AUFGABENSAMMLUNG – TECHNOLOGIE

Inhaltsverzeichnis

Unterrichtsmaterialien – Technologie MmF

Zur Bearbeitung der Aufgabensammlung empfehlen wir die dazugehörigen Materialien in dieser Reihenfolge:

- ✓ Technologieblatt – Gleichungen und Gleichungssysteme
- ✓ Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen
- ✓ Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen
- ✓ Technologieblatt – Integralrechnung
- ✓ Arbeitsblatt – Interpolation und Regression
- ✓ Arbeitsblatt – Binomialverteilung
- ✓ Arbeitsblatt – Normalverteilung
- ✓ Arbeitsblatt – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle
- ✓ Arbeitsblatt – Differentialgleichungen

Informationen zur Aufgabensammlung MmF

- Diese Aufgabensammlung enthält eine thematisch sortierte Abfolge von SR(D)P-Aufgaben, zu deren Lösung höherer Technologieeinsatz unterstützend eingesetzt werden *kann*. Einige der folgenden Aufgaben wären auch ohne technische Hilfsmittel oder mit einem einfachen Taschenrechner sinnvoll lösbar.
- Nicht jede dieser Aufgaben ist für alle Schultypen bei der SR(D)P relevant.
  Umgekehrt erhebt die Aufgabensammlung nicht den Anspruch, jeden möglichen Aufgabentyp abzudecken.
- Wir freuen uns über Feedback zu den Unterrichtsmaterialien und Aufgaben an mmf@univie.ac.at.

Datum: 22. August 2024

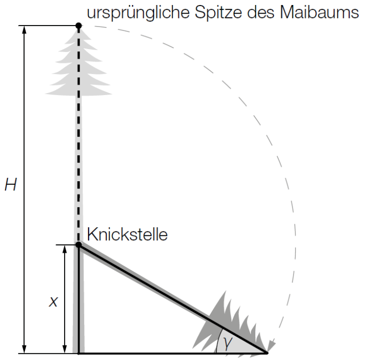
1. Gleichungen und Gleichungssysteme

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Technologieblatt – Gleichungen und Gleichungssysteme

1.1



Bei einem starken Unwetter knickt ein Maibaum der Höhe H um. Der geknickte Teil schließt mit dem horizontalen Boden einen Winkel γ ein (siehe nebenstehende nicht maßstabgetreue Skizze).

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung von x aus H und γ auf.

$x =$ ______________________

1.2

Die täglich aufgenommene Nahrungsmenge eines ausgewachsenen Zwerghamsters hängt von seiner Körpermasse ab. Die folgende Formel gibt näherungsweise den Zusammenhang zwischen der täglich aufgenommenen Nahrungsmenge N und der Körpermasse M an:

$$N = 1{,}422 \cdot \ln(M) - 1{,}78$$

N ... täglich aufgenommene Nahrungsmenge in g
M ... Körpermasse in g

1) Berechnen Sie die täglich aufgenommene Nahrungsmenge bei einer Körpermasse von 30 g.

2) Formen Sie die Formel nach M um.

$M =$ ______________________

1.3

Für ein öffentliches Verkehrsmittel wurden an einem Tag 150 000 Fahrscheine verkauft.
Ein Vollpreisfahrschein kostet € 2,60, ein ermäßigter Fahrschein € 1,20.
Durch den Verkauf von x Vollpreisfahrscheinen und y ermäßigten Fahrscheinen wurden an diesem Tag insgesamt € 337 500 eingenommen.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung von x und y.

2) Berechnen Sie x und y.

1.4

Eine bestimmte Zirkusvorstellung wurde von 65 Erwachsenen und 57 Kindern besucht. Diese bezahlten insgesamt Eintritt in Höhe von € 1 179. Eine andere Zirkusvorstellung mit den gleichen Eintrittspreisen wurde von 82 Erwachsenen und 74 Kindern besucht. Diese bezahlten insgesamt Eintritt in Höhe von € 1 502.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Eintrittspreises x für einen Erwachsenen und des Eintrittspreises y für ein Kind.

2) Berechnen Sie die Eintrittspreise x und y.

1.5

Weine der Sorten Zweigelt und Grüner Veltliner werden in Kisten zu 12 Flaschen und Kartons zu 6 Flaschen verkauft. Die Preise pro Flasche sind unabhängig von der Packungsgröße.
1 Kiste Zweigelt und 1 Karton Grüner Veltliner kosten insgesamt € 47,40.
2 Kisten Grüner Veltliner und 1 Karton Zweigelt kosten insgesamt € 72.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem der Preis für eine Flasche Zweigelt und der Preis für eine Flasche Grüner Veltliner berechnet werden können.

2) Berechnen Sie den Preis für eine Flasche Zweigelt und den Preis für eine Flasche Grüner Veltliner.

1.6

Ein Kino zeigt einen bestimmten Film gleichzeitig in 3 Kinosälen.

- Im Kinosaal X wird der Film in der Standardversion gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 14,80.
- Im Kinosaal Y wird der Film in 3D gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 17.
- Im Kinosaal Z wird der Film im „Director's Cut" gezeigt. Hier kostet ein Ticket € 19,30.

Insgesamt wurden 120 Tickets verkauft und € 2 067 eingenommen.
Für Kinosaal Z wurden 25 % mehr Tickets als für Kinosaal X verkauft.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.

2) Berechnen Sie die Anzahl der jeweils verkauften Tickets für die Kinosäle X, Y und Z.

1.7

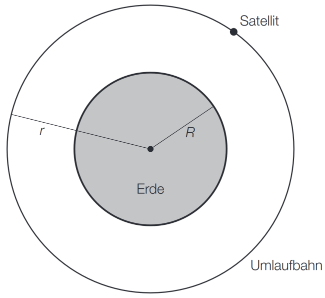
Katharina und Georg arbeiten als Pflegekräfte in einem Heim. Sie bekommen das gleiche monatliche Grundgehalt. Im Februar lag in diesem Heim ein besonderer Arbeitsbedarf vor. Georg leistete 14 Überstunden, Katharina leistete 46 Überstunden. Ihr jeweiliges Gesamtentgelt setzt sich aus dem Grundgehalt und der Abgeltung für die geleisteten Überstunden zusammen. Jede Überstunde wird dabei gleich abgegolten. Das Gesamtentgelt von Georg betrug im Februar 2617 €, jenes von Katharina betrug 3433 €.

1) Ermitteln Sie das Grundgehalt und die Abgeltung für eine Überstunde.

1.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Satellit bewegt sich auf einer annähernd kreisförmigen Umlaufbahn mit dem Radius r um die Erde. Die Erde wird als kugelförmig mit dem Radius R angenommen. Dieses Modell ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



Aufgabenstellung:

Ein bestimmter Satellit bewegt sich mit der Geschwindigkeit $v = 7500\,\text{m/s}$ auf seiner Umlaufbahn. Der Zusammenhang zwischen seiner Geschwindigkeit und dem Radius seiner Umlaufbahn wird durch die nachstehende Gleichung angegeben.

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$$

v ... Geschwindigkeit des Satelliten in m/s
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ ... allgemeine Gravitationskonstante in $\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$
$M = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ ... Masse der Erde in kg
r ... Radius der Umlaufbahn des Satelliten in m

1) Berechnen Sie den Radius r der Umlaufbahn dieses Satelliten.

$r =$ ______________________________ m

1.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Übungsfirma einer Tourismusschule möchte selbstgemischtes Studentenfutter an Schüler/innen derselben Schule verkaufen.
Die Mitarbeiter/innen der Übungsfirma stellen eine Studentenfutter-Mischung aus Rosinen, Mandeln und Walnüssen her. Insgesamt werden 80 kg dieser Mischung hergestellt. Der Einkaufspreis für 1 kg Rosinen beträgt € 6, für 1 kg Mandeln € 12 und für 1 kg Walnüsse € 14. Das Mischungsverhältnis soll so sein, dass der Massenanteil von Rosinen und Mandeln gleich ist.

1) Berechnen Sie, wie viele Kilogramm Rosinen, Mandeln und Walnüsse gekauft werden müssen, wenn 1 Kilogramm der Mischung in der Herstellung € 10 kosten soll.

1.10

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Im Folgenden wird modellhaft von einer konstanten Geschwindigkeit (gemessen in km/h) eines Zuges und einer Schnellbahn ausgegangen.
Die Entfernung von Ort A nach Ort B auf einer geradlinigen Streckenführung beträgt 20 km. Der Zug fährt mit der Geschwindigkeit v_1 von Ort A nach Ort B. Die Schnellbahn, deren Geschwindigkeit um ein Drittel geringer ist, fährt in die entgegengesetzte Richtung. Der Zug passiert Ort A zum selben Zeitpunkt wie die Schnellbahn Ort B. Sie begegnen einander nach 10 Minuten.

1) Berechnen Sie die Geschwindigkeit v_1 des Zuges.

1.1 $x = \dfrac{H \cdot \sin(\gamma)}{1 + \sin(\gamma)}$

1.2 **1)** 3,05... g **2)** $M = e^{0,7032... \cdot N + 1,2517...}$

1.3 **1)** $\mathrm{I}: x + y = 150\,000,\ \mathrm{II}: 2{,}6 \cdot x + 1{,}2 \cdot y = 337\,500$ **2)** $x = 112\,500,\ y = 37\,500$

1.4 **1)** $\mathrm{I}: 65 \cdot x + 57 \cdot y = 1179,\ \mathrm{II}: 82 \cdot x + 74 \cdot y = 1502$ **2)** $x = 12,\ y = 7$

1.5 **1)** z ... Preis für 1 Flasche Zweigelt g ... Preis für 1 Flasche Grüner Veltliner $\mathrm{I}: 12 \cdot z + 6 \cdot g = 47{,}40,\ \mathrm{II}: 24 \cdot g + 6 \cdot z = 72$
2) $z = € 2{,}80,\ g = € 2{,}30$

1.6 **1)** $\mathrm{I}: x + y + z = 120,\ \mathrm{II}: 14{,}8 \cdot x + 17 \cdot y + 19{,}3 \cdot z = 2067,\ \mathrm{III}: 1{,}25 \cdot x = z$ **2)** $x = 40,\ y = 30,\ z = 50$

1.7 Das Grundgehalt beträgt 2260 €, die Abgeltung für eine Überstunde 25,50 €.

1.8 $r = 7\,079\,093{,}3...$ m

1.9 32 kg Rosinen, 32 kg Mandeln, 16 kg Walnüsse

1.10 $v_1 = 72$ km/h

2. Kurvenuntersuchungen

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Technologieblatt – Kurvenuntersuchungen

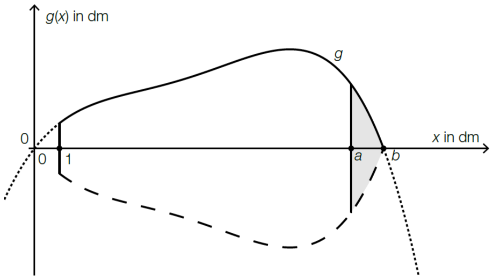
Funktionswerte / (Null)stellen

2.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.
Durch Rotation des Graphen der Funktion g im Intervall $[1; b]$ um die x-Achse entsteht die Form einer weiteren Abrissbirne (siehe nachstehende Abbildung):

$$g(x) = -0{,}001\,57 \cdot x^4 + 0{,}036\,88 \cdot x^3 - 0{,}298\,82 \cdot x^2 + 1{,}263\,25 \cdot x$$



1) Berechnen Sie die Nullstelle b.

