ **c)** $\sqrt{22500}$ **d)** $\sqrt{2250000}$ **e)** $\sqrt{640000}$ MmF

1.13. Gegeben ist ein Würfel, von dem eine Größe bekannt ist.
Berechne jeweils die Länge der Seitenkante a dieses Würfels.

a) Der Oberflächeninhalt des Würfels beträgt $54\,\text{cm}^2$.

b) Das Volumen des Würfels beträgt $64\,\text{cm}^3$.

MmF

Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ MmF

Indirekter Beweis: Beim indirekten Beweis nimmt man das Gegenteil dessen als wahr an, was bewiesen werden soll, und zeigt, dass dadurch ein Widerspruch herbeigeführt werden kann. Der indirekte Beweis, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, beginnt daher mit der Annahme, dass $\sqrt{2}$ als Bruch dargestellt werden kann:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \qquad \text{mit} \quad m, n \in \mathbb{N}$$

Quadrieren und Multiplizieren mit dem Nenner n^2 liefert:

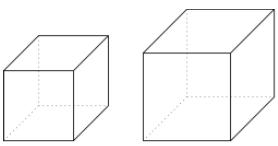
$$2 \cdot n^2 = m^2$$

Da 2 eine Primzahl ist, lässt sich nun mit der eindeutigen Zerlegung von m und n in Primfaktoren argumentieren. Alle Primfaktoren von m werden beim Quadrieren von m verdoppelt; $m^2 = m \cdot m$ besitzt daher eine gerade Anzahl von Primfaktoren. Gleiches gilt für das Quadrat von n, das ebenfalls eine gerade Anzahl von Primfaktoren aufweist. Die linke Seite $2 \cdot n^2$ ist daher aus einer *ungeraden* Anzahl von Primfaktoren aufgebaut. Die rechte Seite m^2 hat eine *gerade* Anzahl von Primfaktoren.
Da aber die Zerlegung einer natürlichen Zahl in Primfaktoren eindeutig ist und daher schon gar nicht gleichzeitig eine *gerade* und eine *ungerade* Anzahl von Primfaktoren besitzen kann, ist die Gleichung nicht richtig. Es entsteht ein Widerspruch zur Annahme, die daher falsch sein muss. Daraus folgt, dass Wurzel aus 2 keine rationale Zahl ist.

1.14. Jana berechnet mir ihrem Taschenrechner die Quadratwurzel aus 2 und erhält 1,414 213 562 als Ergebnis. Da sie weiß, dass Wurzelziehen die Umkehrung des Potenzierens ist, tippt sie das Ergebnis noch einmal ein und quadriert es. Sie ist erstaunt, dass sie nun 1,999 999 999 und nicht 2 erhält. Erkläre, wie es zu diesem falschen Ergebnis kommt.

MmF

1.15. Zur Demonstration, dass nicht allein die Größe eines Gegenstands seine Masse bestimmt, werden für den Physikunterricht zwei Würfel mit gleicher Masse aber aus unterschiedlichen Materialien angeschafft. Jeder Würfel hat dabei eine Masse von 1 kg.



a) Würfel 1 ist aus Holz gefertigt (Dichte $\rho_{\text{Holz}} = 300\,\text{kg/m}^3$). Berechne die Länge der Seitenkante des Holzwürfels.

b) Würfel 2 ist aus Eisen ($\rho_{\text{Eisen}} = 7874\,\text{kg/m}^3$). Berechne die Länge der Seitenkante des Eisenwürfels.

c) Elisabeth stellt sich die Frage, wie groß wohl ein Würfel aus purem Gold wäre ($\rho_{\text{Gold}} = 19\,320\,\text{kg/m}^3$).

  1) Berechne die Kantenlänge dieses Goldwürfels.

  2) Blattgold ist Gold, das als extrem dünne Folie mit 0,000 125 mm Dicke zum Vergolden von Oberflächen verwendet wird. Berechne, wie viele m^2 Blattgold sich aus 1 kg Gold herstellen lassen.

MmF

1.1 Beim Addieren, Subtrahieren und Multiplizieren hat Mika recht, beim Dividieren jedoch nicht. Gegenbeispiel: $3 : 4 = 0{,}75$ ist eine rationale, aber keine ganze Zahl. Oder: Wenn die zweite Zahl 0 ist, kann die Division nicht ausgeführt werden.

1.2 ☒ Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl.
☒ Jede Bruchzahl ist eine rationale Zahl.
☒ Jede irrationale Zahl ist eine reelle Zahl.

1.3 $\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$

1.4 $\sqrt{36} < \sqrt{36{,}01} < \sqrt{37} < 6{,}13 < 6{,}3 < 6{,}31 < \frac{631}{99}$

1.5

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
3,7			×		×
$\sqrt{17}$				×	×
-8		×	×		×
273	×	×	×		×
$\frac{5}{8}$			×		×
$\sqrt{49}$	×	×	×		×

1.6 **a)** $\sqrt{9}$ **b)** $\sqrt{900}$ **c)** $\sqrt{289}$ **d)** $\sqrt{0{,}0289}$ **e)** $\sqrt{\frac{1}{4}}$ **f)** $\sqrt{\frac{25}{49}}$

1.7 **a)** 10 **b)** 100 **c)** 1000 **d)** 0,1 **e)** 0,01 **f)** 0,001

1.8 **a)** 30 **b)** 200 **c)** 5000 **d)** 0,3 **e)** 0,09 **f)** 0,004

1.9 **a)** 4 **b)** 0,4 **c)** 40 **d)** 3 **e)** 0,3 **f)** 300

1.10 **a)** $6 \cdot 5 = 30$ **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** 15 **d)** $\frac{7}{50}$ **e)** 0,04 **f)** $\frac{90}{12} = \frac{15}{2}$

1.11 **a)** 2 und 3 **b)** 9 und 10 **c)** 5 und 6 **d)** 7 und 8 **e)** -4 und -3 **f)** -9 und -8

1.12 **a)** 60 **b)** 30 **c)** 150 **d)** 1500 **e)** 800

1.13 **a)** 3 cm **b)** 4 cm

1.14 $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl, die als Dezimalzahl unendliche viele Nachkommastellen besitzt. Die Zahl am Taschenrechner ist daher nur eine Näherung und ihr Quadrat nicht exakt 2.

1.15 **a)** $a_{\text{Holzwürfel}} \approx 14{,}9\,\text{cm}$ **b)** $a_{\text{Eisenwürfel}} \approx 5{,}0\,\text{cm}$ **c)** **1)** $a_{\text{Goldwürfel}} \approx 3{,}7\,\text{cm}$ **2)** $A \approx 414\,\text{m}^2$

2. Rechnen mit Termen

Rechnen mit Termen ✓

- Monome addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren
- Klammern ausmultiplizieren
- Bruchterme addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren
- Binomische Formeln anwenden: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)\cdot(a-b)$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$
- Terme faktorisieren (ganze Zahlen herausheben und Variable herausheben)
- Äquivalenz zweier Terme nachweisen

2.1. Übersetze den Text in einen Term. Verwende x als Platzhalter für die unbekannte Zahl.

a) Das Dreifache einer unbekannten Zahl wird um 16 vermindert.

b) Ein Viertel einer unbekannten Zahl wird um 8 vergrößert.

c) Das Doppelte der unbekannten Zahl wird von 42 abgezogen. Das Ergebnis wird verdoppelt.

d) Das Produkt der unbekannten Zahl mit sich selbst wird um 1 verkleinert. Das Ergebnis wird halbiert.

e) Der Kehrwert der unbekannten Zahl wird um 3 vergrößert.

f) Das Quadrat einer unbekannten Zahl wird verdoppelt. Das Ergebnis wird um 5 verkleinert.

2.2. Trage Zahlen so in die Kästchen ein, dass die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind.

a) $19\cdot x-8\cdot y+2\cdot x-3\cdot y+x\cdot y-2+4\cdot x-2\cdot x\cdot y=\square\cdot x\cdot y+\square\cdot x+\square\cdot y+\square$

b) $7\cdot x-(3-2\cdot y)+(-6\cdot x-8\cdot y)-(-3\cdot x+9\cdot y)=\square\cdot x+\square\cdot y+\square$

c) $-[2\cdot x-(3\cdot y-5\cdot x+2)-8\cdot y]=\square\cdot x+\square\cdot y+\square$

2.3. Trage Zahlen so in die Kästchen ein, dass die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind.

a) $5\cdot x\cdot(3-2\cdot y)+2\cdot y\cdot(x-5)-3\cdot(2\cdot x-5\cdot y)=\square\cdot x\cdot y+\square\cdot x+\square\cdot y$

b) $(4\cdot x-3\cdot y)\cdot(5-2\cdot x)=\square\cdot x^2+\square\cdot x\cdot y+\square\cdot x+\square\cdot y$

c) $(5\cdot x^2-3\cdot y)\cdot(2\cdot y-3\cdot x)=\square\cdot x^3+\square\cdot x^2\cdot y+\square\cdot y^2+\square\cdot x\cdot y$

2.4. Welche der folgenden Terme sind zum Term $4\cdot x-2$ äquivalent? Kreuze an.

☐ $2\cdot(x-1)$ ☐ $-(2-4\cdot x)$ ☐ $2\cdot x-1$ ☐ $\dfrac{12\cdot x-6}{3}$ ☐ $4\cdot(x-2)$ ☐ $(4\cdot x)-2$

2.5. Welche der folgenden Terme sind zum Term x^2-9 äquivalent? Kreuze an.

☐ $(x-3)^2$ ☐ $(x-3)\cdot(x+3)$ ☐ $(x+3)^2$ ☐ $2\cdot x-9$ ☐ $x\cdot x-9$ ☐ x^{2-9}

2.6. Welche der folgenden Terme sind zum Term $\dfrac{5-2\cdot x}{2}$ äquivalent? Kreuze an.

☐ $\dfrac{2\cdot x-5}{-2}$ ☐ $\dfrac{5}{2}-x$ ☐ $5-x$ ☐ $\dfrac{15-6\cdot x}{6}$ ☐ $\dfrac{-5-2\cdot x}{-2}$ ☐ $\dfrac{5-x^2}{2}$

2.7. Welche der folgenden Terme sind zum Term $\left(x^2\right)^3$ äquivalent? Kreuze an.

☐ x^5 ☐ x^6 ☐ x^8 ☐ $(-x)^5$ ☐ $(-x)^6$ ☐ $(-x)^8$

2.8. Vereinfache die gegebenen Terme so weit wie möglich.

a) $7\cdot(3\cdot a-2)-2\cdot(4-5\cdot a)$ **b)** $\left(-\dfrac{y}{2}\right)^4+y^4$ **c)** $(5\cdot x)^2-5\cdot x^2$

2.9. Hebe möglichst viele gemeinsame Faktoren heraus.

a) $36\cdot s\cdot t^2+28\cdot s\cdot t-24\cdot s^2\cdot t$ **b)** $15\cdot u^3-3\cdot u^2+12\cdot u^4$

2.10. Bei den folgenden Bruchtermen wurde bereits der erste Schritt zum Erweitern des Bruchs ausgeführt. Ergänze den korrekten Zähler oder Nenner und gib die zulässigen Werte für die Variable an, damit der Nenner nicht null wird.

a) $\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{5\cdot x}{\boxed{}}$ **b)** $\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{5\cdot x+10}{\boxed{}}$ **c)** $\dfrac{x+1}{x-2}=\dfrac{\boxed{}}{(x-2)\cdot(x+2)}$

2.11. Ein Bruchterm wurde jeweils erweitert. Ermittle den Faktor, mit dem erweitert wurde.

a) $\dfrac{x-1}{2x^2+1}=\dfrac{2x^2-2x}{4x^3+2x}$

b) $\dfrac{3x-1}{x^2-7}=\dfrac{9x^3-3x^2}{3x^4-21x^2}$

c) $\dfrac{2x}{x-3}=\dfrac{2x^2+6x}{x^2-9}$

d) $\dfrac{2x-1}{x+4}=\dfrac{4x^2-9x+4}{2\cdot(x^2-16)}$

e) $\dfrac{x+3}{2x-1}=\dfrac{x^2+5x+6}{2x^2+3x-2}$

2.12. Überprüfe, ob richtig herausgehoben wurde. Falls nicht, korrigiere den Fehler und hebe den angegebenen Faktor richtig heraus.

a) $7x^2+7x=7x\cdot(7x+1)$
b) $2x^2y+4xy^2=2xy\cdot(y+2x)$
c) $21x^3+28x^2=7x^2\cdot(3x+4)$
d) $5x\cdot 3y-5y^2=5y\cdot(x+3-y)$

2.13. Ergänze so, dass die Terme auf beiden Seiten äquivalent sind:

a) $\boxed{}\cdot(x+3)=5x+15$
b) $(4y-8)=4\cdot\left(\boxed{}-\boxed{}\right)$
c) $\left(\boxed{}-y\right)\cdot\boxed{}=6-3y$

2.1 **a)** $3 \cdot x - 16$ **b)** $\frac{x}{4} + 8$ **c)** $(42 - 2 \cdot x) \cdot 2$ **d)** $\frac{x^2-1}{2}$ **e)** $\frac{1}{x} + 3$ **f)** $2 \cdot x^2 - 5$

2.2 **a)** $(-1) \cdot x \cdot y + 25 \cdot x + (-11) \cdot y + (-2)$ **b)** $4 \cdot x + (-15) \cdot y + (-3)$ **c)** $(-7) \cdot x + 11 \cdot y + 2$

2.3 **a)** $-8 \cdot x \cdot y + 9 \cdot x + 5 \cdot y$ **b)** $-8 \cdot x^2 + 6 \cdot x \cdot y + 20 \cdot x + -15 \cdot y$ **c)** $-15 \cdot x^3 + 10 \cdot x^2 \cdot y - 6 \cdot y^2 + 9 \cdot x \cdot y$

2.4 $-(2 - 4 \cdot x)$, $\frac{12 \cdot x - 6}{3}$ und $(4 \cdot x) - 2$

2.5 $(x - 3) \cdot (x + 3)$ und $x \cdot x - 9$

2.6 $\frac{2 \cdot x - 5}{-2}$, $\frac{5}{2} - x$ und $\frac{15 - 6 \cdot x}{6}$

2.7 x^6 und $(-x)^6$

2.8 **a)** $31 \cdot a - 22$ **b)** $20 \cdot x^2$ **c)** $\dfrac{5 \cdot y^4}{4}$

2.9 **a)** $4 \cdot s \cdot t \cdot (9 \cdot t + 7 - 6 \cdot s)$ **b)** $3 \cdot u^2 \cdot (5 \cdot u - 1 + 4 \cdot u^2)$

2.10 **a)** $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{5 \cdot x}{5 \cdot x + 10}$; $x \neq -2$ **b)** $\dfrac{x+2}{x^2} = \dfrac{5 \cdot x + 10}{5 \cdot x^2}$; $x \neq 0$ **c)** $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{x^2 + 3 \cdot x + 2}{x^2 - 4}$; $x \neq -2$ und $x \neq 2$

2.11 **a)** $(2 \cdot x)$ **b)** $(3 \cdot x^2)$ **c)** $(x + 3)$ **d)** $2 \cdot (x - 4)$ **e)** $(x + 2)$

2.12 **a)** korrigiert: $7x^2 + 7x = 7x \cdot (x + 1)$
b) korrigiert: $2x^2y + 4xy^2 = 2xy \cdot (x + 2y)$
c) richtig
d) korrigiert: $5x3y - 5y^2 = 5y \cdot (3x - y)$

2.13 **a)** $5 \cdot (x + 3) = 5x + 15$ **b)** $(4y - 8) = 4 \cdot (y - 2)$ **c)** $(2 - y) \cdot 3 = 6 - 3y$

3. Gleichungen und Formeln

Gleichungen & Formeln ✓ MmF

- lineare Gleichungen und Bruchgleichungen lösen
- Formeln aus Anwendungsbereichen auf eine bestimmte Variable umformen
- Verwenden von Gleichungen in Sachsituationen
- Erkennen und Formulieren von Proportionalitäten in Formeln
- Aufstellen und Umformen von Termen und Formeln

Vereinbarungen beim Umformen von Formeln nach x:

- ☆, falls x sowohl in einem Zähler als auch in einem Nenner vorkommt.
- Gleichungen und Formeln, bei denen x^2 vorkommt, sind hier nur über der Grundmenge $\mathbb{R}_0^+$ zu lösen.
  In diesem Fall ist das Ziehen der nicht-negativen Wurzel eine Äquivalenzumformung.

Vorbereitung MmF

Bei den Aufgaben 3.1 – 3.7 nehmen die Parameter a, b, c und d sowie die Variable x jeweils nur solche Werte an, dass alle Ausdrücke definiert sind und die Gleichung eine eindeutige Lösung $x = \ldots$ über der angegebenen Grundmenge hat.