2.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Kugelstoßen ist eine Disziplin bei den Olympischen Sommerspielen.
Eine Metallkugel muss so weit wie möglich aus einem Kreis in einen vorgegebenen Aufschlagbereich gestoßen werden. Die Bahnkurve einer gestoßenen Kugel lässt sich näherungsweise durch den Graphen der quadratischen Funktion h beschreiben:

$$h(x) = -0{,}05 \cdot x^2 + 0{,}75 \cdot x + 2 \qquad \text{mit } x \geq 0$$

$x \ldots$ horizontale Entfernung der Kugel von der Abstoßstelle in m
$h(x) \ldots$ Höhe der Kugel über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Geben Sie an, in welcher Höhe die Kugel abgestoßen wird.

2) Ermitteln Sie, in welcher horizontalen Entfernung von der Abstoßstelle die Kugel auf dem Boden aufschlägt.

2.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Leistung eines bestimmten Windrads in Abhängigkeit von der Windgeschwindigkeit v kann für Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bis 10 m/s näherungsweise durch die Polynomfunktion P beschrieben werden.

$$P(v) = 0{,}0175 \cdot v^2 - 0{,}0796 \cdot v + 0{,}0391 \qquad \text{mit } 5 \leq v \leq 10$$

$v \ldots$ Windgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s)
$P(v) \ldots$ Leistung bei der Windgeschwindigkeit v in Megawatt (MW)

1) Berechnen Sie, bei welcher Windgeschwindigkeit eine Leistung von 0,5 MW erzielt wird.

2.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut sinkt ab Herbstbeginn und lässt sich durch die Funktion N beschreiben.

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-0{,}0173 \cdot t}$$

t ... Zeit ab Herbstbeginn in Tagen
$N(t)$ ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zur Zeit t in Nanogramm pro Milliliter (ng/ml)
N_0 ... Vitamin-D-Konzentration in Claudias Blut zu Herbstbeginn in ng/ml

Der Körper ist ausreichend mit Vitamin D versorgt, wenn dessen Konzentration im Blut mindestens 30 ng/ml beträgt. Claudia möchte wissen, wie hoch die Vitamin-D-Konzentration im Blut zu Herbstbeginn mindestens sein muss, damit ihr Körper nach 60 Tagen noch ausreichend mit Vitamin D versorgt ist.

1) Berechnen Sie die dafür notwendige Vitamin-D-Konzentration zu Herbstbeginn.

2.5

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die quadratische Funktion Z beschreibt näherungsweise die Kochzeit für ein weich gekochtes Ei in Abhängigkeit von der Lagertemperatur:

$$Z(x) = -0{,}024 \cdot x^2 - 2{,}16 \cdot x + 252$$

x ... Lagertemperatur in °C
$Z(x)$ ... Kochzeit bei der Lagertemperatur x in s

Ein Ei wird anstatt bei einer Temperatur von 4 °C (Kühlschranktemperatur) bei einer Temperatur von 20 °C (Raumtemperatur) gelagert.

1) Ermitteln Sie, um wie viele Sekunden die Kochzeit dadurch kürzer ist.

2.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Becher mit Speiseeis wird aus der Kühlvitrine entnommen. Die Temperatur des Speiseeises in Abhängigkeit von der Zeit kann modellhaft durch die Funktion T beschrieben werden.

$$T(t) = -35 \cdot e^{-0{,}03 \cdot t} + 25$$

t ... Zeit in min mit $t = 0$ für den Zeitpunkt der Entnahme aus der Kühlvitrine
$T(t)$ ... Temperatur des Speiseeises zur Zeit t in °C

1) Tragen Sie im nachstehenden Satz die fehlende Zahl ein.

Die Temperatur des Speiseeises bei der Entnahme aus der Kühlvitrine beträgt ____________ °C.

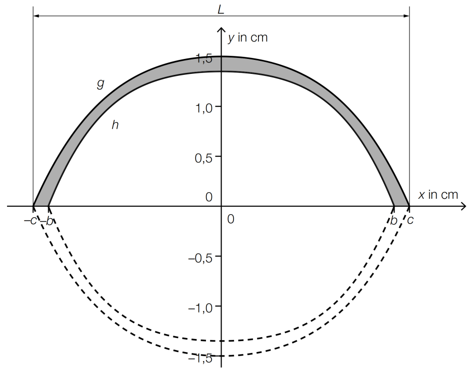
Das gefrorene Speiseeis schmilzt ab einer Temperatur von 0 °C.

2) Ermitteln Sie denjenigen Zeitpunkt, ab dem das gefrorene Speiseeis schmilzt.

2.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Walnuss modellhaft dargestellt. Die Schale der Walnuss entsteht durch Rotation der grau markierten Fläche um die x-Achse.



$$g(x) = -0{,}034 \cdot x^4 - 0{,}19 \cdot x^2 + 1{,}5$$

$$h(x) = -0{,}057 \cdot x^4 - 0{,}14 \cdot x^2 + a$$

x, $g(x)$, $h(x)$ ... Koordinaten in cm
a ... Parameter

1) Zeigen Sie, dass die Länge L dieser Walnuss mehr als 4 cm beträgt.

An der Stelle $x = 0$ beträgt die Dicke der Walnussschale 1,7 mm.

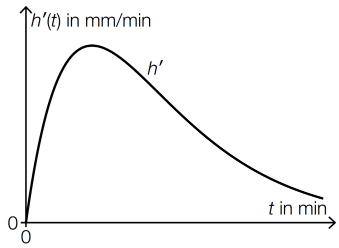
2) Geben Sie den Parameter a der Funktion h an.

$a =$ ________________ cm

2.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Während eines Regenschauers wird der Wasserstand in einem bestimmten, anfangs leeren zylinderförmigen Gefäß gemessen.
Die Funktion h' beschreibt modellhaft die momentane Änderungsrate des Wasserstands in diesem Gefäß (siehe nebenstehende Abbildung).



$$h'(t) = 1{,}5 \cdot t \cdot e^{-0{,}3 \cdot t} \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 15$$

t ... Zeit in min
$h'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Wasserstands zur Zeit t in mm/min

1) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate des Wasserstands mindestens 1 mm/min beträgt.

2.9

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Teil des Graphen der Funktion f beschreibt die Flugbahn der Speerspitze bei einem bestimmten Wurf.

$$f(x) = -0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}7 \cdot x + 1{,}8 \quad \text{mit } x \geq 0$$

x ... horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt in m
$f(x)$ ... Höhe über dem Boden bei der horizontalen Entfernung x in m

1) Berechnen Sie die horizontale Entfernung vom Abwurfpunkt, in der die Speerspitze bei diesem Wurf auf dem Boden auftrifft.

2.10

Die Körpergröße von Rindern wird durch die sogenannte *Widerristhöhe* beschrieben.
Eine Landwirtin züchtet eine Rinderrasse, für die die Widerristhöhe in Abhängigkeit vom Alter modellhaft durch die Funktion h beschrieben wird.

$$h(t) = 0{,}0024 \cdot t^3 - 0{,}19 \cdot t^2 + 5{,}73 \cdot t + 73 \quad \text{mit } 1 \leq t \leq 24$$

t ... Alter in Monaten
$h(t)$ ... Widerristhöhe eines Rindes im Alter t in cm

1) Berechnen Sie das Alter, in dem gemäß diesem Modell eine Widerristhöhe von 115 cm erreicht wird.

2.11

Der empfohlene Reifendruck eines Fahrradreifens sinkt mit zunehmender Breite des Reifens. Für einen empfohlenen Reifendruck von 2 bar bis 9 bar kann der empfohlene Reifendruck näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden.

$$p(x) = 19{,}1 \cdot e^{-0{,}0376 \cdot x}$$

x ... Breite des Reifens in mm
$p(x)$ ... empfohlener Reifendruck bei der Breite x in bar

1) Ermitteln Sie das größtmögliche Intervall für die Breite des Reifens, für das sich ein empfohlener Reifendruck von 2 bar bis 9 bar ergibt.

2.12

Die Geschwindigkeit eines Sportwagens kann im Zeitintervall $[0; 20]$ in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion v_2 beschrieben werden.

$$v_2(t) = -0{,}001 \cdot t^4 + 0{,}078 \cdot t^3 - 2{,}23 \cdot t^2 + 32 \cdot t$$

t ... Zeit in s
$v_2(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in km/h

1) Berechnen Sie mithilfe von v_2 den Zeitpunkt $t_2 \in [0; 20]$, zu dem die Geschwindigkeit des Sportwagens 130 km/h beträgt.

2.13

Die Populationsgröße (Anzahl der Individuen) einer bestimmten Tierart kann modellhaft durch die Funktion $N\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ in Abhängigkeit von der Zeit t beschrieben werden. Dabei gilt:

$$N(t) = \frac{500}{1 + 4 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}}$$

t ... Zeit in Wochen
$N(t)$ ... Populationsgröße zum Zeitpunkt t

Zum Zeitpunkt t_v ist die Population auf das Doppelte ihrer Größe zum Zeitpunkt $t = 0$ angewachsen.

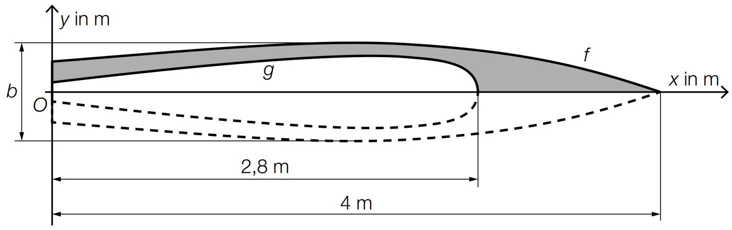
1) Berechnen Sie t_v.

Extremstellen / Extrempunkte

2.14

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Stand-up-Paddling ist eine Wassersportart, bei der man aufrecht auf einem Board steht und paddelt. In der nachstehenden Abbildung ist der Entwurf für ein zweifärbiges Board in der Ansicht von oben dargestellt.



Der Entwurf ist symmetrisch bezüglich der x-Achse. Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = -0{,}0125 \cdot x^3 + 0{,}02 \cdot x^2 + 0{,}07 \cdot x + 0{,}2 \quad \text{mit } 0 \le x \le 4$$

1) Berechnen Sie die maximale Breite b des Boards.

2.15

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Energieverbrauch einer Großstadt unterliegt Schwankungen.
Mit der Funktion E wird der voraussichtliche Energieverbrauch pro Tag für die nächsten 5 Jahre modelliert:

$$E(t) = 8{,}9 + 0{,}0002 \cdot t + 0{,}1 \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot t}{365} + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{mit } t \ge 0$$

t ... Zeit in Tagen
$E(t)$ ... Energieverbrauch zur Zeit t in Gigawattstunden pro Tag (GWh/Tag)

1) Berechnen Sie die Minimumstelle der Funktion E im Zeitintervall $[400; 700]$.

2.16

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Während eines Hochwassers wurde über den Zeitraum von einer Woche der Pegelstand eines Flusses ermittelt. Den Messergebnissen zufolge kann der zeitliche Verlauf des Pegelstands näherungsweise durch die Funktion p beschrieben werden:

$$p(t) = -3{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 6{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot t^2 - 0{,}011 \cdot t + 7{,}661 \quad \text{mit } 0 \le t \le 168$$

t ... Zeit in h
$p(t)$ ... Pegelstand zur Zeit t in m

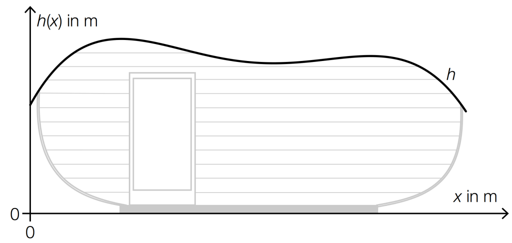
1) Berechnen Sie die Abweichung des höchsten Pegelstands während des Hochwassers vom „üblichen“ Pegelstand von 2,5 m.

2.17

In der unten stehenden Abbildung ist der Querschnitt einer Gartensauna dargestellt. Die obere Begrenzungslinie des Daches wird durch den Graphen der Funktion h beschrieben.

$$h(x) = -0{,}0207 \cdot x^4 + 0{,}265 \cdot x^3 - 1{,}14 \cdot x^2 + 1{,}8 \cdot x + 1{,}54 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 6{,}2$$

x ... horizontale Entfernung vom linken Dachrand in m
$h(x)$ ... Höhe über dem waagrechten Boden an der Stelle x in m



An der Stelle x_P gilt: $h'(x_P) = 0$ und $h''(x_P) > 0$.

1) Berechnen Sie die Stelle x_P.

2.18

Bei einem Beutestoß nehmen Furchenwale mit weit geöffnetem Maul eine große Menge Meerwasser und die darin enthaltene Beute auf. Forscher/innen beobachteten dieses Fressverhalten. Sie ermittelten mithilfe von Sensoren die Geschwindigkeit des Furchenwals bei einem Beutestoß, die Größe der Maulöffnung und das gesamte Wasservolumen, das dabei aufgenommen wird.

Datenquelle: Goldbogen, Jeremy A.: Schwieriger Krillfang der Wale. In: Spektrum der Wissenschaft November 2010, S. 60-67.

Die Größe der Maulöffnung bei einem Beutestoß eines Furchenwals kann näherungsweise durch die Funktion m beschrieben werden:

$$m(t) = \frac{1}{175} \cdot (-17 \cdot t^4 + 204 \cdot t^3 - 922{,}5 \cdot t^2 + 1863 \cdot t) \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 6$$

t ... Zeit seit Beginn des Öffnens des Mauls in s
$m(t)$ ... Größe der Maulöffnung zur Zeit t in m^2

1) Ermitteln Sie die maximale Größe der Maulöffnung.

2.19

Ein Geschoss, das unter einem Winkel α abgeschossen wird, trifft nach der Schussweite $x(\alpha)$ wieder auf dem Boden auf. Dabei gilt näherungsweise:

$$x(\alpha) = \frac{2 \cdot v^2}{g} \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)$$

α ... Abschusswinkel mit $0° < \alpha < 90°$
$x(\alpha)$ ... Schussweite bei einem Abschusswinkel α in m
v ... Abschussgeschwindigkeit in m/s
g ... Erdbeschleunigung (konstant)

1) Berechnen Sie denjenigen Winkel, bei dem die Schussweite am größten ist.

2) Zeigen Sie mithilfe der 2. Ableitung, dass für diesen berechneten Winkel die Schussweite maximal sein muss.

2.20

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In einem Modell wird die Entwicklung der Weltbevölkerung ab 1970 durch die Funktion g modelliert.

$$g(t) = 3{,}7 \cdot e^{-0{,}0001 \cdot t^2 + 0{,}02 \cdot t}$$

$t \ldots$ Zeit ab 1970 in Jahren
$g(t) \ldots$ Weltbevölkerung zur Zeit t in Milliarden

Gemäß diesem Modell wird die Weltbevölkerung zunächst zunehmen und in weiterer Folge abnehmen.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Funktion g das Maximum der Weltbevölkerung und das Kalenderjahr, in dem dies gemäß dem Modell eintreten soll.

Maximum der Weltbevölkerung: rund ________________ Milliarden

Kalenderjahr: ________________

2.21

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für einen bestimmten Flug eines voll besetzten Flugzeugs kann der Zusammenhang zwischen der Flugdistanz s und dem Treibstoffverbrauch $V(s)$ näherungsweise durch die Funktion $V\colon [2000; 10\,000] \to \mathbb{R}^+$ beschrieben werden.

$$V(s) = 4 + \left(\frac{s}{128\,000} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{s}{1000} \cdot e^{-\frac{s}{4000}} \quad \text{mit } 2000 \leq s \leq 10\,000$$

$s \ldots$ Flugdistanz in km
$V(s) \ldots$ Treibstoffverbrauch bei der Flugdistanz s in Litern pro Fluggast pro 100 km

1) Ermitteln Sie die Flugdistanz d (in km), bei der der Treibstoffverbrauch am geringsten ist.

2) Berechnen Sie die Menge an Treibstoff (in L), die dieses Flugzeug für die Flugdistanz d benötigt, wenn es mit 271 Fluggästen voll besetzt ist.

Steigungen / Tangenten

2.22

Feinstaub in der Atemluft stellt ein Gesundheitsrisiko dar.
An einer Messstelle in Graz wurde an einem bestimmten Tag von 5:00 Uhr bis 13:00 Uhr die Feinstaubbelastung gemessen. Die Funktion f beschreibt näherungsweise die Feinstaubbelastung in Abhängigkeit von der Zeit.

$$f(t) = -1{,}4 \cdot t^2 + 11 \cdot t + 47 \quad \text{mit } \ 0 \leq t \leq 8$$

$t \ldots$ Zeit in h mit $t = 0$ für 5:00 Uhr
$f(t) \ldots$ Feinstaubbelastung zur Zeit t in μg/m^3

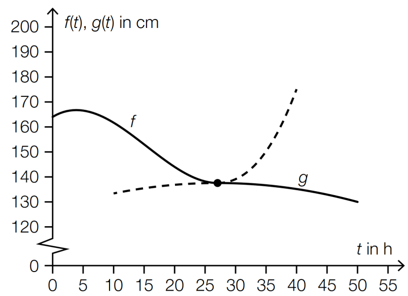
1) Ermitteln Sie diejenige Uhrzeit, zu der $f'(t) = -10$ gilt.

2.23

Zur Beschreibung des zeitlichen Verlaufs des gemessenen Wasserstands eines Flusses werden die Polynomfunktion 3. Grades f und die quadratische Funktion g verwendet (siehe nebenstehende Abbildung).

$t \ldots$ Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Messung
$f(t) \ldots$ Wasserstand zum Zeitpunkt t in cm mit $0 \leq t \leq 27{,}1$
$g(t) \ldots$ Wasserstand zum Zeitpunkt t in cm mit $27{,}1 \leq t \leq 50$

Es gilt: $f(t) = 0{,}004\,69 \cdot t^3 - 0{,}218 \cdot t^2 + 1{,}48 \cdot t + 164$



1) Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, zu dem der Wasserstand um 10 % niedriger als zu Beginn der Messung ist.

2) Berechnen Sie die momentane Änderungsrate des Wasserstands 10 h nach Beginn der Messung. Geben Sie das Ergebnis mit der zugehörigen Einheit an.

2.24

Die Flugbahn des Vogels Chuck kann zu Beginn durch den Graphen der Funktion g beschrieben werden:

$$g(x) = -0{,}5 \cdot x^2 + 5 \cdot x + 3 \qquad \text{mit } x \geq 0$$

$x \ldots$ horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in LE
$g(x) \ldots$ Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Der Spieler löst in 3 LE horizontaler Entfernung vom Abschusspunkt durch einen Mausklick eine Spezialfunktion aus. Der Vogel bewegt sich ab diesem Punkt bis zu einer horizontalen Entfernung von 5 LE vom Abschusspunkt entlang der Tangente an den gegebenen Funktionsgraphen.

1) Ermitteln Sie eine Gleichung der Tangente im Punkt $P = (3 \mid g(3))$.

2.25

Bevor ein Flugzeug abhebt, beschleunigt es auf der Startbahn. Der bis zum Abheben zurückgelegte Weg eines bestimmten Flugzeugs kann näherungsweise durch die Funktion s beschrieben werden.

$$s(t) = t^2 + 5 \cdot t$$

$t \ldots$ Zeit seit Beginn des Startvorgangs in s
$s(t) \ldots$ zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

Das Flugzeug hebt bei einer Geschwindigkeit von 90 km/h ab.

1) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den dieses Flugzeug auf der Startbahn zurücklegt.

2.26

Der Temperaturverlauf von abkühlendem Wasser wird durch die Funktion T beschrieben:

$$T(t) = 8 + 42 \cdot e^{-\frac{t}{84}} \qquad \text{mit } t \geq 0$$

$t \ldots$ Zeit nach Beginn des Vorgangs in min
$T(t) \ldots$ Temperatur des Wassers zur Zeit t in °C.

1) Stellen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von T zur Zeit $t = 0$ auf.

Die Tangente soll zur näherungsweisen Beschreibung des Temperaturverlaufs verwendet werden. Dabei werden Abweichungen von maximal 2 °C toleriert.

2) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem die Abweichung maximal 2 °C beträgt.

Wendestellen / Wendepunkte

2.27

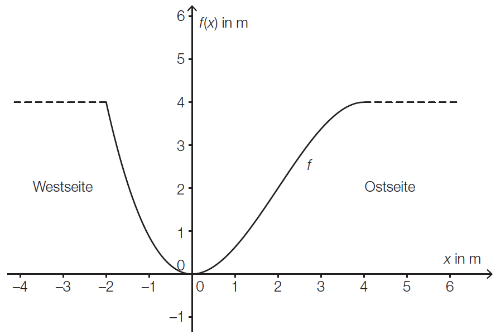
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Das Querschnittsprofil eines künstlichen Flusslaufes kann annähernd durch den Graphen der Polynomfunktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -\frac{1}{8} \cdot x^3 + \frac{3}{4} \cdot x^2 \quad \text{mit } -2 \leq x \leq 4$$

$x,\ f(x)\ldots$ Koordinaten in Metern (m)

Der Graph dieser Funktion ist in der nebenstehenden Abbildung dargestellt.



1) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der das Querschnittsprofil auf der Ostseite am stärksten ansteigt.

2.28

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die zwei Autos A und B stehen im Stau hintereinander. Sie beschleunigen und bremsen wieder ab. Die Weg-Zeit-Funktion des Autos A lautet:

$$s_A(t) = -0{,}08 \cdot t^3 + 1{,}2 \cdot t^2 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 10$$

$t\ldots$ Zeit in s
$s_A(t)\ldots$ zurückgelegter Weg zur Zeit t in m

1) Berechnen Sie die maximale Geschwindigkeit des Autos A.