3.1. Forme nach x um.

a) $3 \cdot x + 4 \cdot x = 42$ **b)** $7 \cdot x - 2 \cdot x = 25$ **c)** $a \cdot x + b \cdot x = c$ MmF

3.2. Forme nach x um.

a) $5 \cdot x = 3 \cdot x + 8$ **b)** $8 \cdot x = 5 \cdot x - 12$ **c)** $-2 \cdot x = 1 + 3 \cdot x$ **d)** $a \cdot x = b \cdot x + c$ MmF

3.3. Forme nach x um.

a) $3 \cdot (x+5) = -2 \cdot x$ **b)** $2 \cdot (3 - x) = 4 \cdot (x + 6)$ **c)** $a \cdot (x + b) = x \cdot (c + d)$ MmF

3.4. Forme nach x um.

a) $\frac{42}{x} = 6$ **b)** $\frac{4}{x+2} = \frac{3}{x+1}$ **c)** $\frac{2}{x-3} = \frac{3}{x+4}$ **d)** $\frac{2}{x+1} - \frac{4}{x+3} = 0$ **e)** $\frac{a}{x+b} = \frac{c}{x+d}$ MmF

3.5. Forme nach x um.

a) $\frac{x-1}{3} = \frac{x}{4} - 1$ **b)** $\frac{x+1}{5} + 1 = \frac{x}{3}$ **c)** $\frac{x+2}{3} + \frac{x}{2} = 2$ **d)** $\frac{x+a}{b} = \frac{x}{c} + d$ MmF

3.6. Forme nach x um.

a) $2 \cdot \left(\frac{x}{4} + 3\right) = x$ **b)** $4 \cdot \left(\frac{x}{3} - 1\right) = x + 2$ **c)** $a \cdot \left(\frac{x}{b} + c\right) = x + d$ MmF

3.7. Forme nach $x \geq 0$ um.

a) $x^2 + 3 = 7$ **b)** $2 \cdot x^2 - 9 = 9$ **c)** $a \cdot x^2 + b = c$ MmF

3.8. ☆ Gerlinde kann folgende Gleichung in ihrem Heft nur mehr unvollständig lesen:

$$2 \cdot x - \left(\boxed{} \cdot x - \boxed{} \right) = 38 - 4 \cdot x$$

Sie weiß aber noch, dass die Lösung der Gleichung $x = 5$ ist.
Wie könnte die Gleichung lauten?

MmF

3.9. Löse die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $3 \cdot (2 \cdot x - 4) = 5 \cdot x - 1$ **b)** $\frac{2 \cdot x}{5} + 1 = 5$ **c)** $\frac{x+2}{4} - \frac{x+2}{3} = 2$ **d)** $\frac{4 \cdot x}{3} - \frac{3 \cdot x}{2} = 2 \cdot x + 13$

3.10. Löse die Gleichung über der Grundmenge $G = \mathbb{R}$. Für welche Werte von x ist die Gleichung nicht definiert?

a) $\frac{3}{x-2} = 5$ **b)** $\frac{2 \cdot x}{x-28} = 6$ **c)** $\frac{14}{3 \cdot x - 8} = \frac{12}{2 \cdot x - 4}$ **d)** $\frac{2 \cdot (3 \cdot x - 2)}{x+4} = 2$

3.11. In einer Schulklasse befinden sich M Mädchen und K Knaben.
Interpretiere jede Gleichung in diesem Zusammenhang.

a) $M + K = 22$ **b)** $M = 2 \cdot K$ **c)** $M = K - 7$ **d)** $M = \frac{K}{3}$

3.12. Ein Rechteck mit der Länge a und der Breite b hat den Flächeninhalt A.
Ein zweites Rechteck entsteht dadurch, dass die Länge der Seite a um 10 % vergrößert, jene der Seite b dagegen um 20 % verkleinert wird.

a) Gib einen Term abhängig von a und b an, der den Flächeninhalt des zweiten Rechtecks beschreibt.
b) Gib einen Term abhängig von a und b an, der den Umfang des zweiten Rechtecks beschreibt.
c) Gib einen Term abhängig von A an, der den Flächeninhalt des zweiten Rechtecks beschreibt.
d) Ermittle, ob das zweite Rechteck größer oder kleiner als das ursprüngliche ist und berechne die Änderung des Flächeninhalts in Prozent.

3.13. Für die Berechnung der kinetischen Energie E in der Physik verwendet man folgende Formel:

$$E = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

a) Drücke die Geschwindigkeit $v \geq 0$ mithilfe der anderen Variablen aus.
b) Wie wirkt sich eine Erhöhung der Masse m um 10 % auf die Energie E aus?
c) Wie wirkt sich eine Erhöhung der Geschwindigkeit v um 10 % auf die Energie E aus?
d) Wie muss man die Geschwindigkeit v ändern, damit bei einer Vervierfachung der Masse m die Energie E gleich bleibt?

3.14. In einer HTL werden k Knaben und m Mädchen unterrichtet. Die Anzahl aller Schülerinnen und Schüler ist um 25 kleiner als die dreifache Anzahl der Mädchen.

a) Gib eine Formel für k in Abhängigkeit von m an.
b) Gib eine Formel für m in Abhängigkeit von k an.
c) Berechne die Anzahl der Knaben, wenn die Anzahl aller Schülerinnen und Schüler 1043 ist.

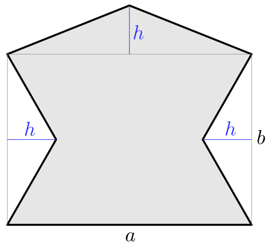
3.15. Der Preis A einer Ware steigt um p Prozent. Später fällt der neue Preis wieder um p Prozent. Der Endpreis wird mit E bezeichnet.

a) Stelle eine Formel für E in Abhängigkeit von A und p auf.
b) Der Endpreis E ist kleiner als der Anfangspreis A.
Überlege, wie man das auch anhand der Formel begründen kann.
c) Ermittle den Prozentsatz p, für den der Endpreis E um 9 % kleiner ist als der Anfangspreis A.

3.16. Vergrößert man Zähler und Nenner des Bruchs $\frac{4}{7}$ um dieselbe Zahl, dann erhält man den Bruch $\frac{2}{3}$.
Stelle eine Gleichung auf und berechne die gesuchte Zahl.

3.17. Der Flächeninhalt F der skizzierten Fläche kann mit folgender Formel berechnet werden:

$$F = \frac{1}{2} \cdot [a \cdot (b + h) + b \cdot (a - 2 \cdot h)]$$



a) Begründe, dass die Formel richtig ist.

b) Löse die Formel nach a auf. Vermeide Doppelbrüche.

c) Löse die Formel nach b auf. Vermeide Doppelbrüche.

MmF

3.18. Herr Rechenmeister muss viele Jahre nach seiner Schulzeit wieder einmal eine Gleichung lösen. Er ist ein bisschen aus der Übung und führt folgende Umformungen aus:

$$5 - (3 \cdot x - 2) \cdot 4 = x - 6 \cdot (5 - 2 \cdot x) \quad (1)$$
$$5 - 12 \cdot x - 8 = x - 30 - 8 \cdot x \quad (2)$$
$$-7 \cdot x - 8 = -9 \cdot x - 30 \quad (3)$$
$$2 \cdot x = -38 \quad (4)$$
$$x = -40 \quad (5)$$

a) Gib alle Fehler an, die Herrn Rechenmeister bei den Umformungen passiert sind.

b) Berechne die korrekte Lösung der Gleichung in Zeile 1.

MmF

3.19. Der erste Versuch von Herrn Rechenmeister, eine Gleichung zu lösen, endete im Rechendesaster. Er versucht sich an einer neuen Gleichung:

$$\frac{x - 2}{3} - \frac{1 + x}{4} = x + 2 \quad (1)$$
$$\frac{4 \cdot x - 8}{12} - \frac{3 + 3 \cdot x}{12} = x + 2 \quad (2)$$
$$4 \cdot x - 8 - 3 + 3 \cdot x = 12 \cdot x + 2 \quad (3)$$
$$7 \cdot x + 5 = 12 \cdot x + 2 \quad (4)$$
$$7 = 19 \cdot x \quad (5)$$
$$-12 = x \quad (6)$$

a) Gib alle Fehler an, die Herrn Rechenmeister dieses Mal bei den Umformungen passiert sind.

b) Berechne die korrekte Lösung der Gleichung in Zeile 1.

MmF

3.20. Addiert man vier aufeinanderfolgende *gerade* natürliche Zahlen, so erhält man 220.
Stelle eine geeignete Gleichung auf und berechne diese vier Zahlen.

MmF

3.21. Bei Offshore-Windparks werden Windräder mitten im Meer aufgestellt. Der Pfeiler eines bestimmten Windrades ragt 105 m über den Meeresspiegel hinaus. Als Fundament stecken $\frac{1}{6}$ der Pfeilerlänge im Meeresboden und $\frac{1}{4}$ befindet sich im Wasser. Stelle eine Gleichung für die Gesamtlänge l des Pfeilers auf und berechne diese.

MmF

3.22. Gib jeweils die Lösungsmenge L der Gleichung an.

a) $(1 - 2 \cdot x) \cdot (1 + 2 \cdot x) = 2 \cdot (1 - 2 \cdot x) - (2 \cdot x - 1)^2$

b) $(1 - 2 \cdot x) \cdot (1 + 2 \cdot x) = 2 \cdot (3 - 2 \cdot x) - (2 \cdot x - 1)^2$

MmF

3.23. Gegeben ist eine lineare Gleichung:

$$2 \cdot (x - 1) = 3 \cdot (x - 1)$$

Die Zahl 0 ist keine Lösung, da sich beim Einsetzen von 0 eine falsche Aussage ergibt ($-2 \neq -3$).
Die Zahl 1 ist eine Lösung, da sich beim Einsetzen von 1 eine wahre Aussage ergibt.
Wenn du beide Seiten der Gleichung durch $(x - 1)$ dividierst, so erhältst du

$$2 = 3$$

Diese Gleichung hat aber keine Lösung.
Erkläre, wie dieser (scheinbare) Widerspruch entstanden ist.

3.24. Frau Rechenmeister muss die folgende Gleichung lösen:

$$3 \cdot x = 8 - x$$

Da sie sehr gerne quadriert, macht sie folgende Umformungen:

$$\begin{aligned} (3 \cdot x)^2 &= (8 - x)^2 \\ 9 \cdot x^2 &= 64 - 16 \cdot x + x^2 \\ 8 \cdot x^2 + 16 \cdot x - 64 &= 0 \\ x^2 + 2 \cdot x - 8 &= 0 \\ (x + 1)^2 - 9 &= 0 \\ (x + 1)^2 &= 9 \end{aligned}$$

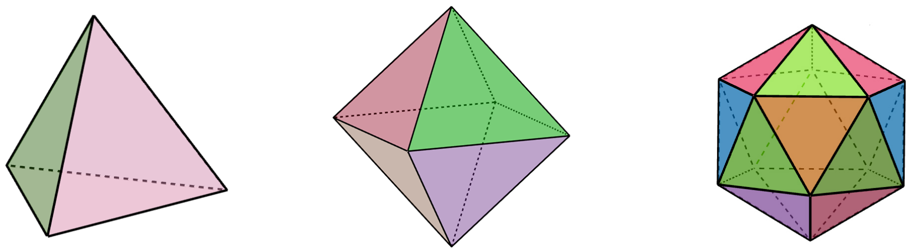
Daraus schließt sie, dass $x + 1$ entweder $+3$ oder -3 sein muss. Die beiden Lösungen der untersten Gleichung lauten also $x_1 = 2$ und $x_2 = -4$.
Nun setzt sie ihre beiden Lösungen in die oberste Gleichung ein und ist ganz enttäuscht, dass x_2 gar keine Lösung ist.
Erkläre, wo der Fehler passiert ist.

3.25. Im Folgenden werden verschiedene Umformungen von Gleichungen in einer Variablen mit der Grundmenge $\mathbb{R}$ beschrieben. Entscheide jeweils, ob es sich um eine Äquivalenzumformung handelt.

Umformung auf beiden Seiten der Gleichung	Äquivalenzumformung	keine Äquivalenzumformung
Multiplikation mit $(+4)$	☐	☐
Division durch (-4)	☐	☐
Addition von $4 \cdot x$	☐	☐
Multiplikation mit $4 \cdot x$	☐	☐
Multiplikation mit $(x + 4)$	☐	☐
Division durch $(x + 4)$	☐	☐
Multiplikation mit $(x^2 + 4)$	☐	☐

3.26. Kevin und sein jüngerer Bruder Moritz fahren Rollerblades auf einer 500 m langen Bahn. Kevin fährt mit einer Geschwindigkeit von 9 m/s, während Moritz nur mit 7 m/s unterwegs ist. Beide fahren um die Wette. Damit Moritz eine faire Chance hat, gibt Kevin ihm 100 m Vorsprung.
Nach welcher Zeit und nach welcher Strecke wird Kevin seinen Bruder überholen? Stelle dazu eine Gleichung auf und löse sie.

3.27. Platonische Körper sind Körper mit größtmöglicher Symmetrie, deren Oberfläche aus deckungsgleichen regelmäßigen Vielecken besteht. Von den fünf platonischen Körpern, die es gibt, sind jene drei abgebildet, deren Begrenzungsflächen gleichseitige Dreiecke sind: ein Tetraeder, ein Oktaeder und ein Ikosaeder.



a) Stelle eine möglichst einfache Formel für den Flächeninhalt der Oberfläche jedes abgebildeten platonischen Körpers in Abhängigkeit von der Kantenlänge a auf.

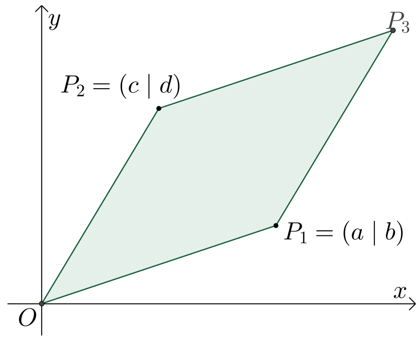
b) Berechne jeweils die Kantenlänge a, wenn der Flächeninhalt der Oberfläche $1\,\mathrm{m}^2$ beträgt.

c) Überprüfe, dass für diese drei platonischen Körper die *Eulersche Polyederformel* gilt:

$$\text{Anzahl der Ecken} - \text{Anzahl der Kanten} + \text{Anzahl der Flächen} = 2$$

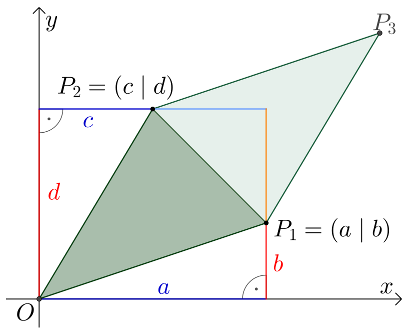
MmF

3.28. Dargestellt ist ein Parallelogramm, das im Koordinatensystem durch den Ursprung O und die Punkte $P_1 = (a \mid b)$ und $P_2 = (c \mid d)$ eindeutig festgelegt ist. Gesucht ist eine Formel für den Flächeninhalt dieses Parallelogramms.



a) Begründe mithilfe der eingezeichneten Hilfsstrecken, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OP_1P_2 ausgedrückt werden kann durch

$$A_{\text{Dreieck}} = a \cdot d - \left(\frac{a \cdot b}{2} + \frac{c \cdot d}{2} + \frac{(a-c)\cdot(d-b)}{2}\right)$$



b) Ermittle eine möglichst einfache Formel für den Flächeninhalt des Parallelogramms $OP_1P_3P_2$ mithilfe der Flächenformel aus **a)** oder mit einem anderen Ansatz.

MmF

3.29. Mithilfe von Variablen und Termen lassen sich allgemeine mathematische Zusammenhänge ausdrücken.

a) Zeige durch Vereinfachen der rechten Seiten der drei Gleichungen, dass die folgenden Zusammenhänge korrekt sind:

$$10 \cdot b + a = 9 \cdot (1 \cdot b) + (b + a)$$
$$100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 9 \cdot (11 \cdot c + 1 \cdot b) + (c + b + a)$$
$$1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 9 \cdot (111 \cdot d + 11 \cdot c + 1 \cdot b) + (d + c + b + a)$$

b) Setze das Schema aus **a)** um eine Zeile fort, indem du korrekt ergänzt:

$$10\,000 \cdot e + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = \ldots$$

c) Fasst man die Variablen $a, b, c, d, \ldots$ als Ziffern einer Zahl im dekadischen Stellenwertsystem auf, lassen sich mit den Gleichungen aus **a)** zwei Teilbarkeitsregeln beweisen. Um welche beiden Teilbarkeitsregeln handelt es sich?