2.29

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

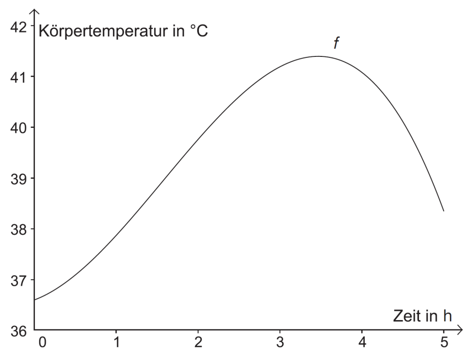
Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber).

Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.

Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:

$$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$$

$t\ldots$ Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$
$f(t)\ldots$ Körpertemperatur zur Zeit t in °C



1) Berechnen Sie denjenigen Zeitpunkt, zu dem die Körpertemperatur 37 °C beträgt.

2) Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen Temperaturzunahme.

2.30

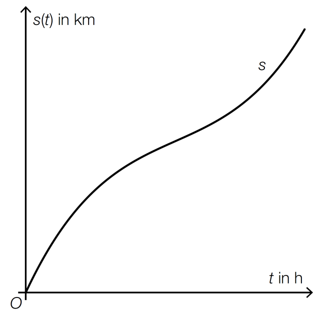
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Lena unternimmt eine Wanderung.
Der von ihr zurückgelegte Weg kann dabei in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die Funktion s beschrieben werden.

$$s(t) = 0{,}32 \cdot t^3 - 2{,}32 \cdot t^2 + 7{,}08 \cdot t \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 4{,}5$$

t ... Zeit seit Beginn der Wanderung in h
$s(t)$ ... zurückgelegter Weg zur Zeit t in km

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion s dargestellt.



1) Ermitteln Sie, nach welcher Zeit Lena mit der geringsten Geschwindigkeit wandert.

2) Ermitteln Sie dasjenige Zeitintervall, in dem Lena mit einer Geschwindigkeit von höchstens 5 km/h wandert.

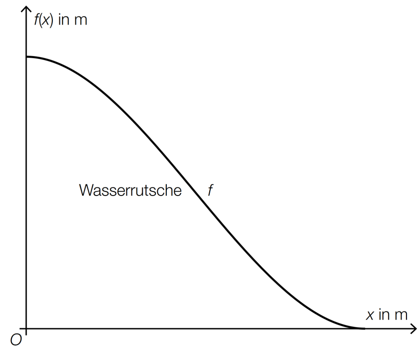
2.31

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Abbildung ist das seitliche Profil einer bestimmten Wasserrutsche modellhaft dargestellt.
Das seitliche Profil der Wasserrutsche ist durch den Graphen der Funktion $f\colon [0; 5] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{8}{125} \cdot x^3 - \frac{12}{25} \cdot x^2 + 4$$

gegeben (x in m, $f(x)$ in m).



1) Ermitteln Sie die Stelle x_1, an der die Wasserrutsche am steilsten bergab verläuft.

2.32

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich kann für den Zeitraum von 1997 bis 2019 modellhaft durch die nachstehende Gleichung beschrieben werden.

$$A(t) = \frac{147\,130}{1 + 31 \cdot e^{-0{,}28 \cdot t}}$$

t ... Zeit seit Beginn des Jahres 1997 in Jahren
$A(t)$ ... Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich zur Zeit t in 1000 Stück

1) Ermitteln Sie für den Zeitraum von 1997 bis 2019 dasjenige Jahr, in dem gemäß diesem Modell die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pelletsheizungen in Österreich am größten war.

Schnittstellen / Schnittpunkte

2.33

Ein Kindergarten bestellt für den täglichen Bedarf Joghurt.
Für die Produktion der Joghurtbecher liegen 2 Angebote vor.
Die Gesamtkosten K_1 und K_2 werden durch folgende Funktionen beschrieben:

$$K_1(x) = 0{,}4 \cdot x + 270$$

$$K_2(x) = 0{,}001\,125 \cdot x^2 + 0{,}125 \cdot x + 200$$

$x \ldots$ Anzahl der produzierten Joghurtbecher mit $x \geq 0$
$K_1(x) \ldots$ Gesamtkosten im 1. Angebot in Euro (€) bei x produzierten Joghurtbechern
$K_2(x) \ldots$ Gesamtkosten im 2. Angebot in Euro (€) bei x produzierten Joghurtbechern

1) Ermitteln Sie den Schnittpunkt der beiden Funktionsgraphen.

2) Interpretieren Sie den Schnittpunkt beider Funktionsgraphen im Bezug auf die Kosten.

2.34

Der Kaffeevollautomat Divo kostet € 800. Die verwendeten Kaffeebohnen kosten 18 €/kg. Für eine Tasse Kaffee werden 10 g Kaffeebohnen benötigt.
Die Kosten für x Tassen Kaffee setzen sich aus den Kosten für den Kaffeevollautomaten und den Kosten für die Kaffeebohnen zusammen und können durch die Funktion K_1 beschrieben werden.

$x \ldots$ Anzahl der Tassen Kaffee
$K_1(x) \ldots$ Kosten für x Tassen Kaffee in Euro

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion K_1 auf.

In einem kleinen Büro wird die Kaffeemaschine Kapsello verwendet. Die Kosten für x Tassen Kaffee können durch die Funktion K_2 beschrieben werden.

$$K_2(x) = 0{,}38 \cdot x + 160$$

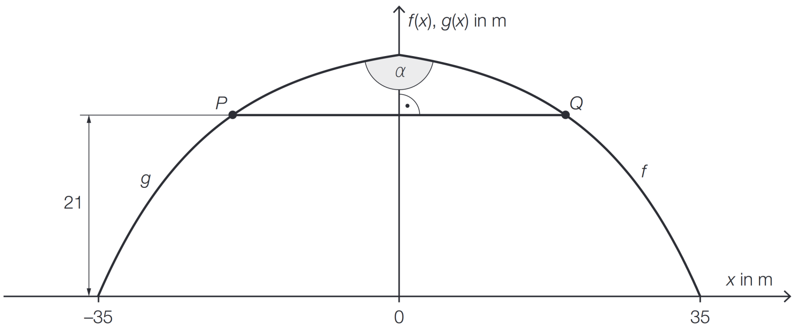
$x \ldots$ Anzahl der Tassen Kaffee
$K_2(x) \ldots$ Kosten für x Tassen Kaffee in Euro

2) Berechnen Sie diejenige Anzahl an Tassen Kaffee, ab der die Verwendung des Kaffeevollautomaten Divo günstiger als die Verwendung der Kaffeemaschine Kapsello wäre.

Steigungswinkel / Schnittwinkel

2.35

Der *Bitterfelder Bogen* ist eine Stahlkonstruktion, die aus mehreren Bögen besteht. Ein aus Rampen bestehender Fußweg führt innerhalb der Bögen zu einer Aussichtsplattform.
Der Verlauf des Bogens kann näherungsweise durch die Graphen der Funktionen f und g dargestellt werden. Die Graphen der beiden Funktionen sind zueinander symmetrisch bezüglich der senkrechten Achse. (Siehe nachstehende Abbildung.)



Es gilt:

$$f(x) = 30 \cdot \left(1 - e^{\frac{x-35}{13}}\right) \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 35$$

In einer Höhe von 21 m befindet sich die Aussichtsplattform.

1) Berechnen Sie die Länge $\overline{PQ}$.

2) Berechnen Sie den Schnittwinkel α der Graphen der Funktionen f und g.

2.36

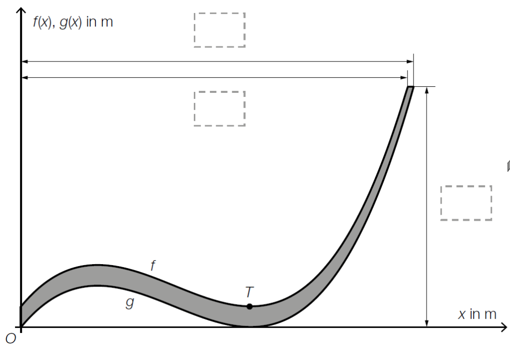
Der Profilverlauf einer Liege kann mithilfe der Funktionen f und g näherungsweise beschrieben werden.

Es gilt:

$$f(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x + 0{,}1$$

$$g(x) = 1{,}033 \cdot x^3 - 2{,}26 \cdot x^2 + 1{,}237 \cdot x$$

$x,\ f(x),\ g(x) \ldots$ Koordinaten in m



1) Berechnen Sie die Koordinaten des Tiefpunkts T des Graphen der Funktion f.

2) Berechnen Sie den Steigungswinkel von f an der Stelle $x_0 = 1{,}6$.

2.37

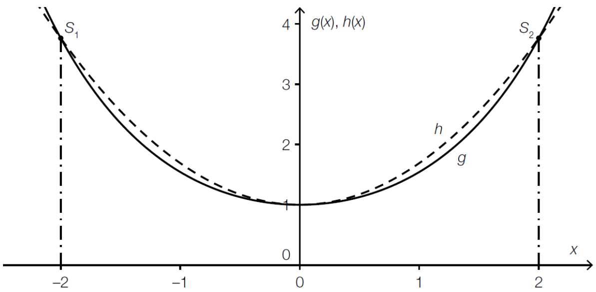
Der Verlauf eines zwischen zwei Punkten S_1 und S_2 durchhängenden Seils kann durch den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

dargestellt werden. Näherungsweise kann dieser Seilverlauf durch den Graphen einer quadratischen Funktion h mit

$$h(x) = a \cdot x^2 + c$$

dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Die Graphen der beiden Funktionen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.

1) Lesen Sie aus der nebenstehenden Abbildung den Parameter c ab.

2) Ermitteln Sie den Parameter a.

3) Berechnen Sie den Schnittwinkel der Graphen von g und h im Schnittpunkt S_2.

2.38

Bei höherer Belastung benötigt der Körper mehr Sauerstoff und produziert als „Abfallprodukt“ Laktat.
Ab einer gewissen Laktatkonzentration ist das Herz-Kreislauf-System nicht mehr in der Lage, die arbeitenden Muskeln mit genügend Sauerstoff zu versorgen. Diese Laktatkonzentration heißt *anaerobe Schwelle*.

Für einen bestimmten Sportler kann die Laktatkonzentration in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit beim Laufen näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = 0{,}0461 \cdot e^{0{,}29 \cdot x} + 0{,}9$$

$x \ldots$ Geschwindigkeit beim Laufen in Kilometern pro Stunde (km/h)
$f(x) \ldots$ Laktatkonzentration bei der Geschwindigkeit x in Millimol pro Liter Blut (mmol/L)

Erreicht die Laktatkonzentration die anaerobe Schwelle, so beträgt der Steigungswinkel von f an dieser Stelle 45°.

1) Bestimmen Sie die anaerobe Schwelle dieses Sportlers.

2.39

In einem Simulationsprogramm soll die Flugbahn eines in ebenem Gelände geschlagenen Golfballs dargestellt werden. Sie kann näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$h(x) = -\frac{1}{216\,000} \cdot x^3 + \frac{x}{5}, \quad x \geq 0$$

$x \ldots$ waagrechte Entfernung vom Abschlag in Metern (m)
$h(x) \ldots$ Höhe des Balls in Metern (m), wenn der Ball sich in x Metern Entfernung vom Abschlag befindet

1) Der Ball fällt in einen Teich, der sich in derselben Höhe wie der Abschlag befindet.
Ermitteln Sie den Winkel, unter dem der Ball eintaucht.

2) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punkts der Flugbahn mithilfe der Differenzialrechnung.

2.1 $b = 14{,}0\ldots\,\mathrm{dm}$
2.2 **1)** $2\,\mathrm{m}$ **2)** $17{,}31\ldots\,\mathrm{m}$
2.3 Eine Leistung von 0,5 MW wird bei einer Windgeschwindigkeit von rund 7,89 m/s erzielt.
2.4 84,7... ng/ml
2.5 43,7... s
2.6 **1)** $-10\,^\circ\mathrm{C}$ **2)** 11,21... min
2.7 **1)** $L = 4{,}2\ldots\,\mathrm{cm} > 4\,\mathrm{cm}$ **2)** $a = 1{,}33\,\mathrm{cm}$
2.8 $[0{,}86\ldots; 8{,}47\ldots]$
2.9 72,48... m
2.10 10,50... Monate
2.11 $[20{,}0\ldots; 60{,}0\ldots]$
2.12 6,21... s
2.13 $t_v = 4{,}9\ldots$
2.14 $b = 0{,}64\,\mathrm{m}$
2.15 $t = 540{,}7\ldots$ Tage
2.16 6,91... m
2.17 $x_P = 3{,}46\ldots$
2.18 $8{,}1\,\mathrm{m}^2$
2.19 **1)** $x'(\alpha) = 0 \implies \alpha = 45^\circ$
2) $x''(45^\circ) = -4 \cdot \frac{v^2}{g} < 0 \implies$ lokales Maximum bei $\alpha = 45^\circ$
2.20 Maximum der Weltbevölkerung: rund 10,1 Milliarden Kalenderjahr: 2070
2.21 **1)** $d = 3507{,}5\ldots\,\mathrm{km}$ **2)** 34 934,1... L
2.22 12:30 Uhr
2.23 **1)** $t_1 = 17{,}86\ldots\,\mathrm{h}$ **2)** $-1{,}473\,\mathrm{cm/h}$
2.24 $y = 2 \cdot x + 7{,}5$
2.25 150 m
2.26 **1)** $f(t) = -0{,}5 \cdot t + 50$ **2)** $[0\,\mathrm{min}; 27{,}3\ldots\,\mathrm{min}]$
2.27 $x = 2$
2.28 6 m/s
2.29 **1)** $f(t) = 37 \rightsquigarrow t = 0{,}429\ldots\,\mathrm{h}$ **2)** $t = 1{,}574\ldots\,\mathrm{h}$
2.30 **1)** 2,41... h **2)** $[0{,}5; 4{,}33\ldots]$
2.31 $x_1 = 2{,}5$
2.32 Jahr 2009
2.33 **1)** $S = (400 \mid 430)$ **2)** Bei 400 produzierten Joghurtbechern sind die Gesamtkosten bei beiden Angeboten gleich groß, und zwar 430 €.
2.34 **1)** $K_1(x) = 0{,}18 \cdot x + 800$ **2)** Die Verwendung des Kaffeevollautomaten Divo ist ab einer Anzahl von 3201 Tassen günstiger.
2.35 **1)** 38,69... m **2)** $\alpha = 162{,}23\ldots^\circ$
2.36 **1)** $T \approx (1{,}09 \mid 0{,}10)$ **2)** $62{,}71\ldots^\circ$
2.37 **1)** $c = 1$ **2)** $a = 0{,}690\ldots$ **3)** $\alpha = 4{,}5^\circ$
2.38 4,348... mmol/L
2.39 **1)** $(-)0{,}3805\ldots\,\mathrm{rad} = (-)21{,}80\ldots^\circ$ **2)** $h'(x) = 0 \implies x = 120 \implies (120\,\mathrm{m} \mid 16\,\mathrm{m})$

3. UMGEKEHRTE KURVENUNTERSUCHUNGEN

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Technologieblatt – Umgekehrte Kurvenuntersuchungen

Bei manchen der folgenden SR(D)P-Aufgaben ist nur das Aufstellen eines Gleichungssystems gefragt, aber nicht dessen Lösung. Für Übungszwecke haben wir jeweils auch die Lösung des Gleichungssystems bei den Endergebnissen ergänzt.

Funktionen mit einem Parameter

3.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Heizung beginnt um 15 Uhr, einen Wohnraum zu erwärmen. Ab diesem Zeitpunkt kann die Raumtemperatur durch die Funktion T beschrieben werden.

$$T(t) = 24 - 6 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$t \ldots$ Heizdauer in h mit $t = 0$ für 15 Uhr
$T(t) \ldots$ Raumtemperatur nach der Heizdauer t in °C

1) Bestimmen Sie die Raumtemperatur um 15 Uhr.

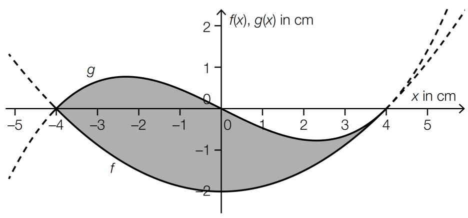
Um 16 Uhr beträgt die Raumtemperatur 21 °C.

2) Berechnen Sie den Parameter λ.

3.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nachstehenden Abbildung ist ein Firmenlogo grau markiert dargestellt.



Die untere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion f beschrieben:

$$f(x) = \frac{1}{8} \cdot x^2 - 2$$

Die obere Begrenzungslinie wird durch einen Teil des Graphen der Funktion g beschrieben:

$$g(x) = a \cdot (x^3 - 16 \cdot x) \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

An der Stelle $x = 4$ haben f und g die gleiche Steigung.

1) Berechnen Sie den Parameter a.

3.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Höhe einer Sonnenblume lässt sich in Abhängigkeit von der Zeit t in einem bestimmten Zeitintervall näherungsweise durch die Funktion h beschreiben.

$$h(t) = 6{,}2 \cdot a^t$$

t … Zeit ab dem Beobachtungsbeginn in Tagen
$h(t)$ … Höhe der Sonnenblume zur Zeit t in cm

Zur Zeit $t = 17$ beträgt die Höhe der Sonnenblume 38,6 cm.

1) Berechnen Sie a.

2) Berechnen Sie die Anzahl der Tage, in denen sich die Höhe dieser Sonnenblume jeweils vervierfacht.

3.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Auf einem horizontalen Gelände finden Bogenschießübungen statt. Für die Beschreibung der Flugbahn eines Pfeiles beim Bogenschießen wird die Bewegung der Pfeilspitze beobachtet. Die Flugbahn kann näherungsweise durch die quadratische Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ beschrieben werden.

x … horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in m
$f(x)$ … Höhe der Pfeilspitze in der horizontalen Entfernung x in m

Beim ersten Schuss beträgt der Steigungswinkel der Flugbahn im Abschusspunkt 45°.

1) Ermitteln Sie den Koeffizienten b.

3.5

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bungee-Jumping ist eine Extremsportart, bei der man von einer Absprungplattform in großer Höhe an einem elastischen Seil befestigt in die Tiefe springt.
Sabine unternimmt einen Bungeesprung. Dabei schwingt sie am Seil mehrmals auf und ab. Ihre Höhe über dem Boden in Abhängigkeit von der Zeit t wird modellhaft durch die Funktion $h\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}^+$ beschrieben.

$$h(t) = a \cdot \left(e^{-0{,}03 \cdot t} \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot t}{6}\right) + 1\right)$$

t … Zeit nach dem Absprung in s
$h(t)$ … Höhe über dem Boden zum Zeitpunkt t in m
a … positiver Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ springt Sabine von der Absprungplattform in 90 m Höhe über dem Boden in die Tiefe.

1) Berechnen Sie den Parameter a.

Die gesamte Zeitdauer, in der sich Sabine während des Bungeesprungs in einer Höhe von mehr als 70 m über dem Boden befindet, wird mit d bezeichnet.

2) Ermitteln Sie d in Sekunden.

Nach Erreichen des tiefsten Punktes wird Sabine vom Seil wieder nach oben gezogen, bevor sie erneut fällt.

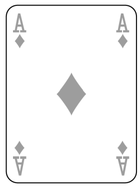
3) Berechnen Sie, wie viele Meter Sabine dabei nach oben gezogen wird.

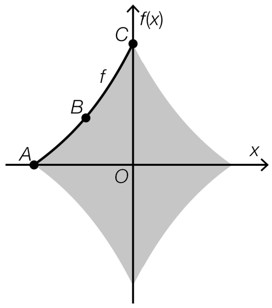
Funktionen mit mehreren Parametern

3.6

Das Karo ist ein Symbol, das zum Beispiel auf Spielkarten vorkommt.
In der nebenstehenden Abbildung ist ein Karo als graue Fläche dargestellt.
Die Begrenzungslinie der Fläche zwischen den Punkten A und C wird mithilfe der Funktion f modelliert. Die Funktion f ist eine Polynomfunktion 3. Grades mit

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d.$$





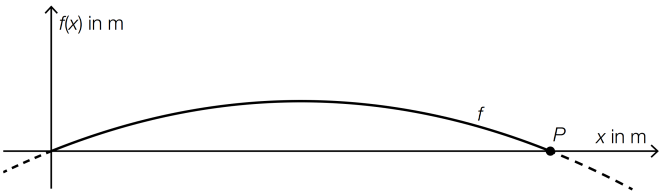
Der Graph von f verläuft durch die Punkte $A = (-4{,}2 \mid 0)$, $B = (-2 \mid 2)$ und $C = (0 \mid 5{,}2)$. Die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt B beträgt 1,2.

1) Erstellen Sie mithilfe dieser Informationen ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b, c und d.

2) Berechnen Sie a, b, c und d.

3.7

In der nachstehenden Abbildung ist das Höhenprofil einer bestimmten Straße modellhaft durch den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x$ dargestellt.



Der Graph von f verläuft durch den Punkt $P = (200 \mid 0)$.
An der Stelle $x = 0$ hat der Graph von f die Steigung 10 %.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Parameter a und b.