3.30. Mithilfe von Variablen und Termen lassen sich allgemeine mathematische Zusammenhänge ausdrücken.

a) Zeige durch Vereinfachen der rechten Seiten der vier Gleichungen, dass die folgenden Zusammenhänge korrekt sind:

$$10 \cdot b + a = 11 \cdot b + (a - b)$$
$$100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 11 \cdot (9 \cdot c + b) + (a - b + c)$$
$$1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 11 \cdot (91 \cdot d + 9 \cdot c + b) + (a - b + c - d)$$
$$10\,000 \cdot e + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 11 \cdot (909 \cdot e + 91 \cdot d + 9 \cdot c + b) + (a - b + c - d + e)$$

b) Setze das Schema aus **a)** um eine Zeile fort, indem du korrekt ergänzt:

$$100\,000 \cdot f + 10\,000 \cdot e + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = \ldots$$

c) Fasst man die Variablen $a, b, c, d, \ldots$ als Ziffern einer Zahl im dekadischen Stellenwertsystem auf, lässt sich mit den Gleichungen aus **a)** eine Teilbarkeitsregel beweisen. Um welche Teilbarkeitsregeln handelt es sich und wie lässt sie sich in Worten formulieren?

3.31. Um die Teilbarkeitsregel für 4 und 25 allgemein zu formulieren, kann man folgende Gleichung verwenden:

$$100 \cdot a + b = 4 \cdot 25 \cdot a + b$$

a) Was beschreiben die beiden Variablen a und b, wenn die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl $n = 100 \cdot a + b$ durch 4 und 25 mit dieser Formel überprüft werden sollen?

b) Formuliere die Teilbarkeitsregel für 4 und 25.

c) Begründe mithilfe der Formel die Teilbarkeitsregel für 4 und 25.

3.30 a) -

b) $100\,000 \cdot f + 10\,000 \cdot e + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 11 \cdot (9091 \cdot f + 909 \cdot e + 91 \cdot d + 9 \cdot c + b) + q\,(a - b + c - d + e - f)$

c) Es ist die Teilbarkeitsregeln für 11: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Ziffernsumme durch 11 teilbar ist. Die alternierende Ziffernsumme erhält man, indem man die Ziffern abwechselnd addiert und subtrahiert.

3.31 a) b steht für die Zahl, die aus den beiden letzten Ziffern von n gebildet wird, a für jene Zahl, die man erhält, wenn man von n die letzten beiden Ziffern wegstreicht.

b) Eine Zahl ist durch 4 (25) teilbar, wenn die aus ihren letzten beiden Ziffern gebildete zweistellige Zahl durch 4 (25) teilbar ist.

c) Die Zahl $100 \cdot a + b$ ist durch 4 (25) teilbar, wenn $100 \cdot a$ und b durch 4 (25) teilbar sind (Summenregel). Wegen $100 \cdot a = 4 \cdot 25 \cdot a$ ist $100 \cdot a$ immer durch 4 (25) teilbar. Es muss also nur überprüft werden, ob b durch 4 (25)teilbar ist.

3.1 a) $x = 6$ **b)** $x = 5$ **c)** $x = \frac{c}{a+b}$
3.2 a) $x = 4$ **b)** $x = -4$ **c)** $x = -\frac{1}{5}$ **d)** $x = \frac{c}{a-b}$
3.3 a) $x = -3$ **b)** $x = -3$ **c)** $x = \frac{a \cdot b}{c+d-a}$
3.4 a) $x = 7$ **b)** $x = 2$ **c)** $x = 17$ **d)** $x = 1$ **e)** $x = \frac{b \cdot c - a \cdot d}{a-c}$ oder $x = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{c-a}$
3.5 a) $x = -8$ **b)** $x = 9$ **c)** $x = \frac{8}{5}$ **d)** $x = \frac{a \cdot c - b \cdot c \cdot d}{b-c}$ oder $x = \frac{b \cdot c \cdot d - a \cdot c}{c-b}$
3.6 a) $x = 12$ **b)** $x = 18$ **c)** $x = \frac{b \cdot d - a \cdot b \cdot c}{a-b}$
3.7 a) $x = 2$ **b)** $x = 3$ **c)** $x = \sqrt{\frac{c-b}{a}}$
3.8 Zum Beispiel: $2 \cdot x - (2 \cdot x - 18) = 38 - 4 \cdot x$ oder $2 \cdot x - (3 \cdot x - 23) = 38 - 4 \cdot x$
3.9 a) $L = \{11\}$ **b)** $L = \{10\}$ **c)** $L = \{-26\}$ **d)** $L = \{-6\}$
3.10 a) $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $L = \{\frac{13}{5}\}$ **b)** $D = \mathbb{R} \setminus \{28\}$, $L = \{42\}$ **c)** $D = \mathbb{R} \setminus \{2; \frac{8}{3}\}$, $L = \{5\}$ **d)** $D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $L = \{3\}$
3.11 a) Es befinden sich 22 Schüler*innnen in der Klasse.
b) Es sind zweimal so viele Mädchen wie Knaben in der Klasse.
c) Es sind 7 Mädchen weniger in der Klasse als Knaben.
d) Es sind dreimal so viele Knaben wie Mädchen in der Klasse.
3.12 a) $1{,}1 \cdot a \cdot 0{,}8 \cdot b = 0{,}88 \cdot a \cdot b$
b) $2 \cdot 1{,}1 \cdot a + 2 \cdot 0{,}8 \cdot b = 2{,}2 \cdot a + 1{,}6 \cdot b$
c) $0{,}88 \cdot A$
d) Das neue Rechteck ist um 12 % kleiner.
3.13 a) $v = \sqrt{\frac{2 \cdot E}{m}}$ **b)** Die Energie wird auch um 10 % erhöht. **c)** Die Energie steigt um 21 %. **d)** Die Geschwindigkeit muss halbiert werden.
3.14 a) $k = 2 \cdot m - 25$ **b)** $\frac{1}{2} \cdot (k + 25)$ **c)** 687
3.15 a) $E = A \cdot (1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 - \frac{p}{100})$
b) Fasst man $(1 + \frac{p}{100}) \cdot (1 - \frac{p}{100})$ zusammen als $(1 - (\frac{p}{100})^2)$, so ist dieser Faktor kleiner als 1.
c) $E = A \cdot (1 + (\frac{p}{100})^2) \to p = 100 \cdot \sqrt{1 - (\frac{E}{A})}$ mit $E = 0{,}91 \cdot A \to p = 30\,\%$
3.16 a) $F = a \cdot b + \frac{a \cdot h}{2} - b \cdot h$ Dies ist äquivalent zum Term in der Angabe.
b) $a = \frac{2 \cdot F + 2 \cdot b \cdot h}{2 \cdot b + h}$
c) $b = \frac{2 \cdot F - a \cdot h}{2 \cdot a - 2 \cdot h}$
3.17 a) In Zeile 2 fehlen die Klammern für $(12 \cdot x - 8)$ und $(30 - 8 \cdot x)$.
Von Zeile 2 auf 3 wurden $5 - 12 \cdot x$ falsch zu $-7 \cdot x$ und $x - 8 \cdot x$ zu $-9 \cdot x$ statt $-7 \cdot x$ berechnet.
In Zeile 4 ist das Ergebnis auf der rechten Seite statt -38 korrekt $-30 + 8 = -22$.
Von Zeile 4 auf 5 muss durch 2 dividiert werden.
b) $x = \frac{43}{25}$
3.18 a) Zeile 2 stimmt.
In Zeile 3 fehlen die Klammern bei $(3 + 3 \cdot x)$ und bei $(x + 2)$.
In Zeile 4 müsste $-8 - 3$ -11 ergeben statt 5.
Zeile 5 wäre korrekt mit $3 = 5 \cdot x$.
Von Zeile 5 auf Zeile 6 wurde 19 subtrahiert, statt durch 19 zu dividieren.
b) $x = -\frac{35}{11}$
3.19 $n + (n + 2) + (n + 4) + (n + 6) = 220 \iff n = 52$
Lösung: 52, 54, 56, 58
3.20 $l = 180\,\text{m}$
3.21 a) $L = \mathbb{R}$ **b)** $L = \{\}$
3.22 Die Division durch $(x - 1)$ ist nur eine Äquivalenzumformung, wenn $x \neq 1$ ist.
Wenn $x = 1$ gilt, dann würde man durch 0 dividieren. Dabei geht die Lösung $x = 1$ verloren.
3.23 Das Quadrieren selbst war der Fehler. Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Dabei können neue Lösungen hinzukommen.
3.24

Umformung auf beiden Seiten der Gleichung	Äquivalenzumformung	keine Äquivalenzumformung
Multiplikation mit $(+4)$	☒	☐
Division durch (-4)	☒	☐
Addition von $4 \cdot x$	☒	☐
Multiplikation mit $4 \cdot x$	☐	☒
Multiplikation mit $(x + 4)$	☐	☒
Division durch $(x + 4)$	☐	☒
Multiplikation mit $(x^2 + 4)$	☒	☐

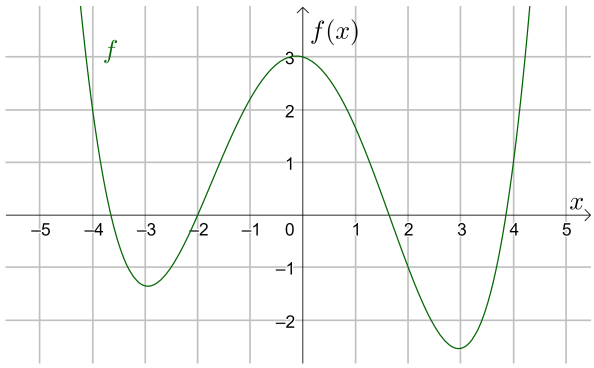
3.25 $\frac{4+x}{7+x} = \frac{2}{3} \implies x = 2$
3.26 $9 \cdot t = 100 + 7 \cdot t \implies t = 50 \implies s = 350$
Kevin überholt seinen Bruder nach 50 s und einer Strecke von 450 m.
3.27 a) $O_{\text{Tetraeder}} = a^2 \cdot \sqrt{3}$ $O_{\text{Oktaeder}} = 2 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$ $O_{\text{Ikosaeder}} = 5 \cdot a^2 \cdot \sqrt{3}$
b) $a_{\text{Tetraeder}} = 75{,}98\ldots$ cm $a_{\text{Oktaeder}} = 53{,}72\ldots$ cm $a_{\text{Ikosaeder}} = 33{,}98\ldots$ cm
c) Tetraeder: $4 - 6 + 4 = 2$ Oktaeder: $6 - 12 + 8 = 2$ Ikosaeder: $12 - 30 + 20 = 2$
3.28 a) Subtrahiere vom Flächeninhalt des Rechtecks $a \cdot d$ die Flächeninhalte der drei angrenzenden rechtwinkeligen Dreiecke.
b) $A_{\text{Parallelogramm}} = a \cdot d - b \cdot c$
3.29 a) - **b)** $10\,000 \cdot e + 1000 \cdot d + 100 \cdot c + 10 \cdot b + a = 9 \cdot (1111 \cdot e + 111 \cdot d + 11 \cdot c + 1 \cdot b) + (e + d + c + b + a)$
c) Es sind die Teilbarkeitsregeln für 3 und 9: Eine Zahl ist durch 3(9) teilbar, wenn ihre Ziffernsumme durch 3(9) teilbar ist.

4. Funktionsbegriff und Darstellungsformen von Funktionen

Darstellungsformen von Funktionen ✓ MmF

- Interpretieren grafischer Darstellungen in Sachsituationen
- Erkennen von Funktionen als eindeutige Zuordnungen
- Wechsel der Darstellungsformen von Funktionen (Funktionsgleichung, Wertetabelle, Funktionsgraph)

4.1. Im Koordinatensystem ist der Graph einer Funktion f dargestellt.



a) Ergänze die Funktionswerte der Funktion f in der Wertetabelle.

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$					

b) Ergänze jeweils näherungsweise den Funktionswert der Funktion f.

1) $f(-3) =$ ☐ **2)** $f(0) =$ ☐ **3)** $f(1) =$ ☐

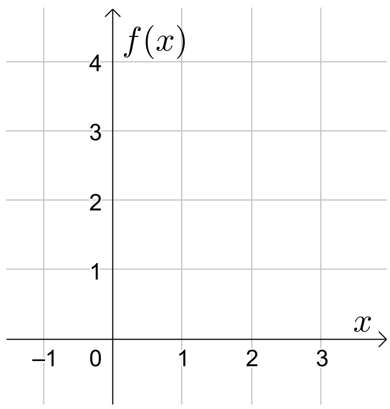
c) Ermittle alle Lösungen der Gleichung $f(x) = -2$ im dargestellten Bereich näherungsweise.

d) Begründe mithilfe des Graphen, warum die Zuordnung von x zu $y = f(x)$ eine Funktion ist, nicht aber die Zuordnung von y zu x.

MmF

4.2. Von einer Funktion f ist die Funktionsgleichung bekannt:

$$f(x) = x^2 - 2 \cdot x + 1$$



a) Berechne die angegebenen Funktionswerte und trage sie in die Wertetabelle ein.

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$					

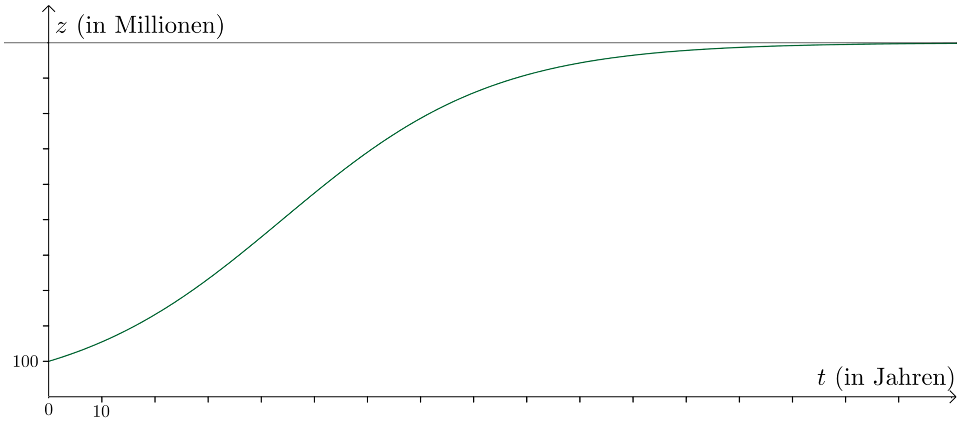
b) Zeichne die der Wertetabelle entsprechenden Punkte in das nebenstehende Koordinatensystem und skizziere den Funktionsgraphen.

c) Ergänze die folgenden Ausdrücke korrekt:

1) $f(0{,}5) =$ ☐ **2)** $f(0) =$ ☐ **3)** $f(2{,}5) =$ ☐

MmF

4.3. Ein Staat hatte im Jahr 2000 rund 100 Millionen Einwohner. Es wurde eine Prognose für die langfristige Entwicklung der Einwohnerzahl erstellt. Die Funktion „Zeit $t \to$ Einwohnerzahl z“ ist grafisch dargestellt, wobei dem Zeitpunkt $t = 0$ das Jahr 2000 entspricht. Die waagrechte Linie oberhalb des Funktionsgraphen legt den theoretischen Maximalwert der Einwohnerzahl fest.



Beantworte die folgenden Fragen näherungsweise mithilfe des Funktionsgraphen.

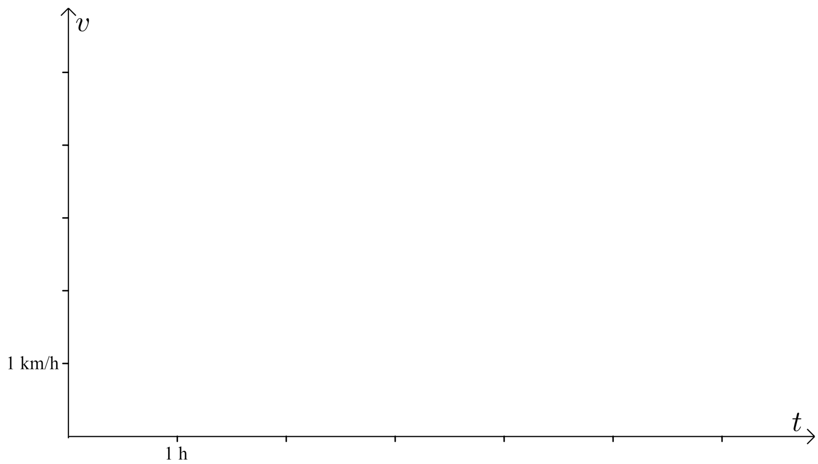
a) Wie lang dauert es, bis sich die Einwohnerzahl aus dem Jahr 2000 verdoppelt hat?
b) Wie groß ist die prognostizierte Einwohnerzahl für das Jahr 2070?
c) Wie groß ist der theoretische Maximalwert der Einwohnerzahl?
d) In welchem Jahr werden 90 % des theoretischen Maximalwerts erreicht?

MmF

4.4. Herr Kundmann beginnt eine längere Wanderung schnellen Schrittes, nämlich mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h. Er wird aber ständig und gleichmäßig langsamer, nämlich pro Stunde um 0,5 km/h. Nach 6 Stunden hat er endlich sein Ziel erreicht.

a) Zeichne den Graphen der Funktion $f : t \mapsto v$ (t in Stunden, v in Kilometer pro Stunde) in das vorbereitete Koordinatensystem.
b) Ermittle den Funktionsterm $v = f(t)$.
c) Ermittle jenen Zeitpunkt, zu dem Herr Kundmann nur mehr halb so schnell geht wie am Anfang.
d) Berechne die Länge der Wanderstrecke.

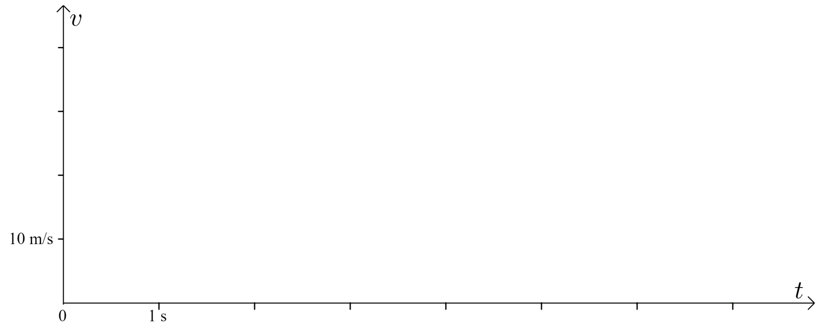
Hinweis: Die Weglänge kann als Flächeninhalt unter dem Graphen im Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm berechnet werden.



MmF

4.5. Beim Vollbremsen eines Autos ist die Funktion „Bremszeit $t \mapsto$ Geschwindigkeit v" linear. Unter idealen Straßenbedingungen kann die Geschwindigkeit eines bestimmten PKW mit der Funktionsgleichung $v = 42 - 6 \cdot t$ beschrieben werden (Zeit t seit Bremsbeginn in Sekunden, Geschwindigkeit v in Meter pro Sekunde).

a) Zeichne den Graphen der Funktion in das unten dargestellte Koordinatensystem.
b) Gib die Geschwindigkeit zu Beginn der Vollbremsung in km/h an.
c) Überlege, welche praktische Bedeutung die Zahl 6 in der Funktionsgleichung hat.
d) Berechne die Bremszeit bis zum Stillstand des Autos.
e) Die Vollbremsung des PKW misslingt, weil zu spät vor einem Hindernis gebremst wurde. Das Auto fährt mit einer Restgeschwindigkeit von 50 km/h in dieses Hindernis.
Ermittle grafisch und rechnerisch die Zeit, die vom Beginn der Vollbremsung bis zum Unfall verstrichen ist.



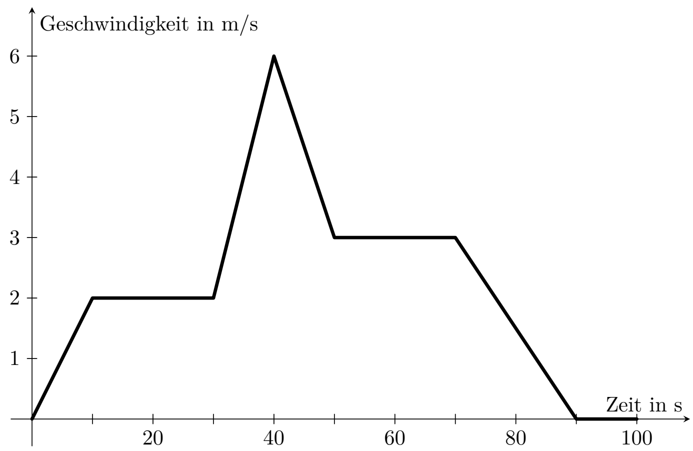
MmF

4.6. Ein Radfahrer fährt in der Hauptallee im Wiener Prater. Zu sehen ist sein Zeit-Geschwindigkeits-Diagramm für die ersten 100 Sekunden.

a) Ermittle, wie lang der Radfahrer steht.
b) Gib die Zeitpunkte an, zu denen der Radfahrer mit 18 km/h fährt.
c) Der Radfahrer beschleunigt zweimal. Ist die Beschleunigung beim zweiten Mal doppelt so groß wie beim ersten Mal?

Der zurückgelegte Weg kann als Flächeninhalt der Fläche unterhalb des Graphen berechnet werden.

d) Welchen Weg legt der Radfahrer während der ersten Bremsung zurück?
e) Hat der Radfahrer nach 50 Sekunden die Hälfte des gesamten Weges zurückgelegt?



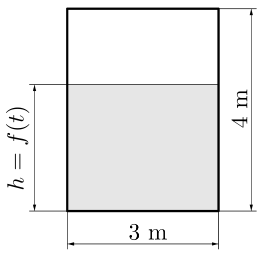
MmF

4.7. Ein Wassertank in der Form eines Drehzylinders (siehe Skizze) wird mit einem Feuerwehrschlauch gefüllt. Pro Sekunde fließen 5 Liter Wasser zu. Der Füllzeit t (in Sekunden) ist die Füllhöhe h (in dm) zugeordnet.

a) Ermittle den Funktionsterm $h = f(t)$ für die Funktion $f : t \mapsto h$.

b) Berechne die Füllzeit des Wassertanks näherungsweise.

Hinweis: Man kann eine Zahl mit π näherungsweise multiplizieren, indem man die Zahl mit 3 multipliziert und dann noch 5 % dieses Wertes addiert.



4.1 a)

x	-4	-2	0	2	4
$f(x)$	2	0	3	-1	1

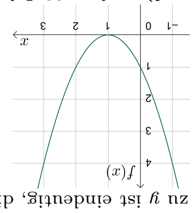
b) 1) $f(-3) \approx -1{,}4$ **2)** $f(0) = 3$ **3)** $f(1) \approx 1{,}6$

c) $f(2{,}4) = -2$ und $f(3{,}4) = -2$ **d)** Die Zuordnung von x zu y ist eindeutig, die Zuordnung von y zu x dagegen nicht.

4.2 a)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	1	0	1	4

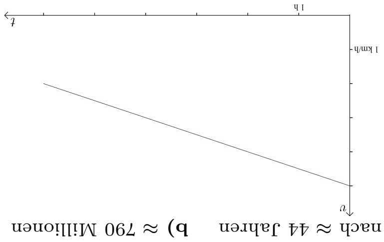
b)



c) 1) $f(0{,}5) = 0{,}25$ **2)** $f(0) = 1$ **3)** $f(2{,}5) = 2{,}25$

4.3 a) nach ≈ 44 Jahren **b)** ≈ 790 Millionen **c)** 1 Milliarde **d)** nach ≈ 88 Jahren

4.4 a)



b) $v = f(t) = 5 - 0{,}5 \cdot t$ **c)** nach 5 Stunden **d)** 21 km

4.5 a) 42 m/s = 151,2 km/h **b)** Pro Sekunde nimmt die Geschwindigkeit um 6 m/s ab. **c)** 7 s **d)** $\approx 4{,}7$ s

4.6 a) 10 s **b)** ca. 38 s und ca. 43 s **c)** Ja (Zunahme von 4 m/s und 2 m/s in 10 s) **d)** 45 m **e)** Nein, deutlich mehr: 135 m von 225 m

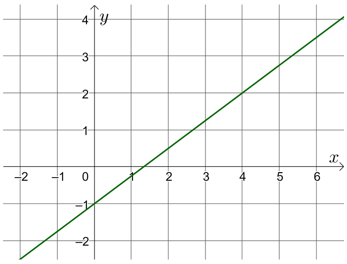
4.7 a) $h(t) = \frac{1}{45 \cdot \pi} \cdot t \approx 0{,}0071 \cdot t$ **b)** $t = 1800 \cdot \pi\,\text{s} \approx 5670\,\text{s}$

5. Lineare Funktionen

Lineare Funktionen

- Eigenschaften einer linearen Funktion f mit $f(x) = k \cdot x + d$
- Wechsel zwischen Funktionsgleichung und Funktionsgraph
- Ablesen und Einzeichnen von Steigungsdreiecken im Funktionsgraph
- Deuten der Parameter k und d in Sachsituationen
- Anwenden von linearen Funktionen in Sachsituationen

5.1. Eine Gerade ist im Koordinatensystem dargestellt.



1) Zeichne ein Steigungsdreieck der Gerade mit ganzzahligen Kathetenlängen ein.

2) Ermittle die Steigung k der Gerade als Bruchzahl.

3) Ermittle die Steigung der Gerade als Prozentsatz.

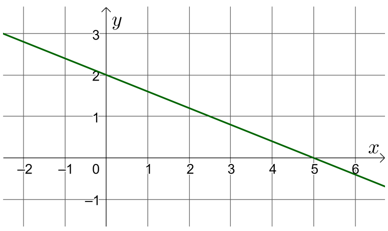
5.2. Das dargestellte Verkehrsschild informiert über die Steigung einer Straße.

a) Erkläre die Bedeutung einer Steigung von 12 %.

b) Wie viele Höhenmeter hat ein Fahrzeug überwunden, wenn es bei einer Steigung von 12 % eine horizontale Entfernung von 1 km zurückgelegt hat?

c) Ermittle den Steigungswinkel der Straße näherungsweise mithilfe einer Skizze.

5.3. Eine Gerade ist im Koordinatensystem dargestellt.

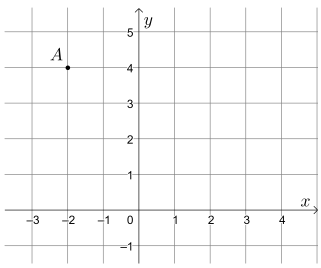


1) Zeichne ein Steigungsdreieck der Gerade mit ganzzahligen Kathetenlängen ein.

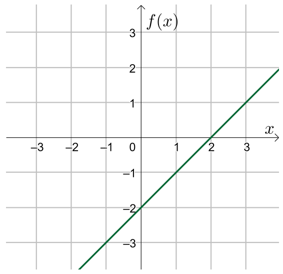
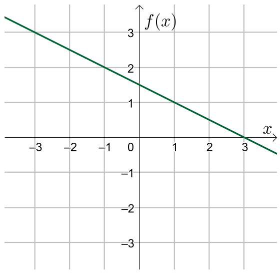
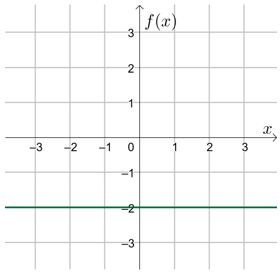
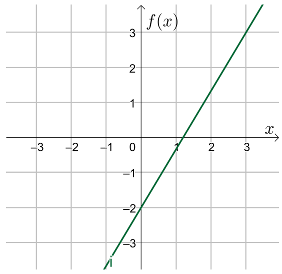
2) Ermittle die Steigung k der Gerade als Bruchzahl.

3) Ermittle das Gefälle der Gerade als Prozentsatz.

5.4. Zeichne die Gerade mit der Steigung $k = -0{,}4$ durch den Punkt A ein.

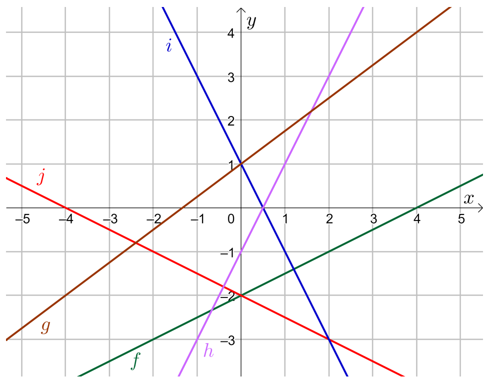


5.5. Lies aus den Diagrammen die Steigung k der Gerade und den Abschnitt d auf der y-Achse d ab.
Stelle damit die Funktionsgleichung von f auf.

1) 
2) 
3) 
4) 

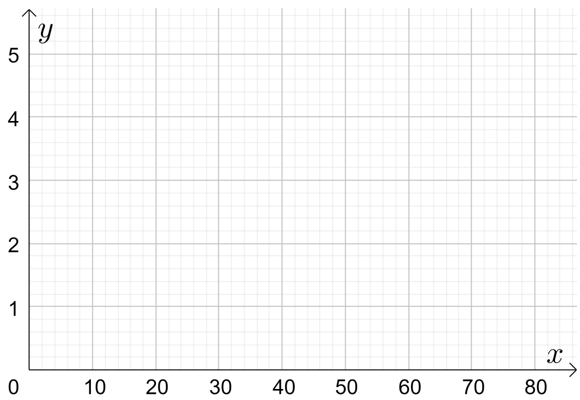
5.6. In der Tabelle sind 4 Funktionsgleichungen von linearen Funktionen angegeben.
Trage jeweils den passenden Funktionsnamen in das Kästchen ein.

$\square(x) = \frac{1}{2} \cdot x - 2$
$\square(x) = 2 \cdot x - 1$
$\square(x) = -\frac{1}{2} \cdot x - 2$
$\square(x) = \frac{3}{4} \cdot x + 1$



5.7. Bei einem bestimmten Handytarif werden die monatlichen Gebühren pro Gesprächsminute verrechnet.
Für 60 Minuten beträgt die Gebühr € 4,80.

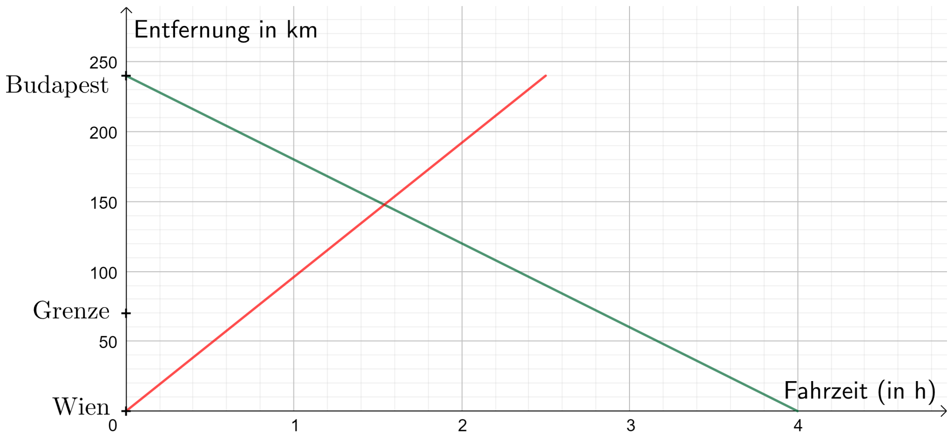
a) Stelle den Zusammenhang im untenstehenden Koordinatensystem dar.
$x \ldots$ Gesprächszeit in Minuten
$y \ldots$ monatliche Gebühr in Euro



b) Gib die Geradengleichung in der Form $y = k \cdot x$ an.

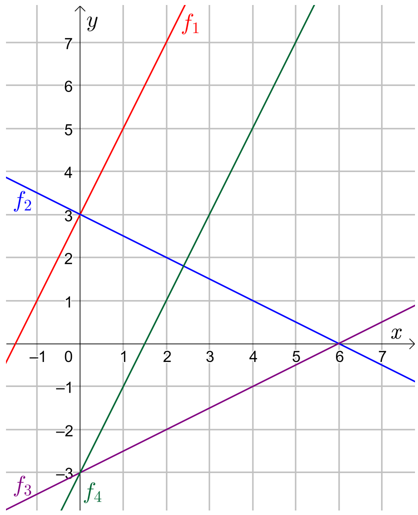
c) Erkläre, wie sich die Geradengleichung und die Gerade verändern, wenn eine monatliche Servicepauschale von € 1,80 zusätzlich verlangt wird.

5.8. Ein LKW beginnt seine Fahrt um 7 Uhr morgens von der ungarischen Hauptstadt Budapest nach Wien mit Frischwaren für Österreich. Gleichzeitig fährt ein österreichischer Staatsbürger auf derselben Straße mit seinem PKW von Wien in den Urlaub Richtung Ungarn los. Die Geschwindigkeit beider Fahrzeuge wird modellhaft als konstant angenommen.
Beantworte die folgenden Fragen möglichst genau mithilfe des Diagramms.



a) Wie weit ist die Grenze in Nickelsdorf von Budapest und von Wien entfernt?
b) Wie lange ist der PKW bis Budapest unterwegs?
c) Um wie viel Uhr kommt der LKW in Wien an?
d) Wie hoch ist die Durchschnittsgeschwindigkeit des LKW?
e) Nach welcher Zeit begegnen sich die beiden Fahrzeuge auf der Autobahn? Geschieht dies in Österreich oder in Ungarn?
f) Wie weit sind die beiden Fahrzeuge nach einer Stunde noch voneinander entfernt?
g) Gib die Funktionsgleichungen an, die die Bewegungen des LKW und des PKW beschreiben ($x \ldots$ Fahrzeit in h, $y \ldots$ Entfernung von Wien in km).