3.8

Die mittlere Tagestemperatur in Bregenz soll für einen bestimmten Zeitraum durch eine Polynomfunktion 3. Grades T angenähert werden:

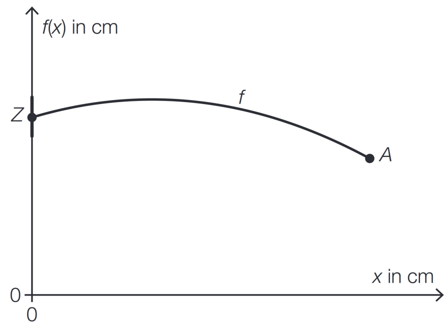
$$T(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$$

t ... Zeit in Tagen
$T(t)$ ... mittlere Tagestemperatur zur Zeit t in °C
Es wurden folgende Daten ermittelt:
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) lag die mittlere Tagestemperatur bei -5 °C.
Zur Zeit $t = 98$ Tage betrug sie 8 °C; zu dieser Zeit lag auch der Wendepunkt des Temperaturverlaufs vor.
Zur Zeit $t = 210$ Tage erreichte die mittlere Tagestemperatur 20 °C.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Ermittlung der Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

3.9

Darts ist ein Spiel, bei dem Pfeile auf eine kreisförmige Dartscheibe geworfen werden. Die nebenstehende Abbildung zeigt modellhaft die Flugbahn eines Dartpfeils zwischen dem Abwurfpunkt A und dem Zielpunkt Z. Die Flugbahn kann in diesem Modell durch den Graphen der quadratischen Funktion f beschrieben werden:



$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$x \ldots$ horizontaler Abstand zur Dartscheibe in cm
$f(x) \ldots$ Höhe über dem Boden im Abstand x in cm

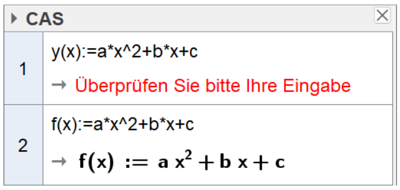
Der Zielpunkt Z befindet sich in einer Höhe von 173 cm über dem Boden.
Die größte Höhe von 182 cm über dem Boden erreicht der Pfeil an derjenigen Stelle, an der er vom Zielpunkt Z einen horizontalen Abstand von 75 cm hat.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

Funktionsname

Die Befehle $x(A)$ bzw. $y(A)$ liefern die x-Koordinate bzw. y-Koordinate vom Punkt A als Ergebnis. Als Namen für eigene Funktionen sind sie deshalb *nicht* geeignet (siehe rechts).
Wähle stattdessen einen anderen Funktionsnamen, zum Beispiel f.

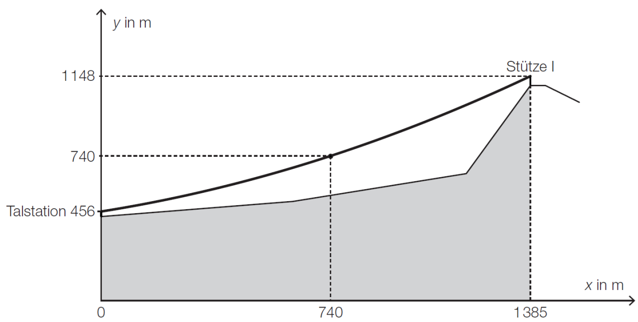


3.10

In nebenstehender Abbildung ist der Verlauf des Tragseils der Gondelbahn von St. Leonhard auf den Untersberg vereinfacht dargestellt.

Aufgrund des Eigengewichts hängt das Tragseil zwischen der Talstation und der Stütze I durch. Sein Verlauf kann näherungsweise als Graph einer quadratischen Funktion mit der Gleichung

$$y = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$



beschrieben werden (siehe nebenstehende Abbildung).

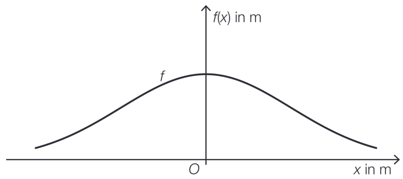
1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten a, b und c ermittelt werden können.

2) Ermitteln Sie a, b und c.

3.11

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Über Grünbrücken können wildlebende Tiere stark befahrene Verkehrswege wie z.B. Autobahnen gefahrlos überqueren. In der nebenstehenden Abbildung ist eine Grünbrücke modellhaft dargestellt.
Die Höhe der Grünbrücke kann durch die Funktion f beschrieben werden:



$$f(x) = a \cdot e^{-b \cdot x^2}$$

x, $f(x)$ ... Koordinaten in m
a, b ... positive Parameter
Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 0$ m eine Höhe von 10 m.
Die Grünbrücke hat an der Stelle $x = 20$ m eine Höhe von 6 m.

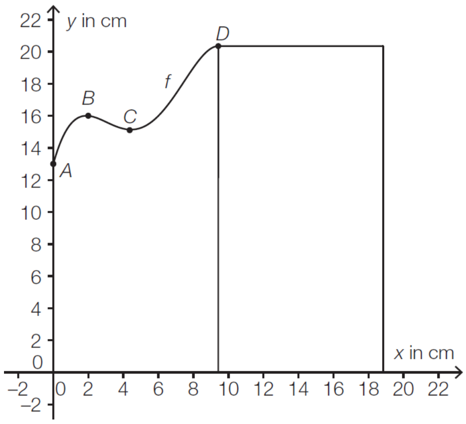
1) Geben Sie den Parameter a an.

2) Berechnen Sie den Parameter b.

3) Berechnen Sie diejenige Stelle, an der die Steigung von f am größten ist.

3.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung



Der gewellte Teil der Begrenzungslinie einer Grußkarte kann durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$$

beschrieben werden und verläuft durch folgende Punkte:

$$A = (0 \mid 13),\ B = (2 \mid 16),\ C = (4{,}36 \mid 15{,}1),\ D = (9{,}42 \mid 20{,}35)$$

Im Punkt D hat der Graph von f eine waagrechte Tangente.

1) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten dieser Polynomfunktion berechnet werden können.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten dieser Polynomfunktion.

3.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Abrissbirnen sind kugel- oder birnenförmige Werkzeuge zum Abreißen von Gebäuden.
Eine Abrissbirne kann als Körper modelliert werden, der durch Rotation des Graphen der Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ um die x-Achse entsteht.

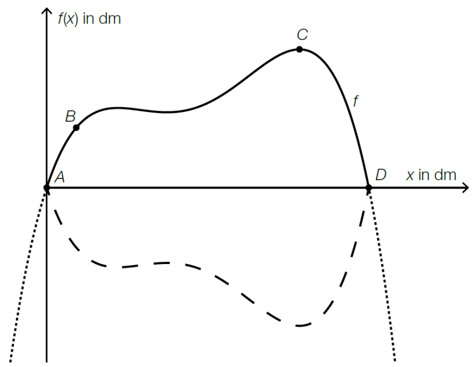
Dabei gilt:

$$A = (0 \mid 0),\ B = (1{,}1 \mid 2{,}2),\ C = (9{,}4 \mid 5{,}1),\ D = (12 \mid 0)$$

Im Punkt C hat die Abrissbirne den größten Durchmesser.

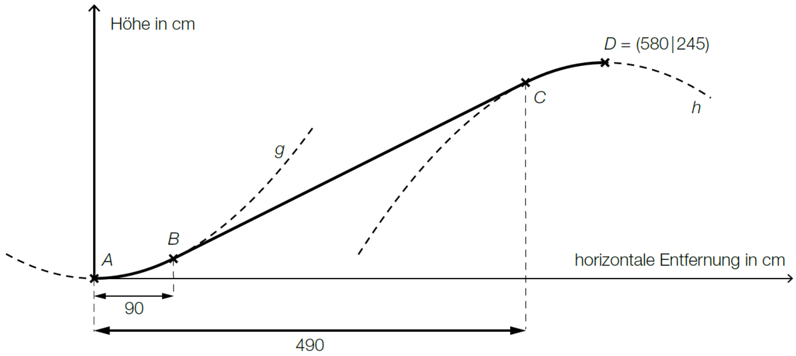
1) Erstellen Sie mithilfe der Informationen zu A, B, C und D ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Polynomfunktion f.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten von f.



3.14

Die nachstehende Abbildung zeigt den schematischen Verlauf einer Rolltreppe. Dieser Verlauf setzt sich aus 2 Parabelstücken (Graphen der Funktionen g und h) zwischen den Punkten A und B bzw. C und D sowie einem geradlinig verlaufenden Stück zwischen den Punkten B und C zusammen. Die Übergänge in den Punkten B und C erfolgen knickfrei (das bedeutet, dass die Funktionen an den Stellen, an denen sie zusammenstoßen, den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben).



Für die Funktion g gilt:

$$g(x) = \frac{1}{360} \cdot x^2$$

x ... horizontale Entfernung von der Einstiegsstelle in cm
$g(x)$ ... Höhe an der Stelle x in cm

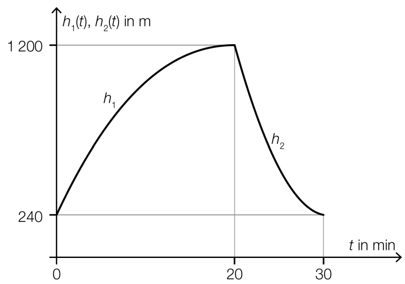
1) Zeigen Sie rechnerisch, dass die Funktion g im Punkt B eine Steigung von 50 % aufweist.

Bei der Ausstiegsstelle (Punkt D) verläuft die Rolltreppe waagrecht.

2) Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem die Koeffizienten der Funktion h mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ ermittelt werden können.

3.15

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel), in der sich ein Heißluftballon während einer bestimmten Fahrt befindet. Diese Seehöhe wird durch die Graphen der Funktionen h_1 und h_2 beschrieben.



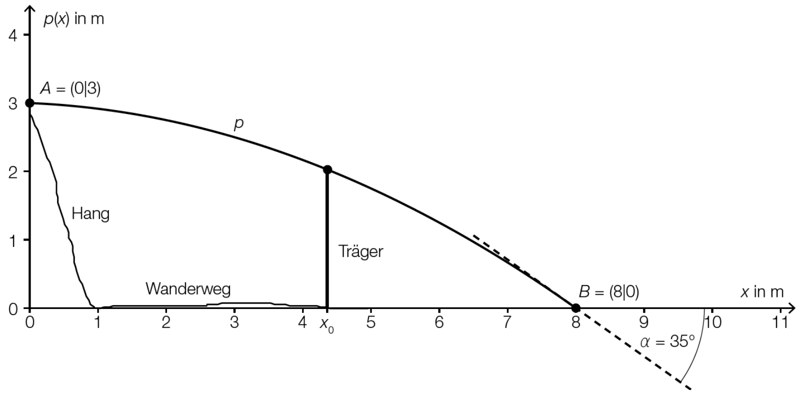
Nach 20 min befindet sich der Heißluftballon in 1200 m Seehöhe und beginnt mit dem Sinkflug. Die Höhe während des Sinkflugs wird durch den Graphen der quadratischen Funktion h_2 mit $h_2(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ beschrieben. Nach 30 min landet der Heißluftballon mit einer Sinkgeschwindigkeit von 10 m/min auf 240 m Seehöhe.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten a, b und c.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten a, b und c.

3.16

Die nachstehende Abbildung zeigt die Profillinie einer parabelförmigen Rampe, die für eine Mountainbike-Downhill-Strecke über einem Wanderweg errichtet werden soll.



Diese Profillinie kann zwischen den Punkten A und B mithilfe der quadratischen Funktion p mit

$$p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

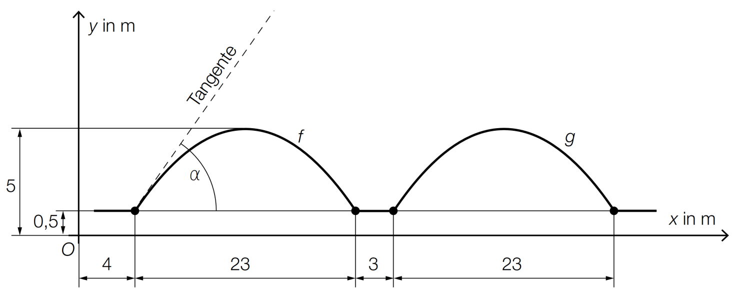
beschrieben werden.