5.9. Gegeben sind die Funktionsgraphen von vier linearen Funktionen f_1, f_2, f_3 und f_4.



a) Gib jeweils die Steigung k_1, k_2, k_3 und k_4 und den y-Achsenabschnitt d_1, d_2, d_3 und d_4 an.

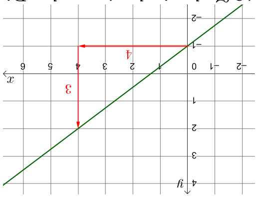
$f_1 \begin{cases} k_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ d_1 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$ $f_2 \begin{cases} k_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ d_2 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

$f_3 \begin{cases} k_3 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ d_3 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$ $f_4 \begin{cases} k_4 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \\ d_4 = \_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$

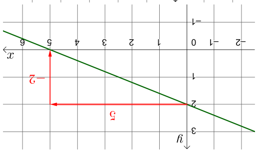
b) Beschreibe, welche Eigenschaften Geraden mit gleichen Werten für k bzw. für d gemeinsam haben.

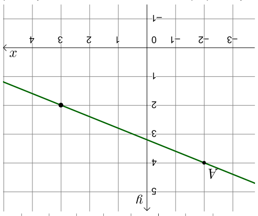
c) Der Graph einer weiteren linearen Funktion f_5 steht normal auf den Graphen von f_4. Berechne die Steigung von f_5.

d) ☆ Überlege allgemein, wie die Steigungen k und k^* zweier linearer Funktionen f und f^* zusammenhängen, wenn der Graph von f^* normal auf den Graphen von f steht.

5.1 1)  **2)** $k = \frac{3}{4}$ **3)** 75 % Steigung

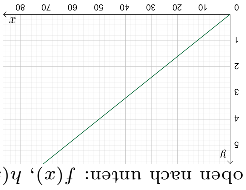
5.2 a) 12 % des in horizontaler Richtung zurückgelegten Weges entspricht der Höhenzunahme während dieses Weges. **b)** 0,12 km = 120 m
c) 7°

5.3 1)  **2)** $k = -\frac{2}{5}$ **3)** 40 % Gefälle

5.4 

5.5 1) $f(x) = 1 \cdot x - 2$ **2)** $f(x) = -0{,}5 \cdot x + 1{,}5$ **3)** $f(x) = -2$ **4)** $f(x) = \frac{5}{3} \cdot x - 2$

5.6 von oben nach unten: $f(x)$, $h(x)$, $j(x)$, $g(x)$

5.7 a) 
b) $y = 0{,}08 \cdot x$
c) $y = 0{,}08 \cdot x + 1{,}80$; Der Graph verschiebt sich um 1,80 in die positive y-Richtung.

5.8 a) Grenze: 70 km; Budapest: 240 km **b)** 2,5 h **c)** um 11 Uhr **d)** 60 km/h **e)** nach 1,53 h in Ungarn **f)** 84 km **g)** LKW: $y = 240 - 60 \cdot x$; PKW: $y = 96 \cdot x$

5.9 a) $k_1 = 2, d_1 = 3$; $k_2 = -0{,}5, d_2 = 3$; $k_3 = 0{,}5, d_3 = -3$; $k_4 = 2, d_4 = -3$
b) Geraden mit gleichem Wert für k sind parallel, Geraden mit gleichem Wert für d schneiden einander auf der y-Achse bei $(0 \mid d)$.
c) $k_5 = -\frac{1}{2}$
d) $k \cdot k^* = -1$

6. LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME IN 2 VARIABLEN

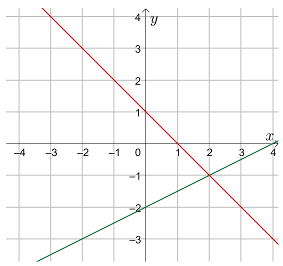
Lineare Gleichungssysteme in 2 Variablen ✓ MmF

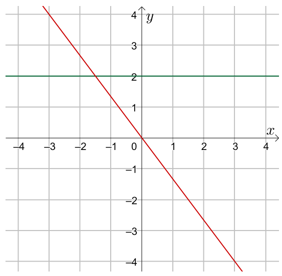
- grafisches Lösen eines linearen Gleichungssystems in 2 Variablen (alle Lösungsfälle)
- rechnerisches Lösen eines linearen Gleichungssystems in 2 Variablen (alle Lösungsfälle)
- Aufstellen linearer Gleichungssysteme im Sachzusammenhang

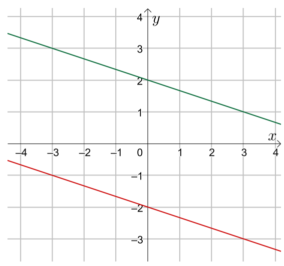
6.1. Die Lösungen von zwei linearen Gleichungen sind im Koordinatensystem dargestellt.

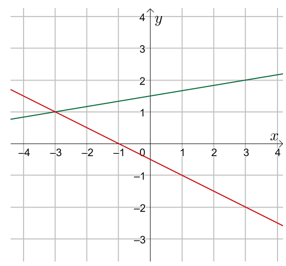
1) Ermittle jeweils zwei passende Gleichungen.

2) Ermittle grafisch die Lösungsmenge des Gleichungssystems.

a) 

b) 

c) 

d) 

MmF

6.2. Das Gleichungssystem hat *genau eine* Lösung. Berechne dieses Zahlenpaar $(x \mid y)$.

a) $\begin{cases} 3 \cdot x - 5 \cdot y = 2 \\ -4 \cdot x + 3 \cdot y = -10 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 4 \cdot x + 3 \cdot y = -6 \\ -5 \cdot x + 2 \cdot y = -4 \end{cases}$ **c)** $\begin{cases} 3 \cdot x - 5 \cdot y = -4 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y = 10 \end{cases}$

MmF

6.3. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 42 cm.
Die Längen benachbarter Seiten dieses Rechtecks unterscheiden sich um 5 cm.
Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks. MmF

6.4. Für eine Exkursion müssen von einer Schulklasse mit n Schüler*innen insgesamt K € eingesammelt werden.

- Wenn pro Schüler*in 12 € eingesammelt werden, dann fehlen insgesamt 16 €.
- Wenn pro Schüler*in 13 € eingesammelt werden, dann bleiben insgesamt 11 € übrig.

a) Stelle ein Gleichungssystem mit 2 Gleichungen in n und K auf, das diesen Sachverhalt beschreibt.

b) Berechne die Anzahl n der Schüler*innen dieser Schulklasse. MmF

6.5. Peter besucht seine Großeltern auf deren Bauernhof. Fasziniert beobachtet er, wie Hühner und Schafe gemeinsam auf einer Wiese nach Futter suchen. Er zählt 22 Tiere. Als er auch noch alle Beine abzählt, ist er sich nicht sicher, ob es 62 oder 63 sind.

a) Stelle fest, welche Anzahl an Beinen richtig ist und begründe deine Entscheidung.

b) Stelle ein Gleichungssystem auf und berechne die Anzahl an Hühnern und Schafen auf der Wiese. MmF

6.6. Gegeben ist die Gleichung $y = 2 \cdot x + 1$.

Ermittle jeweils eine zusätzliche lineare Gleichung, sodass das entstehende Gleichungssytem genau eine, keine oder unendlich viele Lösungen hat.

a) genau eine Lösung:

$$\begin{cases} y = 2 \cdot x + 1 \\ y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

b) keine Lösung:

$$\begin{cases} y = 2 \cdot x + 1 \\ y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

c) unendlich viele Lösungen:

$$\begin{cases} y = 2 \cdot x + 1 \\ y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{cases}$$

MmF

6.7. Der Umfang eines Rechtecks mit den Seitenlängen a und b beträgt 36 cm. Das Verhältnis der längeren Seite a zur kürzeren Seite b ist 5 : 4.

a) Fasse die beiden Aussagen über das Rechteck in einem Gleichungssystem für a und b zusammen.

I: ____________________

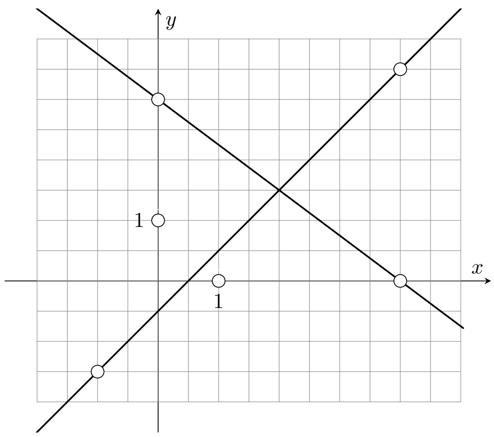
II: ____________________

b) Berechne die Längen der Seiten a und b.

MmF

6.8. Dargestellt sind zwei Geraden in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

a) Finde ein Gleichungssystem, das zu der Zeichnung passt. Beachte dabei die markierten Punkte.
b) Ermittle die Lösung anhand der Zeichnung.
c) Berechne die Lösung.



MmF

6.9. Gegeben ist ein Gleichungssystem:

$$\begin{cases} 2{,}4 \cdot x - 1{,}8 \cdot y = 1{,}2 \\ -3{,}6 \cdot x + 2{,}7 \cdot y = -1{,}6 \end{cases}$$

a) Begründe, dass das angegebene Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat.
b) Ergänze die drei unvollständig angegebenen Lösungen:

$$\left(-1 \mid \boxed{}\right) \qquad \left(5 \mid \boxed{}\right) \qquad \left(\boxed{} \mid 4\right)$$

MmF

6.10. Ein Gemüsehändler bietet Melanzani und Zucchini zum Stückpreis an; es wird also nicht abgewogen. Franz kauft 5 Melanzani und 6 Zucchini; er bezahlt € 16,70. Sara kauft 3 Melanzani und 5 Zucchini; sie bezahlt € 11,70. Martin kauft 4 Melanzani und 2 Zucchini. Berechne, wieviel Martin bezahlen muss.

MmF

6.11. Herr Kundmann hat ein Kochbuch seiner Großmutter gefunden und möchte die sensationelle Topfentorte selbst backen. Das Rezept verlangt 1400 g Topfen mit 20 % Fettgehalt. Im Supermarkt seines Vertrauens findet er nur Topfen mit 5 % und 40 % Fettgehalt. Die korrekte Mischung bereitet ihm großes Kopfzerbrechen. Kannst du ihm helfen?

6.1 a) 1) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2 \cdot y = 4 \end{cases}$ **2)** $L = \{(2 \mid -1)\}$ **b) 1)** $\begin{cases} y = 2 \\ 4 \cdot x + 3 \cdot y = 0 \end{cases}$ **2)** $L = \{(-1{,}5 \mid 2)\}$

c) 1) $\begin{cases} x + 3 \cdot y = 6 \\ x + 3 \cdot y = -6 \end{cases}$ **2)** $L = \{\}$ **d) 1)** $\begin{cases} -x + 6 \cdot y = 9 \\ x + 2 \cdot y = -1 \end{cases}$ **2)** $L = \{(-3 \mid 1)\}$

6.2 a) $x = 4,\ y = 2$ **b)** $x = 0,\ y = -2$ **c)** $x = 2,\ y = 2$

6.3 8 cm und 13 cm

6.4 a) $\begin{cases} 12 \cdot n + 16 = K \\ 13 \cdot n - 11 = K \end{cases}$ **b)** $n = 27$ Schüler*innen

6.5 a) Es sind 62 Beine. Die Anzahl muss gerade sein. **b)** 13 Hühner, 9 Schafe

6.6 a) $y = 3 \cdot x - 1$ und jede andere Gleichung, bei der sich die beiden Steigungen unterscheiden.

b) $y = 2 \cdot x$ und jede andere Gleichung mit Steigung 2 und $d \neq 1$

c) $y = 2 \cdot x + 1$

6.7 a) I: $2 \cdot a + 2 \cdot b = 36$, II: $a : b = 5 : 4$ **b)** $a = 10\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$

6.8 a) $\begin{cases} y = x - 0{,}5 \\ y = -0{,}75 \cdot x + 3 \end{cases}$ **b)** $(2 \mid 1{,}5)$ **c)** $(2 \mid 1{,}5)$

6.9 a) Gleichung 2 ist das 1,5-fache von Gleichung 1; beide sind äquivalent. **b)** $(-1 \mid -1{,}5)$ $(5 \mid 4{,}5)$ $(4{,}5 \mid 4)$

6.10 € 10

6.11 Herr Kundmann benötigt 800 g Topfen mit 5 % und 600 g mit 40 % Fettgehalt.

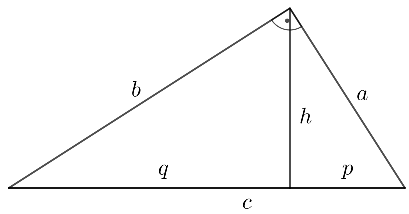
7. Satzgruppe von Pythagoras

Satzgruppe von Pythagoras ✓

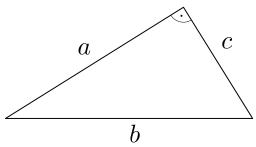
- Anwenden des pythagoräischen Lehrsatzes
- Anwenden der Satzgruppe von Pythagoras für Berechnungen in ebenen Figuren

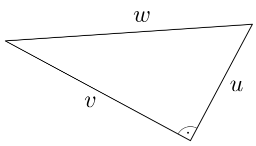
7.1. Das dargestellte Dreieck ist rechtwinkelig. Kreuze alle richtigen Aussagen an.

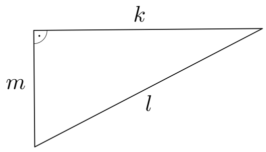
$h^2 = p \cdot q$	☐
$a^2 = h \cdot q$	☐
$a^2 = b^2 - c^2$	☐
$c^2 = a \cdot b$	☐
$b^2 = c \cdot q$	☐

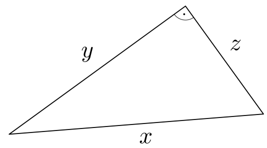


7.2. Gib jeweils eine Formel für die gesuchte Seite an.

a) 

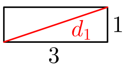
b) 

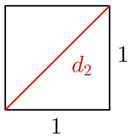
c) 

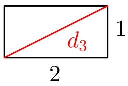
d) 

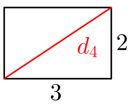
$a =$ ______________ $u =$ ______________ $k =$ ______________ $x =$ ______________

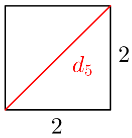
7.3. Ordne die Diagonalen der skizzierten Rechtecke aufsteigend nach ihrer Größe.

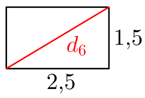
a) 

b) 

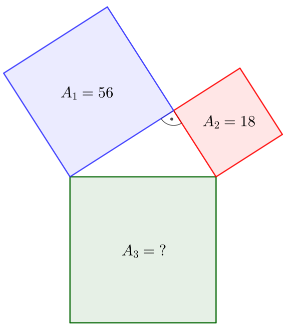
c) 

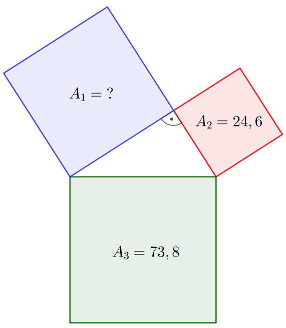
d) 

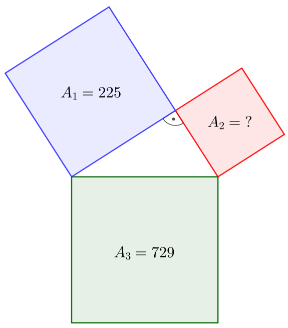
e) 

f) 

7.4. Dargestellt sind jeweils drei Quadrate. Von zweien dieser Quadrate ist der Flächeninhalt bekannt. Berechne den fehlenden Flächeninhalt.

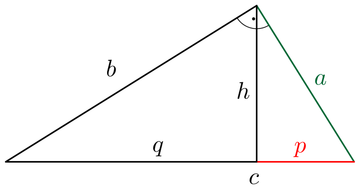
a) 

b) 

c) 

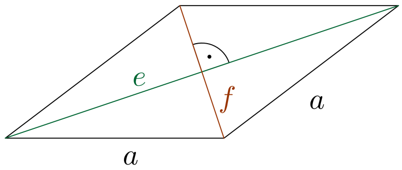
7.5. Von einem rechtwinkeligen Dreieck kennt man die Länge der Kathete $a = 20{,}4\,\text{cm}$ und die Länge des anliegenden Hypotenusenabschnitts $p = 9{,}60\,\text{cm}$.

a) Berechne die Länge der Höhe h.
b) Berechne die Länge des zweiten Hypothenusenabschnitts q.
c) Ermittle die fehlenden Seitenlängen b und c.
d) Ermittle den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks.



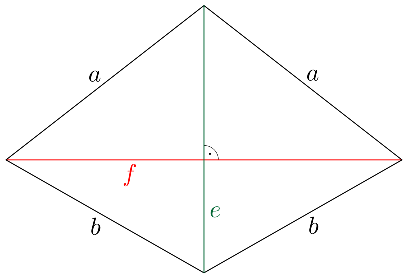
7.6. Von einem Rhombus kennt man die Längen der beiden Diagonalen $e = 75\,\text{mm}$ und $f = 42\,\text{mm}$.

a) Berechne die Seitenlänge a.
b) Ermittle die Höhe h des Rhombus.



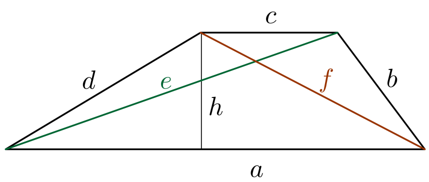
7.7. Von einem Deltoid kennt man den Flächeninhalt $A = 247{,}68\,\text{mm}^2$, die Länge der Diagonale $f = 28{,}8\,\text{mm}$ und die Seitenlänge $b = 15{,}0\,\text{mm}$.

a) Berechne die Länge der zweiten Diagonalen e.
b) Ermittle die Seitenlänge a
c) Ermittle den Umfang u des Deltoids.

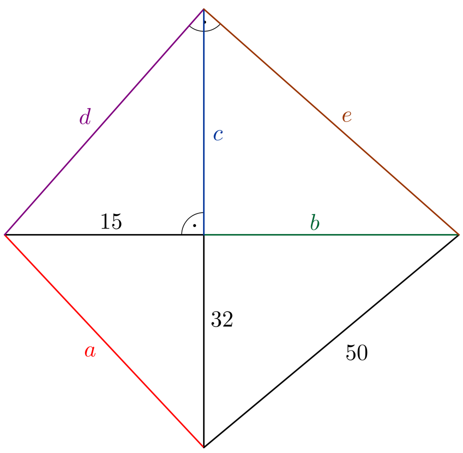


7.8. Von einem Trapez sind drei der vier Seitenlängen und die Höhe gegeben:
$a = 21{,}6\,\text{cm}$, $b = 7{,}50\,\text{cm}$, $d = 11{,}7\,\text{cm}$, $h = 4{,}50\,\text{cm}$

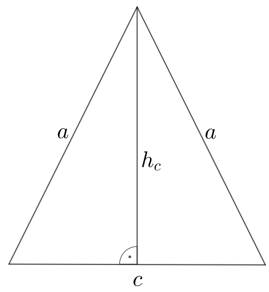
a) Berechne den Umfang des Trapezes.
b) Ermittle die Längen der beiden Diagonalen e und f.
c) Gib den Flächeninhalt des Trapezes an.



7.9. Berechne mithilfe des Satzes von Pythagoras, dem Höhensatz und/oder den Kathetensätzen alle noch unbekannten Längen des dargestellten Vierecks. Runde die Ergebnisse auf eine Nachkommastelle.



7.10. Rechts ist ein gleichschenkeliges Dreieck dargestellt.



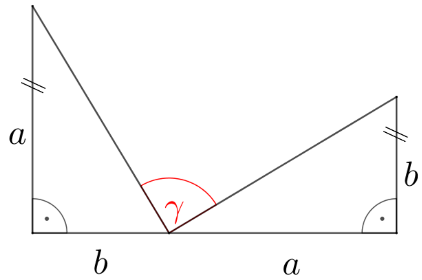
a) Stelle mithilfe von c und h_c eine Formel zur Berechnung von a auf.

$a =$ ______________________________

b) Stelle mithilfe von a und h_c eine Formel zur Berechnung von c auf.

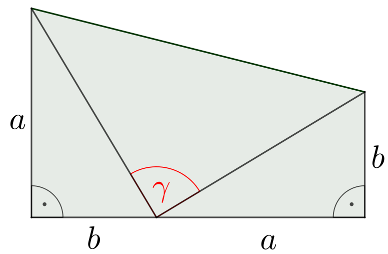
$c =$ ______________________________

7.11. Dargestellt sind zwei aneinander gefügte, kongruente, rechtwinkelige Dreiecke mit den Kathetenlängen a und b.

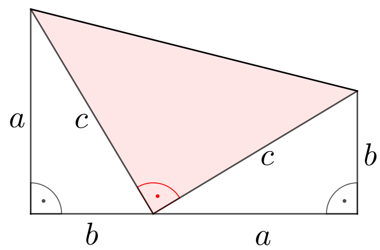


a) Zeige, dass der Winkel γ ein rechter Winkel ist.

b) Verbindet man die oberen Eckpunkte der beiden Dreiecke mit einer Strecke, entsteht ein Trapez. Gib eine Formel für den Flächeninhalt dieses Trapezes an.

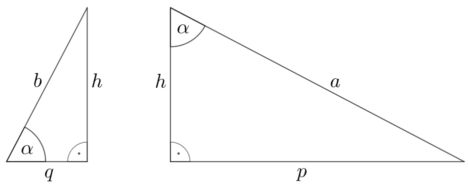


c) Zeige mithilfe der Flächeninhaltsformel aus **b)**, dass der rot markierte Flächeninhalt durch $\frac{1}{2} \cdot (a^2 + b^2)$ ausgedrückt werden kann.



d) Zeige, dass aus **c)** der Lehrsatz des Pythagoras für das rechtwinkelige Dreieck mit den Katheten a und b folgt.

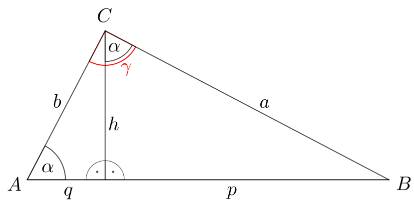
7.12. Dargestellt sind zwei rechtwinkelige Dreiecke. Sie haben die Kathetenlänge h und den Winkel α gemeinsam.



a) Kreuze an, welche der folgenden Gleichungen für die beiden Dreiecke jedenfalls gilt. (1 aus 6)

☐ $\frac{h}{b} = \frac{h}{a}$ ☐ $\frac{b}{q} = \frac{a}{p}$ ☐ $q \cdot b = p \cdot a$ ☐ $\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$ ☐ $b \cdot p = q \cdot a$ ☐ $\frac{h}{q} = \frac{h}{p}$

b) Fügt man die beiden rechtwinkeligen Dreiecke zusammen, entsteht ein neues Dreieck wie abgebildet.
Begründe, warum der Winkel γ ein rechter Winkel ist.



c) Wir bezeichnen die Länge $\overline{AB}$ mit c. Es gilt $c = p + q$.
Kreuze an, welche der beiden Gleichungen für das Dreieck jedenfalls gilt. (2 aus 5)

☐ $\frac{a}{p} = \frac{a}{c}$ ☐ $a^2 = p \cdot c$ ☐ $a \cdot p = c \cdot a$ ☐ $\frac{b}{q} = \frac{c}{a}$ ☐ $\frac{b}{c} = \frac{q}{b}$

d) Zeige, dass unter den Voraussetzungen und aus den beiden korrekten Gleichungen von Punkt **c** der Lehrsatz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$ für das Dreieck ABC folgt.

7.13. Für die Höhe h eines gleichseitigen Dreiecks gilt:

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

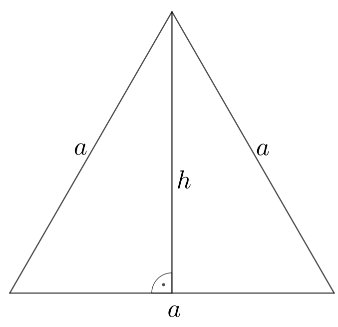
Ergänze die fehlenden Teile in der Herleitung dieser Formel:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{\square}{\square}\right)^2$$

$$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{\square}$$

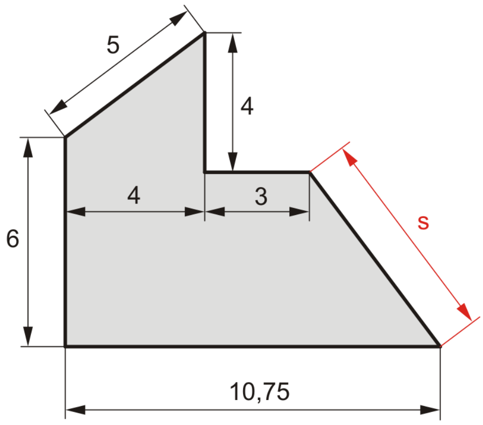
$$h^2 = \frac{4a^2}{\square} - \frac{a^2}{\square} = \frac{3a^2}{\square}$$

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

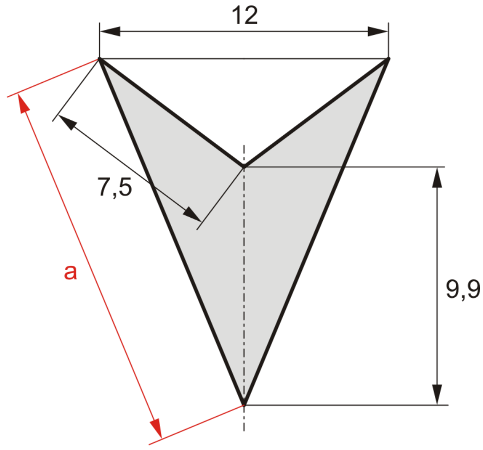


7.14. Berechne jeweils die unbekannte Abmessung mit Hilfe des Satzes von Pythagoras. Zeichne dazu geeignete rechtwinkelige Dreiecke in den Angabefiguren ein.

a)



b)



7.1	$h^2 = p \cdot q$	☒
	$a^2 = h \cdot q$	☐
	$a^2 = b^2 - c^2$	☐
	$c^2 = a \cdot b$	☐
	$b^2 = c \cdot q$	☒

7.2 **a)** $a = \sqrt{b^2 - c^2}$ **b)** $u = \sqrt{w^2 - v^2}$ **c)** $k = \sqrt{l^2 - m^2}$ **d)** $x = \sqrt{y^2 + z^2}$

7.3 $d_2 < d_3 < d_5 < d_6 < d_1 < d_4$

7.4 **a)** $A_3 = 74$ **b)** $A_1 = 49,2$ **c)** $A_2 = 504$

7.5 **a)** $h = 18{,}0\,\text{cm}$ **b)** $q = 33{,}75\,\text{cm}$ **c)** $b = 38{,}25\,\text{cm};\ c = 43{,}35\,\text{cm}$ **d)** $u = 102\,\text{cm};\ A = 390{,}15\,\text{cm}^2$

7.6 **a)** $a \approx 43\,\text{mm}$ **b)** $h \approx 36{,}6\,\text{mm}$

7.7 **a)** $e = 17{,}2\,\text{mm}$ **b)** $a = 19{,}4\,\text{mm}$ **c)** $u = 68{,}8\,\text{mm}$

7.8 **a)** $c = 4{,}8\,\text{cm} \to u = 45{,}6\,\text{cm}$ **b)** $e \approx 16{,}2\,\text{cm},\ f = 11{,}7\,\text{cm}$ **c)** $A = 59{,}4\,\text{cm}^2$

7.9 **a)** $a \approx 35{,}3$ **b)** $b \approx 38{,}4$ **c)** $c \approx 24{,}0$ **d)** $d \approx 28{,}3$ **e)** $e \approx 45{,}3$

7.10 **a)** $a = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + h_c^2}$ **b)** $2 \cdot \sqrt{a^2 - h_c^2}$

7.11 **a)** Die beiden spitzen Winkel in einem der rechtwinkeligen Dreiecke ergänzen einander auf einen rechten Winkel. γ ist Teil eines gestreckten Winkels, dessen anderen beiden Teile von eben diesen spitzen Winkeln gebildet werden. γ ist daher selber ein rechter Winkel.
b) $A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot (a+b) = \frac{1}{2} \cdot a^2 + a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot b^2$
c) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot (a+b) - a \cdot b = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + b^2\right)$
d) $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot c^2$ und $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + b^2\right) \to \frac{1}{2} \cdot c^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + b^2\right) \to c^2 = a^2 + b^2$

7.12 **a)** ☒$\frac{h}{q} = \frac{p}{h}$ **b)** Der Winkel γ setzt sich aus dem Winkel α und jenem Winkel zusammen, der im linken, rechtwinkeligen Dreieck α auf einen rechten Winkel ergänzt. Also ist γ selbst ein rechter Winkel. **c)** ☒$a^2 = p \cdot c$ und ☒$\frac{b}{c} = \frac{q}{b}$ **d)** Addition der beiden Gleichungen $a^2 = p \cdot c$ und $b^2 = q \cdot c$ ergibt: $a^2 + b^2 = p \cdot c + q \cdot c \to a^2 + b^2 = (p+q) \cdot c \to a^2 + b^2 = c^2$

7.13 $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$
$h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$
$h^2 = \frac{4a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$
$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$

7.14 **a)** $s = 6{,}25$ **b)** $a = 15{,}6$

8. Umfang und Flächeninhalt von Kreis und Kreisteilen

Umfang und Flächeninhalt von Kreis und Kreisteilen ✓

- Kennen und Anwenden der Definition der Kreiszahl π
- Anwenden der Umfangsformel und Flächeninhaltsformel für Kreise
- Anwenden von Formeln für spezielle Kreisteile

8.1. Im Folgenden werden die Umfänge von zwei Kreisen miteinander verglichen.

a) Drücke den Umfang u_1 eines Kreises mit dem Durchmesser $d_1 = 4\,\text{dm}$ als Vielfaches von π aus.
b) Drücke den Umfang u_2 eines Kreises mit dem Radius $r_2 = 4\,\text{dm}$ und damit doppeltem Durchmesser wie der Kreis in Aufgabe **a)** als Vielfaches von π aus.
c) In welchem Verhältnis stehen die Umfänge aus **a)** und **b)**?

8.2. Im Folgenden werden die Flächeninhalte von zwei Kreisen miteinander verglichen.

a) Drücke den Flächeninhalt A_1 eines Kreises mit dem Durchmesser $d_1 = 4\,\text{dm}$ als Vielfaches von π aus.
b) Drücke den Flächeninhalt A_2 eines Kreises mit dem Radius $r_2 = 4\,\text{dm}$ und damit doppeltem Durchmesser wie der Kreis in Aufgabe **a)** als Vielfaches von π aus.
c) In welchem Verhältnis stehen die Flächeninhalte aus **a)** und **b)**?

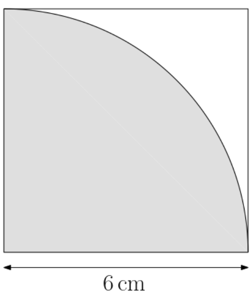
8.3. Isabella hat eine Schnur mit einer Länge von 1,68 m zur Verfügung. Sie möchte damit für ein Spiel eine geometrische Figur am Boden formen.

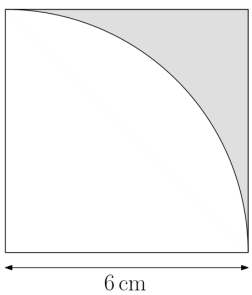
a) Berechne, wie lang eine Seitenkante ist, wenn sie ein Quadrat formt. Welchen Flächeninhalt hat das Quadrat?
b) Berechne, wie lang der Durchmesser ist, wenn sie einen Kreis formt. Welchen Flächeninhalt hat dieser Kreis?
c) Vergleiche die beiden Flächeninhalte von Quadrat und Kreis ($<$, $=$, $>$).
d) ☆ Diesmal hat die Schnur die Länge ℓ. Isabella formt wie zuvor ein Quadrat bzw. einen Kreis. Das Verhältnis $A_{\text{Kreis}} : A_{\text{Quadrat}}$ hängt nicht von ℓ ab. Kreuze das zutreffende Verhältnis an:

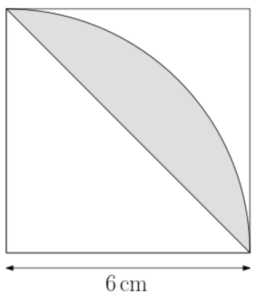
☐ $4 : \pi$ ☐ $5 : \pi$ ☐ $6 : \pi$ ☐ $\pi : 3$ ☐ $\pi : 4$

8.4. Die grau gefärbten Flächenstücke sind Teile von Quadraten. Der gekrümmte Teil des Randes ist jeweils ein Viertelkreis..

a) Berechne jeweils den Flächeninhalt des grau gefärbten Flächenstücks.
b) Berechne jeweils den Umfang des grau gefärbten Flächenstücks.