1) Erstellen Sie unter Verwendung von A, B und α ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion p.

2) Ermitteln Sie diese Koeffizienten.

3.17

Beim Dressurreiten müssen vorgeschriebene Übungen auf dem rechteckigen Dressurplatz absolviert werden.
In der nachstehenden nicht maßstabgetreuen Abbildung ist der Weg des Pferdes bei der Übung Schlangenlinie an der langen Seite modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



Dieser Weg kann durch 3 Geradenstücke und die Graphen der quadratischen Funktionen f und g dargestellt werden.

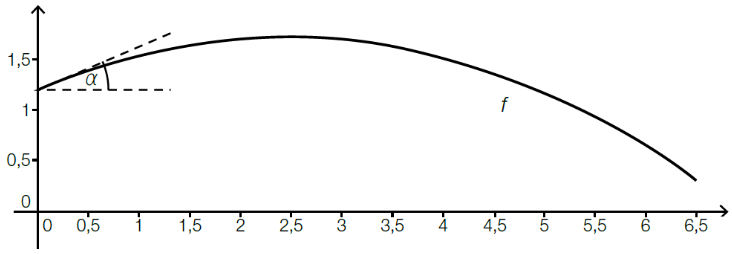
1) Stellen Sie eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf.

2) Berechnen Sie den in der obigen Abbildung dargestellten Winkel α.

3.18

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Sprungkurven beim Weitsprung lassen sich näherungsweise durch quadratische Funktionen beschreiben.
Der Körperschwerpunkt eines Weitspringers befindet sich beim Absprung in einer Höhe von 1,2 m. Der Absprungwinkel α beträgt 23°. Die Sprungweite beträgt 6,5 m. An der Stelle der Landung befindet sich der Körperschwerpunkt 30 cm über dem Boden. In der nachstehenden Abbildung ist der Graph der zugehörigen Funktion f dargestellt.



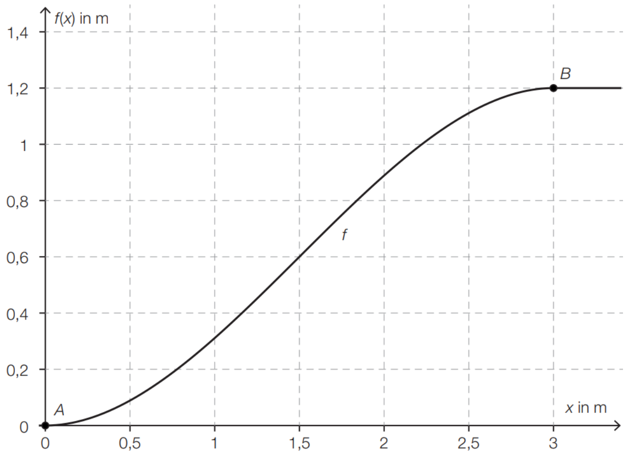
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
x ... horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m
$f(x)$ ... horizontale Entfernung des Körperschwerpunkts von der Absprungstelle in m

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung des Koeffizienten a, b und c.

3.19

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein Minigolfball soll von der horizontalen Abschlagfläche auf eine höhergelegene horizontale Plattform gerollt werden. Der Verlauf der Bahn im Querschnitt kann näherungsweise durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ beschrieben werden.



Die Bahn soll in den Punkten A und B knickfrei auf die jeweilige Ebene führen (siehe nachstehende Abbildung). Knickfrei bedeutet, dass die Funktionen an diesen Stellen den gleichen Funktionswert und die gleiche Steigung haben.

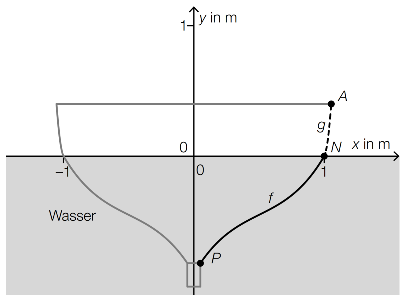
1) Geben Sie an, welche Steigung die Funktion f in den Punkten A und B haben muss.

2) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der Funktion f.

3) Berechnen Sie die Koeffizienten der Funktion f.

3.20

In der nebenstehenden Abbildung ist der zur y-Achse symmetrische Querschnitt eines Ruderboots modellhaft dargestellt.
Der Graph der Funktion f ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt P bis zum Punkt N.
Der Graph der quadratischen Funktion g ist die Begrenzungslinie des Querschnitts vom Punkt N bis zum Punkt A.
Für die Funktion f gilt:



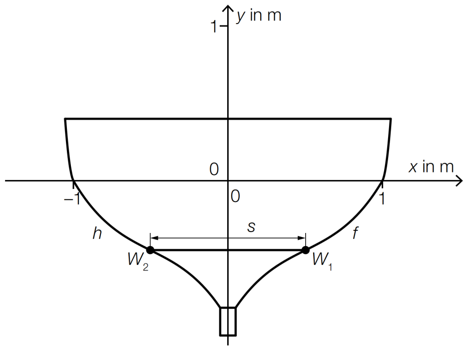
$$f(x) = 1{,}6 \cdot x^3 - 2{,}4 \cdot x^2 + 1{,}7 \cdot x - 0{,}9$$

a) Im Punkt $N = (1 \mid 0)$ haben die Funktionen f und g die gleiche Steigung.
Der Graph von g verläuft durch den Punkt $A = (1{,}05 \mid 0{,}35)$.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten der quadratischen Funktion g.

2) Berechnen Sie die Koeffizienten von g.

b) In der nebenstehenden Abbildung sind der Wendepunkt W_1 der Funktion f sowie der Wendepunkt W_2 der zu f symmetrischen Funktion h eingezeichnet.
Zwischen den Punkten W_1 und W_2 soll eine horizontale Verbindung s angebracht werden.



1) Berechnen Sie mithilfe der Funktion f die Länge von s.

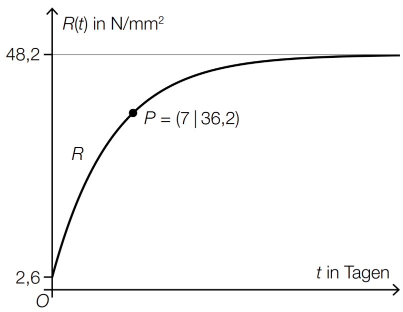
3.21

Beim Bau des Stuttgarter Fernsehturms wurde Beton verwendet. Die mittlere Druckfestigkeit des Betons in Abhängigkeit von der Trocknungszeit kann durch die Funktion R beschrieben werden.

$$R(t) = a - b \cdot c^t$$

$t \dots$ Trocknungszeit in Tagen
$R(t) \dots$ mittlere Druckfestigkeit bei der Trocknungszeit t in N/mm²
a, b, $c \dots$ Parameter

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph von R dargestellt.



1) Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung die Parameter a und b an.

$a =$ ____________ $b =$ ____________

2) Berechnen Sie mithilfe der obigen Abbildung den Parameter c.

3.22

Durch das Rauchen von Zigaretten gelangt Nikotin in den Körper und wird dort abgebaut. Die zeitliche Entwicklung der Nikotinmenge im Körper kann durch die Funktion N beschrieben werden.

$$N(t) = N_0 \cdot a^t$$

t ... Zeit seit dem Konsum der letzten Zigarette in h
$N(t)$ ... Nikotinmenge im Körper zur Zeit t in mg
N_0, a ... positive Parameter

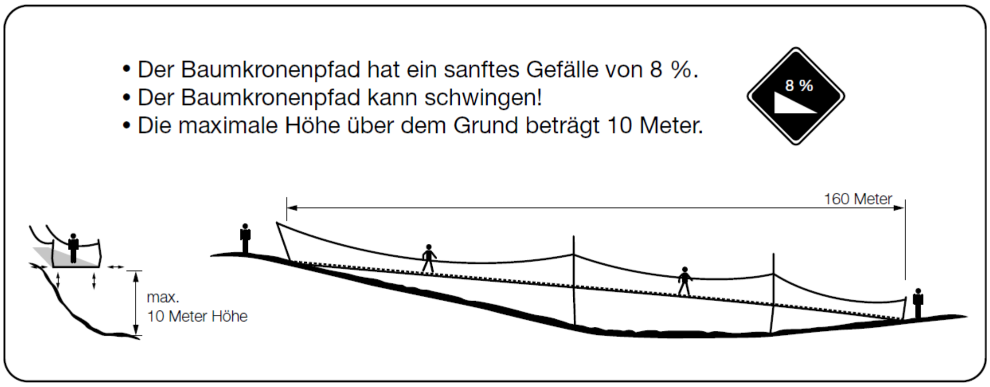
Für eine bestimmte Person gilt: Unmittelbar nach dem Konsum der letzten Zigarette ($t = 0$) befinden sich 20 mg Nikotin im Körper. 2 h später befinden sich noch 9,5 mg Nikotin im Körper.

1) Ermitteln Sie den Parameter a.

2) Berechnen Sie die Halbwertszeit für den Abbau von Nikotin bei dieser Person.

3.23

Der Baumkronenpfad ist eine Brückenstrecke durch einen Teil des Schönbrunner Tiergartens.



Auf dem Schild zum Baumkronenpfad ist zu lesen: „Die maximale Höhe über dem Grund beträgt 10 Meter.“ Diese maximale Höhe wird in einer horizontalen Entfernung von 90 m vom Startpunkt erreicht.
In 40 m horizontaler Entfernung vom Startpunkt beträgt die Höhe 8 m.
Die horizontale Entfernung zwischen Startpunkt und Endpunkt beträgt 160 m.
Im Anfangspunkt und im Endpunkt ist die Höhe 0 m.
Die Höhe über dem Grund abhängig von der horizontalen Entfernung vom Startpunkt soll näherungsweise mithilfe einer Polynomfunktion 4. Grades h mit $h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ beschrieben werden.

1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem, mit dem die Koeffizienten dieser Funktion berechnet werden können.