1)


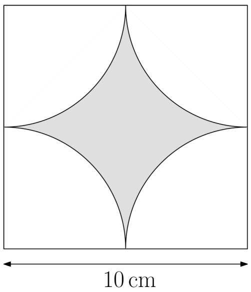
2)


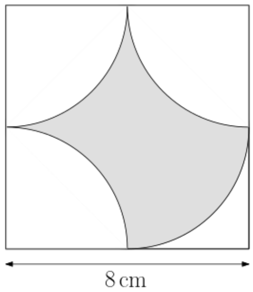
3)


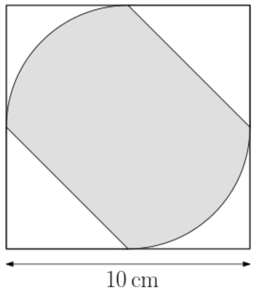
8.5. Die grau gefärbten Flächenstücke sind Teile von Quadraten. Die gekrümmten Teile des Randes sind jeweils Viertelkreise.

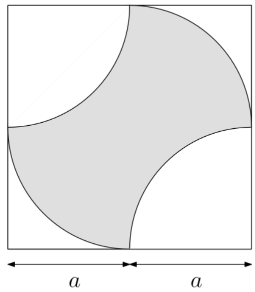
Hinweis: Manchmal ist es einfacher, zuerst die weiße Fläche zu berechnen und dann von der Quadratfläche abzuziehen.

a) Berechne jeweils den Flächeninhalt des grau gefärbten Flächenstücks bzw. drücke den Flächeninhalt durch die Variable a aus.
b) Wieviel Prozent der Quadratfläche entfallen jeweils auf das grau gefärbte Flächenstück?
c) Ermittle jeweils den Umfang des grau gefärbten Flächenstücks.

1)


2)


3)


4)


8.6. Gegeben sind vier Aussagen zu Eigenschaften eines Kreises. Kreuze jeweils jenes Wort an, mit dem die Aussage korrekt ist.

a) Verdoppelt man den Radius eines Kreises, so wird sein Umfang ☐ halbiert ☐ verdoppelt ☐ vervierfacht.
b) Verdoppelt man den Durchmesser eines Kreises, so wird sein Umfang ☐ halbiert ☐ verdoppelt ☐ vervierfacht.
c) Halbiert man den Radius eines Kreises, so wird sein Flächeninhalt ☐ verdoppelt ☐ halbiert ☐ geviertelt.
d) Halbiert man den Durchmesser eines Kreises, so wird sein Flächeninhalt ☐ verdoppelt ☐ halbiert ☐ geviertelt.

8.7. Die Räder eines Fahrrads haben einen Durchmesser von 675 mm. Berechne, wie oft sich die Räder drehen, wenn du damit 20 km weit fährst.

8.8. Der Breitenkreis von Wien hat einen Radius von ca. 4260 km. Die Erde dreht sich in 24 Stunden einmal um die Achse. Du drehst dich natürlich mit. Berechne, welche Geschwindigkeit du dabei hast.

8.9. Ein drehzylindrischer Baumstamm hat einen Außendurchmesser von 60 cm. Die Rindenschicht beträgt 10 % der Querschnittfläche. Berechne, wie dick die Rindenschicht ist.

8.1 **a)** $u_1 = 4 \cdot \pi\,\mathrm{dm}$
b) $u_2 = 8 \cdot \pi\,\mathrm{dm}$
c) Die beiden Umfänge verhalten sich wie 1 : 2. Sie stehen im selben Verhältnis wie die Durchmesser bzw. Radien: $u_1 : u_2 = d_1 : d_2 = r_1 : r_2$

8.2 **a)** $A_1 = 4 \cdot \pi\,\mathrm{dm}^2$
b) $A_2 = 16 \cdot \pi\,\mathrm{dm}^2$
c) Die beiden Flächeninhalte verhalten sich wie 1 : 4 und damit wie die Quadrate der Durchmesser bzw. Radien: $A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2 = r_1^2 : r_2^2$

8.3 **a)** $a = 0{,}42\,\mathrm{m} \rightarrow A = 0{,}1764\,\mathrm{m}^2$
b) $d \approx 0{,}53\,\mathrm{m} \rightarrow A \approx 0{,}22\,\mathrm{m}^2$
c) Unabhängig von der Länge der Schnur umschließt der Kreis immer die größere Fläche.
d) $4 : \pi$

8.4 **a)** **1)** $A_1 = 9 \cdot \pi \approx 28{,}27\,\mathrm{cm}^2$ **2)** $A_2 = 36 - 9 \cdot \pi \approx 7{,}73\,\mathrm{cm}^2$ **3)** $A_3 = 9 \cdot \pi - 18 \approx 10{,}27\,\mathrm{cm}^2$
b) **1)** $u_1 = 12 + 3 \cdot \pi \approx 21{,}42\,\mathrm{cm}$ **2)** $u_1 = 12 + 3 \cdot \pi \approx 21{,}42\,\mathrm{cm}$ **3)** $u_3 = \sqrt{2} \cdot 6 + 3 \cdot \pi \approx 17{,}91\,\mathrm{cm}$

8.5 **a)** **1)** $A_1 = 100 - 25 \cdot \pi \approx 21{,}46\,\mathrm{cm}^2$ **2)** $A_2 = 48 - 8 \cdot \pi \approx 22{,}87\,\mathrm{cm}^2$ **3)** $A_3 = 25 + 12{,}5 \cdot \pi \approx 64{,}27\,\mathrm{cm}^2$ **4)** $A_4 = 2 \cdot a^2$
b) **1)** $\approx 21{,}46\,\%$ **2)** $\approx 35{,}73\,\%$ **3)** $\approx 64{,}27\,\%$ **4)** $50\,\%$
c) **1)** $u_1 = 10 \cdot \pi \approx 31{,}42\,\mathrm{cm}$ **2)** $u_2 = 8 \cdot \pi \approx 25{,}13\,\mathrm{cm}$ **3)** $u_3 = 10 \cdot \sqrt{2} + 5 \cdot \pi \approx 29{,}85\,\mathrm{cm}$ **4)** $u_4 = 2 \cdot a \cdot \pi$

8.6 **a)** verdoppelt **b)** verdoppelt **c)** geviertelt **d)** geviertelt

8.7 ca.9431 mal

8.8 ca. 1115 km/h

8.9 ca. 1,5 cm

9. Pyramiden, Drehzylinder und Drehkegel

Pyramiden, Drehzylinder und Drehkegel ✓

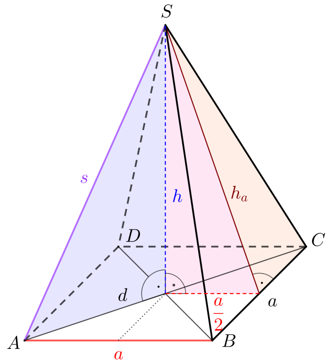
- Anwenden der Satzgruppe von Pythagoras für Berechnungen in Körpern:
  - Flächendiagonalen und Raumdiagonalen von Quadern
  - Höhen, Seitenkanten und Seitenflächenhöhen von Pyramiden
- Anwenden von Oberflächen- und Volumenformel für Pyramiden, speziell in Verbindung mit dem Lehrsatz des Pythagoras
- Anwenden von Oberflächen- und Volumenformel für Drehzylinder
- Anwenden von Oberflächen- und Volumenformel für Drehkegel
- Lösen von Umkehraufgaben mit den Formeln für Drehzylinder und Drehkegel
- Anwenden in Sachsituationen

9.1. Von einer geraden quadratischen Pyramide sind die Längen der Grundkante $a = 65\,\text{mm}$ und der Höhe $h = 48\,\text{mm}$ bekannt.

a) Berechne die Länge der Seitenkante s.

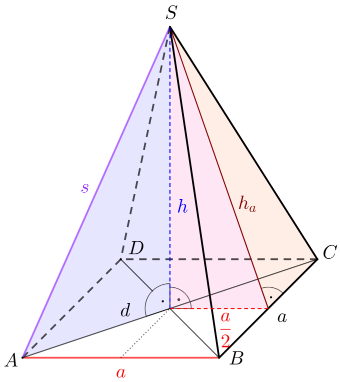
b) Berechne die Länge der Höhe h_a einer Seitenfläche.

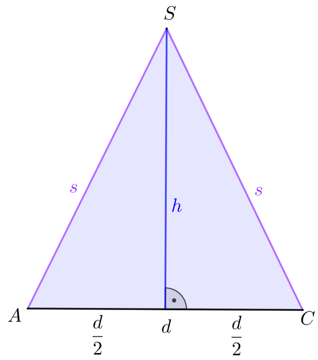
c) Berechne das Volumen der Pyramide.



9.2. Ein Aluminiumwürfel mit dem Volumen $V = 5{,}4\,\text{cm}^3$ soll eingeschmolzen und in die Form einer geraden quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge $a = 2{,}2\,\text{cm}$ gegossen werden.
Wie hoch ist die so entstehende Pyramide?

9.3. Ein Zelt in der Form einer geraden quadratischen Pyramide wird aus 2,1 m langen Stangen für die Seitenkanten aufgebaut. Die Zeltplane hat am Boden einen Umfang von 9,0 m.
Berechne, wie hoch das fertige Zelt ist.

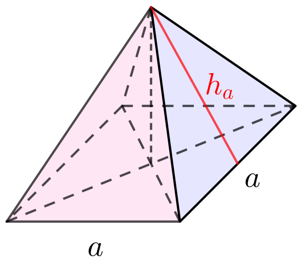




9.4. Eine gerade quadratische Pyramide mit der Grunkantenlänge $a = 6\,\text{cm}$ hat den Oberflächeninhalt $O = 96\,\text{cm}^2$.

a) Berechne die Höhe h_a der Seitenflächen.

b) Berechne die Höhe der Pyramide



9.5. Für das Volumen V eines Drehzylinders mit Radius r und Höhe h gilt:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Wird der Radius um 15 % verkleinert und die Höhe um 5 % verkleinert, dann wird auch das Volumen kleiner. Für das neue Volumen V_{neu} gilt

$$V_{\text{neu}} = k \cdot V$$

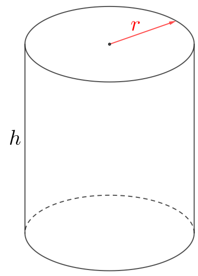
mit einem positiven Faktor $k \in \mathbb{R}$. Kreuze den richtigen Faktor k an.

☐ $k = 0{,}15 \cdot 0{,}05$ ☐ $k = 0{,}3 \cdot 0{,}05$ ☐ $k = 0{,}15^2 \cdot 0{,}05$ ☐ $k = 0{,}85 \cdot 0{,}95$ ☐ $k = 0{,}6 \cdot 0{,}95$ ☐ $k = 0{,}85^2 \cdot 0{,}95$

9.6. Ein neuer Energydrink mit dem Namen *Flying Fox* wird in 400 ml-Dosen verkauft. Die zylinderförmigen Getränkedosen haben einen handlichen Durchmesser von 6,5 cm.

a) Wie hoch ist eine solche Getränkedose?

b) Du schneidest den Deckel der leeren Getränkedose weg und lässt ein 13 cm langes dünnes Stäbchen in die Dose fallen. Ragt es oben heraus?

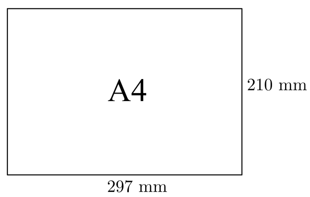


9.7. Ein herkömmliches A4-Blatt (297 mm × 210 mm) kann entlang der langen oder kurzen Seite zu einem Drehzylinder zusammengebogen werden.

a) Biege das Blatt so zusammen das Blatt so, dass die kürzere Seite zur Höhe des Drehzylinders wird.
Berechne Volumen und Oberfläche des so entstehenden Drehzylinders.

b) Biege das Blatt so zusammen das Blatt so, dass die längere Seite zur Höhe des Drehzylinders wird.
Berechne Volumen und Oberfläche des so entstehenden Drehzylinders.

c) Berechne das Verhältnis der Volumina der beiden Drehzylinder.



9.8. Für das Volumen V eines Drehkegels mit Radius r und Höhe h gilt:

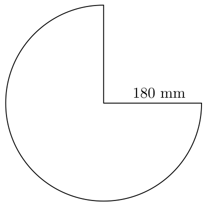
$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Kreuze die richtige Antwort an:

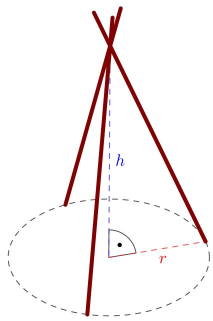
Wenn der Radius des Drehkegels verdoppelt wird und gleichzeitig die Höhe halbiert wird, dann ...

- ☐ ... wird das Kegelvolumen halbiert.
- ☐ ... bleibt das Kegelvolumen gleich groß.
- ☐ ... wird das Kegelvolumen verdoppelt.
- ☐ ... wird das Kegelvolumen vervierfacht.
- ☐ ... wird das Kegelvolumen verachtfacht.

9.9. Aus einem Dreiviertelkreis wird ein Partyhut in Form eines Drehkegels zusammengeklebt.
Die Mantelfläche des Partyhuts ist in der Abbildung abgerollt dargestellt.
Wie hoch ist der so entstehende Drehkegel?



9.10. Ein bestimmtes Indianerzelt, Tipi genannt, hat annähernd die Form eines Drehkeg
Für die Konstruktion werden drei Holzstangen benötigt.
Ein kleines Zelt hat eine Höhe von 2,5 m und am Boden einen Durchmesser von 2,8 m.
Die Holzstangen ragen um 40 cm über die Spitze des Drehkegels hinaus.
Berechne die Länge einer solchen Holzstange.



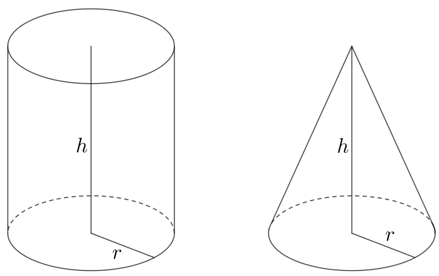
9.11. Eine Spielfigur hat die Form eines Drehkegels.
Ihre Höhe ist 3 cm und der Umfang des Basiskreises beträgt 2 cm.
Bestimme den Inhalt der Oberfläche der Spielfigur.

9.12. Gegeben sind ein Drehzylinder und ein Drehkegel, die beide den Radius $r = 3$ cm und die Höhe $h = 8$ cm haben.

a) Berechne das Volumen des Drehzylinders und des Drehkegels.

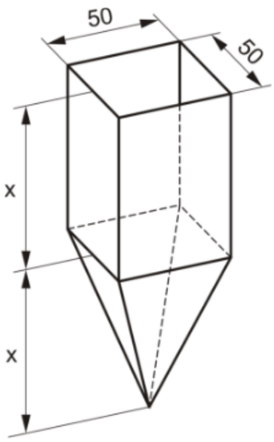
$V_{\text{Zylinder}} =$ __________ $\cdot \pi$ $V_{\text{Kegel}} =$ __________ $\cdot \pi$

b) Zeige, dass $V_{\text{Kegel}} : V_{\text{Zylinder}} = 1 : 3$ gilt.



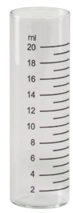
9.13. Der angegebene Behälter (Maße in cm) kann maximal $1/4\,\text{m}^3$ Beton aufnehmen.

a) Berechne seine Gesamthöhe.
b) Das Pyramidenvolumen ist ein Drittel des Quadervolumens. Untersuche, ob die Mantelfläche der Pyramide auch ein Drittel der Mantelfläche des Quaders ist.



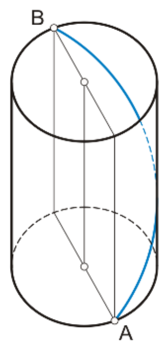
9.14. Ein Messglas hat einen Außendurchmesser von 2 cm und eine Wanddicke von 1 mm.

Die Markierungsstriche sind pro ml angebracht (siehe Bild).
Berechne den Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Markierungsstrichen.



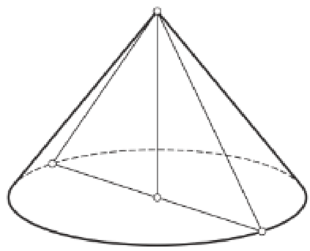
9.15. Ein A4-Blatt (210 mm x 297 mm) soll so zu einem Drehzylindermantel zusammengebogen werden, dass die kürzere Seite die Höhe wird.

a) Passen 1,5 Liter in diesen Zylindermantel? Begründe deine Antwort.
b) Ein Insekt krabbelt auf dem Zylindermantel auf dem kürzesten Weg von A nach B. Berechne die Länge dieses Weges.

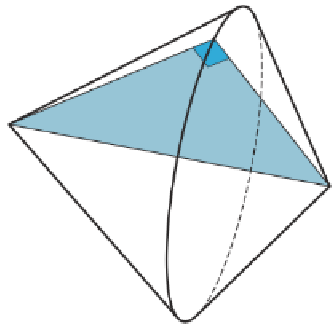


9.16. Der Achsenschnitt eines Drehkegels (siehe Skizze) ist ein gleichschenkeliges Dreieck mit einer Basislänge von 12 cm und einer Schenkellänge von 10 cm.

a) Gib das Volumen und die Mantelfläche als Vielfache von π an.
b) Die in die Ebene ausgebreitete Mantelfläche ist ein Kreissektor. Ermittle seinen Zentriwinkel.
c) Kann man diesen Kreissektor aus einem Blatt Papier der Größe 20 cm x 10 cm ausschneiden? Begründe deine Antwort.



9.17. Ein rechtwinkeliges Dreieck mit den Seitenlängen 15 cm, 20 cm und 25 cm rotiert um seine Hypotenuse und erzeugt so einen Drehkörper. Gib das Volumen und die Oberfläche dieses Drehkörpers als Vielfache von π an.



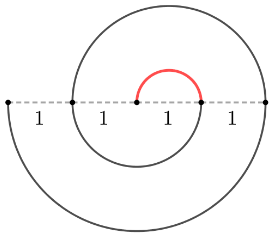
9.1 **a)** $s \approx 66{,}46\,\text{mm}$ **b)** $h_a \approx 57{,}97\,\text{mm}$ **c)** $V = 67\,600\,\text{mm}^3$ **d)** $M \approx 7536\,\text{mm}^2$
9.2 $h \approx 3{,}35\,\text{cm}$
9.3 $h \approx 1{,}37\,\text{m}$
9.4 **a)** $h_a = 5\,\text{cm}$ **b)** $h = 4\,\text{cm}$
9.5 $k = 0{,}85^2 \cdot 0{,}95$
9.6 **a)** $h \approx 12{,}1\,\text{cm}$ **b)** Nein, die Diagonale $d \approx 13{,}7\,\text{cm}$ ist länger.
9.7 **a)** $V_1 \approx 1\,474\,084\,\text{mm}^3$, $O_1 \approx 76\,409\,\text{mm}^2$ **b)** $V_2 \approx 1\,042\,282\,\text{mm}^3$, $O_2 \approx 69\,389\,\text{mm}^2$ **c)** $V_1 : V_2 = 297 : 210$
9.8 … wird das Kegelvolumen verdoppelt.
9.9 $h = \frac{\sqrt{7}\cdot 180}{4}\,\text{mm} \approx 119\,\text{mm}$
9.10 $l \approx 3{,}27\,\text{m}$
9.11 $O \approx 3{,}34\,\text{cm}^2$
9.12 **a)** $V_{\text{Zylinder}} = 72 \cdot \pi$, $V_{\text{Kegel}} = 24 \cdot \pi$ **b)** $V_{\text{Kegel}} : V_{\text{Zylinder}} = (24 \cdot \pi) : (72 \cdot \pi) = 1 : 3$
9.13 **a)** $1{,}5\,\text{m}$ **b)** $M_{\text{Quader}} = 1{,}5\,\text{m}^2$, $M_{\text{Pyramide}} = 0{,}5 \cdot \sqrt{10}\,\text{m}^2$; das Verhältnis ist nicht rational $(3 : \sqrt{10})$
9.14 ca. $3{,}9\,\text{mm}$
9.15 **a)** nein: $V_{\text{Zylinder}} = 1{,}474\ldots$ L **b)** ca. $257{,}2\,\text{mm}$
9.16 **a)** $V = 96 \cdot \pi\,\text{cm}^3$, $M = 60 \cdot \pi\,\text{cm}^2$ **b)** $216°$ **c)** Nein, das Blatt fasst nur einen Halbkreis mit Radius 10 cm, der Zentriwinkel ist aber größer als $180°$.
9.17 $V = 1200 \cdot \pi\,\text{cm}^3$, $O = 420 \cdot \pi\,\text{cm}^2$

10. Daten und Zufall

Daten und Zufall ✓

- Interpretieren und Darstellen von absoluten und relativen Häufigkeiten in Kreuztabellen
- Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei einstufigen Zufallsexperimenten
- Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten bei zweistufigen Zufallsexperimenten (auch mit Baumdiagrammen)

10.1. Die unten dargestellte Spirale besteht aus einer Abfolge von 4 Halbkreisbögen.



Der kürzeste dieser 4 Halbkreisbögen ist links rot markiert.

Welchen relativen Anteil der Gesamtlänge der Spirale hat dieser Halbkreisbogen?

Gib das Ergebnis als vollständig gekürzten Bruch an.

10.2. Trage die richtigen Zahlen in die Kästchen ein.

a) $4\,\% \cdot 2 = \boxed{}\,\% = \boxed{}$

b) $4 \cdot 2\,\% = \boxed{}\,\% = \boxed{}$

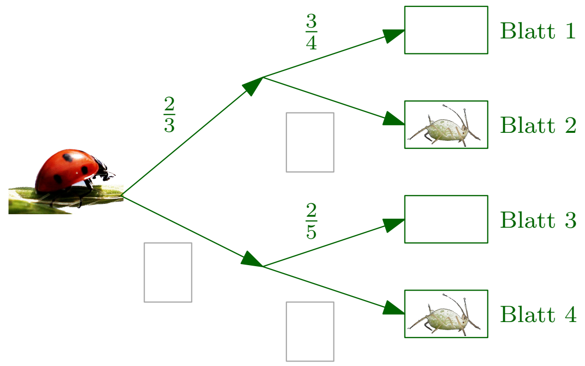
c) $4\,\% \cdot 2\,\% = \boxed{}\,\% = \boxed{}$

10.3. Die drei Schüler*innen Anna, Benjamin und Chris stellen sich zur Wahl als Klassensprecher*in auf.
Anna erhält 20 % der Stimmen.

a) Benjamin erhält um 40 % mehr Stimmen als Anna.
Chris erhält alle verbleibenden Stimmen. Wie viel Prozent der Stimmen erhält Chris?

b) Benjamin erhält um 40 Prozentpunkte mehr Stimmen als Anna.
Chris erhält alle verbleibenden Stimmen. Wie viel Prozent der Stimmen erhält Chris?

10.4. Der dargestellte Marienkäfer kriecht entlang der Pfeile zu einem der 4 Blätter.



Wenn sich der Marienkäfer bei einer Verzweigung befindet, dann kriecht er gemäß der jeweils angegebenen Wahrscheinlichkeit entweder nach oben oder nach unten weiter.

1) Beschrifte rechts die Pfeile mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürztem Bruch.

In Blatt 1 und Blatt 3 befindet sich keine Blattlaus.
In Blatt 2 und Blatt 4 befindet sich jeweils eine Blattlaus.

2) Welches Ereignis ist wahrscheinlicher? Begründe deine Antwort.
Ereignis A: Der Marienkäfer landet bei der Blattlaus auf Blatt 2.
Ereignis B: Der Marienkäfer landet bei der Blattlaus auf Blatt 4.

3) Welches Ereignis ist wahrscheinlicher? Begründe deine Antwort.
Ereignis C: Der Marienkäfer landet bei keiner Blattlaus.
Ereignis D: Der Marienkäfer landet bei einer Blattlaus.

10.5. Du würfelst 2 mal hintereinander mit einem fairen Würfel.
Welches der beiden Ereignisse A bzw. B ist wahrscheinlicher?
Oder sind beide Ereignisse gleich wahrscheinlich? Berechne die Wahrscheinlichkeiten.

a) Ereignis A: ⚀ → ⚁
Ereignis B: ⚄ → ⚅

b) Ereignis A: ⚅ → ⚀
Ereignis B: ⚅ → ⚅

c) Ereignis A: gleiches Würfelergebnis
Ereignis B: verschiedene Würfelergebnisse

d) Ereignis A: Augensumme 12
Ereignis B: Augensumme 2

e) Ereignis A: ⚀ → ⚁
Ereignis B: Augensumme 3

f) Ereignis A: Augensumme 7
Ereignis B: Augensumme 8

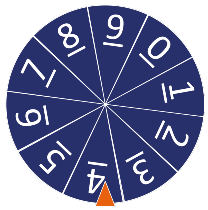
MmF

10.6. In einem Kartenspiel hat jede Karte genau eine der 4 Farben Rot, Blau, Grün oder Gelb.
Jede Karte ist mit genau einer der Ziffern von 1 bis 9 beschriftet.
Jede Kombination aus Farbe und Ziffer kommt auf genau einer Karte vor.

1) Aus wie vielen Karten besteht das Kartenspiel?
2) Du ziehst zufällig eine dieser Karten.
Stelle die Wahrscheinlichkeit für das angegebene Ereignis als vollständig gekürzten Bruch dar.
  i) Die gezogene Karte ist rot.
  ii) Die gezogene Karte ist mit der Ziffer 4 beschriftet.
  iii) Die gezogene Karte ist blau und mit einer ungeraden Ziffer beschriftet.
3) Diesmal ziehst du zwei dieser Karten hintereinander ohne Zurücklegen.
Stelle die Wahrscheinlichkeit für das angegebene Ereignis als vollständig gekürzten Bruch dar.
  i) Beide Karten sind grün.
  ii) Beide Karten haben die gleiche Farbe.
  iii) Beide Karten haben verschiedene Farben.

MmF

10.7. Ein faires Glücksrad hat 10 gleiche große Felder, die mit den Zahlen von 0 bis 9 beschriftet sind.



a) Du drehst das Glücksrad zwei Mal und berechnest die Summe der beiden Ergebnisse.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für das angegebene Ereignis in Prozent.
  1) Die Summe ist gleich 8.
  2) Die Summe ist größer als 15.
  3) Die Summe ist höchstens 5.

b) Du drehst das Glücksrad zwei Mal und berechnest das Produkt der beiden Ergebnisse.
Berechne die Wahrscheinlichkeit für das angegebene Ereignis in Prozent.
  1) Das Produkt ist gleich 8.
  2) Das Produkt ist gleich 0.
  3) Das Produkt ist gleich 36.

MmF

10.8. In einer Schule wird eine Umfrage unter allen Schüler*innen durchgeführt.
Die Umfrage enthält die beiden folgenden Fragen:

i) Hast du (mindestens) ein Haustier oder hast du *kein* Haustier?
ii) Ernährst du dich vegan oder ernährst du dich *nicht* vegan?

Insgesamt nehmen 420 Schüler*innen an der Umfrage teil.
Du erhältst die folgenden Informationen zum Ergebnis dieser Umfrage:

- Genau 87 Schüler*innen haben ein Haustier und ernähren sich *nicht* vegan.
- Genau 5 % der Schüler*innen haben ein Haustier und ernähren sich vegan.
- Genau $\frac{19}{21}$ der Schüler*innen ernähren sich *nicht* vegan.

1) Trage die absoluten Häufigkeiten in der nachstehenden Tabelle ein.

	hat Haustier	hat kein Haustier	Summe
vegan			
nicht vegan			
Summe			

2) Berechne den relativen Anteil dieser 420 Schüler*innen, die *kein* Haustier haben und sich vegan ernähren.
Gib diesen relativen Anteil als vollständig gekürzten Bruch an.

Unter diesen 420 Schüler*innen wird eine Person nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

3) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person ein Haustier hat.
Gib diese Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürzten Bruch an.

Unter den Schüler*innen, die *kein* Haustier haben, wird eine Person nach dem Zufallsprinzip ausgewählt.

4) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich diese Person vegan ernährt.
Gib diese Wahrscheinlichkeit als vollständig gekürzten Bruch an.

MmF

10.9. Am 01.01.2021 waren in Österreich rund 98 % der wahlberechtigten Personen volljährig. (Quelle: Statistik Austria)
Bei einer Bundespräsidentenwahl stehen genau 2 Personen A und B zur Wahl.
Eine repräsentative Umfrage unter wahlberechtigten Personen (Mindestalter 16 Jahre) enthält zwei Fragen:

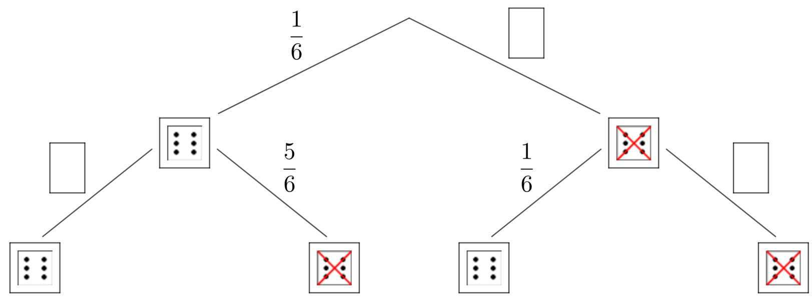
i) Sind Sie volljährig?
ii) Würden Sie heute Person A, Person B oder keine der beiden Personen wählen?

Die Ergebnisse der Umfrage werden in der nachstehenden Tabelle als prozentuelle Häufigkeiten eingetragen.

	Person A	Person B	weder noch	Summe
volljährig	31 %	38 %		98 %
nicht volljährig	1 %		0,5 %	
Summe				

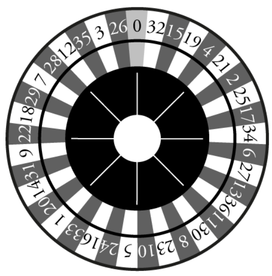
1) Trage die fehlenden Werte in die Tabelle oben ein.
2) Wie viel Prozent der befragten Personen sind *nicht* volljährig und wählen Person B?
3) Wie viel Prozent der befragten Personen, die *nicht* volljährig sind, wählen Person B?

10.10. Lena würfelt zweimal mit einem fairen Würfel. Bei jedem Wurf notiert sie, ob sie einen Sechser oder keinen Sechser gewürfelt hat. Die Wahrscheinlichkeiten hält sie im untenstehenden Baumdiagramm fest.



... Sechser ... kein Sechser

a) Trage im Baumdiagramm oben die fehlenden Wahrscheinlichkeiten in die Kästchen ein.
b) Hannah dreht beim Roulette mit 37 Feldern einmal.



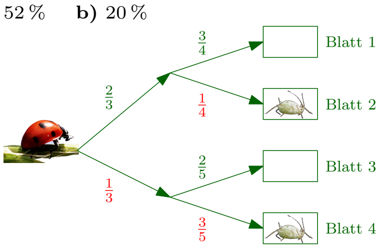
Hannah behauptet, es sei wahrscheinlicher, dass beim Roulette die Kugel im Feld 0 liegen bleibt, als zweimal hintereinander einen Sechser zu würfeln. Bestätige oder widerlege ihre Aussage durch eine Rechnung.

10.1 $\frac{1}{10}$

10.2 **a)** $8\,\% = 0{,}08$ **b)** $8\,\% = 0{,}08$ **c)** $0{,}08\,\% = 0{,}0008$

10.3 **a)** $52\,\%$ **b)** $20\,\%$

10.4 **1)**



2) $P(A) = \frac{1}{6} < \frac{1}{5} = P(B)$ **3)** $\frac{19}{30} = P(C) > P(D) = \frac{11}{30}$

10.5 **a)** Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich, nämlich $P(A) = P(B) = \frac{1}{36}$.
b) Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich, nämlich $P(A) = P(B) = \frac{1}{36}$.
c) Ereignis B ist wahrscheinlicher als Ereignis A, nämlich $P(A) = \frac{6}{36} < \frac{30}{36} = P(B)$.
d) Beide Ereignisse sind gleich wahrscheinlich, nämlich $P(A) = P(B) = \frac{1}{36}$.
e) Ereignis B ist wahrscheinlicher als Ereignis A, nämlich $P(A) = \frac{1}{36} < \frac{2}{36} = P(B)$.
f) Ereignis A ist wahrscheinlicher als Ereignis B, nämlich $P(A) = \frac{6}{36} > \frac{5}{36} = P(B)$.

10.6 **1)** 36 Karten
2) **i)** $\frac{1}{4}$ **ii)** $\frac{1}{9}$ **iii)** $\frac{5}{36}$
3) **i)** $\frac{2}{35}$ **ii)** $\frac{8}{35}$ **iii)** $\frac{27}{35}$

10.7 **a)** **1)** $9\,\%$ **2)** $6\,\%$ **3)** $21\,\%$
b) **1)** $4\,\%$ **2)** $19\,\%$ **3)** $3\,\%$

10.8 **1)**

	hat Haustier	hat kein Haustier	Summe
vegan	21	19	40
nicht vegan	87	293	380
Summe	108	312	420

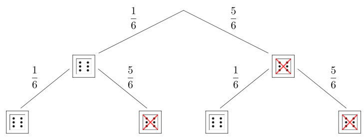
2) $\frac{19}{420}$ **3)** $\frac{9}{35}$ **4)** $\frac{19}{312}$

10.9 **1)**

	Person A	Person B	weder noch	Summe
volljährig	31 %	38 %	29 %	98 %
nicht volljährig	1 %	0,5 %	0,5 %	2 %
Summe	32 %	38,5 %	29,5 %	100 %

2) $0{,}5\,\%$ **3)** $25\,\%$

10.10 **a)**



b) Hannahs Aussage ist falsch. Wahrscheinlichkeit für Null beim Roulette: $\frac{1}{37}$; Wahrscheinlichkeit für zwei Sechser: $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$