3.1 **1)** 18 °C **2)** $\lambda = 0{,}693...$

3.2 $a = \frac{1}{32} = 0{,}031\,25$

3.3 **1)** $a = 1{,}1135...$ **2)** 12,88... Tage

3.4 $b = 1$

3.5 **1)** $a = 45$ **2)** $d = 4{,}289...$ **3)** 69,095... m

3.6 **1)** $f(-4{,}2) = 0,\ f(-2) = 2,\ f(0) = 5{,}2,\ f'(-2) = 1{,}2$

2) $a = \frac{41}{2541} = 0{,}0161...,\ b = \frac{3361}{12705} = 0{,}2645...,\ c = \frac{5246}{2541} = 2{,}0645...,\ d = \frac{26}{5} = 5{,}2$

3.7 **1)** $\mathrm{I}:\ f(200) = 0,\ \mathrm{II}:\ f'(0) = 0{,}1$ **2)** $a = -0{,}0005,\ b = 0{,}1$

3.8 **1)** $\mathrm{I}: T(0) = -5,\ \mathrm{I}: T(98) = 8,\ \mathrm{I}: T(210) = 20,\ T''(98) = 0$

2) $a = -8{,}676... \cdot 10^{-6},\ b = 0{,}002\,551...,\ c = -0{,}034\,01...,\ d = -5$

3.9 **1)** $\mathrm{I}:\ f(0) = 173,\ \mathrm{II}:\ f(75) = 182,\ \mathrm{I}:\ f'(75) = 0$ **2)** $a = -\frac{1}{625} = -0{,}0016,\ b = \frac{6}{25} = 0{,}24,\ c = 173$

3.10 **1)** $\mathrm{I}:\ f(0) = 456,\ \mathrm{II}:\ f(740) = 740,\ \mathrm{III}:\ f(1385) = 1148$ **2)** $a = 0{,}000\,179\,6...,\ b = 0{,}2508...,\ c = 456$

3.11 **1)** $a = 10$ **2)** $b = 0{,}001\,277...$ **3)** $x = -19{,}78...$

3.12 **1)** $f(0) = 13,\ f(2) = 16,\ f(4{,}36) = 15{,}1,\ f(9{,}42) = 20{,}35,\ f'(9{,}42) = 0$

2) $a = -0{,}012...,\ b = 0{,}266...,\ c = -1{,}722...,\ d = 3{,}981...,\ e = 13$

3.13 **1)** $f(0) = 0,\ f(1{,}1) = 2{,}2,\ f(9{,}4) = 5{,}1,\ f(12) = 0,\ f'(9{,}4) = 0$

2) $a = -0{,}0066...,\ b = 0{,}1461...,\ c = -1{,}0476...,\ d = 2{,}9843...,\ e = 0$

3.14 **1)** $g'(90) = 0{,}5 = 50\,\%$

2) $h(580) = 245,\ h'(580) = 0,\ h'(490) = 0{,}5$

3) $a = -\frac{1}{360} = -0{,}002\,77...,\ b = \frac{29}{9} = 3{,}222...,\ c = -\frac{6205}{9} = -689{,}4...$

3.15 **1)** $\mathrm{I}:\ h_2(20) = 1200\quad \mathrm{II}:\ h_2(30) = 240\quad \mathrm{III}:\ h_2'(30) = -10$ **2)** $a = 8{,}6\quad b = -526\quad c = 8280$

3.16 **1)** $p(0) = 3,\ p(8) = 0,\ p'(8) = \tan(-35°)$ **2)** $a = -0{,}040\,65...,\ b = -0{,}049\,79...,\ c = 3$

3.17 **1)** $f(x) = -0{,}0340... \cdot x^2 + 1{,}0548... \cdot x - 3{,}1748...$ **2)** $\alpha = 38{,}04...°$

3.18 **1)** $f(0) = 1{,}2,\ f'(0) = \tan(23°),\ f(6{,}5) = 0{,}3$ **2)** $a = -0{,}0866...,\ b = 0{,}4244...,\ c = 1{,}2$

3.19 **1)** f muss an der Stelle $x = 0$ und an der Stelle $x = 3$ Steigung 0 haben.

2) $\mathrm{I}:\ f(0) = 0,\ \mathrm{II}:\ f'(0) = 0,\ \mathrm{III}:\ f(3) = 1{,}2,\ \mathrm{IV}:\ f'(3) = 0$

3) $a = -\frac{4}{45},\ b = \frac{2}{5},\ c = 0,\ d = 0$

3.20 **a)** **1)** $g(1{,}05) = 0{,}35,\ g(1) = 0,\ g'(1) = f'(1)$ **2)** $a = 106,\ b = -210{,}3,\ c = 104{,}3$

b) $s = 1$ m

3.21 **1)** $a = 48{,}2,\ b = 45{,}6$ **2)** $c = 0{,}8263...$

3.22 **1)** $a = 0{,}689...$ **2)** 1,86... h

3.23 **1)** $h(0) = 0,\ h(40) = 8,\ h(90) = 10,\ h'(90) = 0,\ h(160) = 0$

2) $a = -1{,}325... \cdot 10^{-7},\ b = 0{,}000\,040\,02...,\ c = -0{,}005\,217...,\ d = 0{,}3531...,\ e = 0$

4. Integralrechnung

MmF-Materialien MmF

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Technologieblatt – Integralrechnung

Stammfunktionen

4.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Geschwindigkeitsverlauf während eines Bremsmanövers eines Autos kann näherungsweise durch die lineare Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = 20 - \frac{3}{2} \cdot t$$

t ... Zeit seit dem Beginn des Bremsmanövers in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der Steigung der Funktion v im gegebenen Sachzusammenhang.

2) Bestimmen Sie die Gleichung derjenigen Funktion s, die die Länge des zurückgelegten Weges in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt. Dabei gilt: $s(0) = 0$.

4.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für den Bau einer Bohrinsel wird Material in Fässer gefüllt und im Meer versenkt.
Die Geschwindigkeit, mit der ein Fass absinkt, lässt sich annähernd durch folgende Funktion v beschreiben:

$$v(t) = a \cdot (1 - e^{b \cdot t}) \quad \text{mit} \quad a = 18\,\text{m/s} \;\text{ und }\; b = -0{,}012\,\text{s}^{-1}$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit in Metern pro Sekunde (m/s) zum Zeitpunkt t

Der von einem Fass in der Zeit t (in Sekunden) zurückgelegte Weg in Metern kann durch eine Funktion s beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von s in Abhängigkeit von t unter der Anfangsbedingung $s(0) = 0\,\text{m}$.

4.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Das Atemvolumen einer Person in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch eine Funktion V, deren Ableitung bekannt ist, beschrieben werden:

$$V'(t) = 0{,}4 \cdot \sin(1{,}6 \cdot t)$$

t ... Zeit in Sekunden (s)
$V'(t)$ ... momentane Änderungsrate des Atemvolumens zur Zeit t in Litern pro Sekunde (L/s).

Zur Zeit $t = 0$ beträgt das Atemvolumen 2,4 L.

1) Ermitteln Sie die Funktion V.

4.4

Durch die Einnahme eines Medikaments zur Regulierung des Blutdrucks gelangen Wirkstoffe ins Blut. Die Wirkstoffmenge im Blut kann näherungsweise durch eine Funktion m beschrieben werden, deren 1. Ableitung bekannt ist:

$$m'(t) = 1{,}2 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \quad \text{mit } t \geq 0$$

t ... Zeit in min
$m'(t)$ ... momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut zur Zeit t in mg/min

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Wirkstoffmenge im Blut 10 mg.

1) Erstellen Sie eine Gleichung der Funktion m.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Wirkstoff vollständig abgebaut ist.

4.5

Die momentane Änderungsrate eines elektrischen Widerstandes in Abhängigkeit von der Temperatur wird als Empfindlichkeit des elektrischen Widerstandes bezeichnet. Im Bereich von 0 °C bis 200 °C kann die Empfindlichkeit von Nickel näherungsweise durch die Funktion R' beschrieben werden.

$$R'(\vartheta) = 0{,}55 + 0{,}0012 \cdot \vartheta$$

ϑ ... Temperatur in °C
$R'(\vartheta)$ ... Empfindlichkeit bei einer Temperatur ϑ in Ω pro °C

1) Erklären Sie, warum jede Stammfunktion von R' eine Polynomfunktion 2. Grades ist.

2) Erklären Sie, warum jede Stammfunktion von R' eine positive Krümmung aufweist.

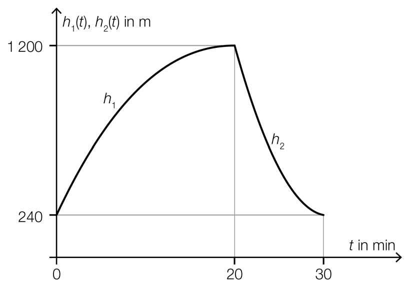
3) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von R'.

4.6

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel), in der sich ein Heißluftballon während einer bestimmten Fahrt befindet. Diese Seehöhe wird durch die Graphen der Funktionen h_1 und h_2 beschrieben.

Der Heißluftballon startet zur Zeit $t = 0$ in 240 m Seehöhe.
Für die 1. Ableitung von h_1 gilt:

$$h_1'(t) = 0{,}09 \cdot t^2 - 7{,}2 \cdot t + 108$$



1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion h_1 auf.

4.7

Ein Betrieb produziert und verkauft Taschenlampen.
Die Gesamtkosten für die Herstellung der Taschenlampen in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x können durch die differenzierbare Kostenfunktion K modelliert werden.

$x \ldots$ Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME)
$K(x) \ldots$ Gesamtkosten bei der Produktionsmenge x in Geldeinheiten (GE)

Die zugehörige Grenzkostenfunktion K' hat die Funktionsgleichung $K'(x) = 0{,}33 \cdot x^2 - 1{,}8 \cdot x + 3$.

Es gilt: $K(1) = 44{,}21$

1) Stellen Sie eine Funktionsgleichung von K auf.

$K(x) =$ ______________________________

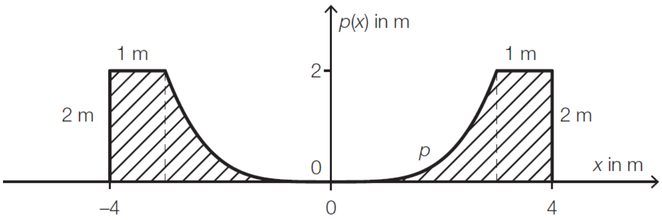
Bestimmtes Integral

4.8

Ein Skatepark ist ein speziell für Skater/innen eingerichteter Bereich mit Startrampen und verschiedenen Hindernissen, die befahren werden können.
Für eine Halfpipe soll in einem Skatepark Material aufgeschüttet werden.
Ein Teil des Verlaufs der Halfpipe im Querschnitt lässt sich annähernd durch die Funktion p beschreiben:

$$p(x) = \frac{2}{81} \cdot x^4 \quad \text{mit } -3 \leq x \leq 3$$

$x \ldots$ horizontale Koordinate in Metern (m)
$p(x) \ldots$ Höhe an der Stelle x in m
Die nachstehende Abbildung zeigt die Querschnittsfläche der Halfpipe.



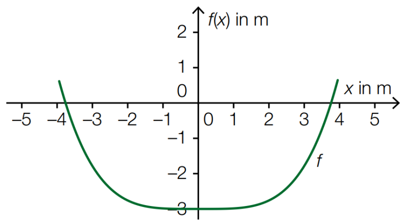
1) Ermitteln Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche.

4.9

Die Querschnittsfläche eines Kanals ist unten von einer Randkurve begrenzt, die mit der Funktion f beschrieben werden kann, wobei der Wasserspiegel genau entlang der x-Achse verläuft (siehe nachstehende Abbildung).
Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = 0{,}015 \cdot x^4 - 3$$

$x, f(x) \ldots$ in m



Das Wasser fließt mit einer Geschwindigkeit von 1,2 m/s durch den Kanal.

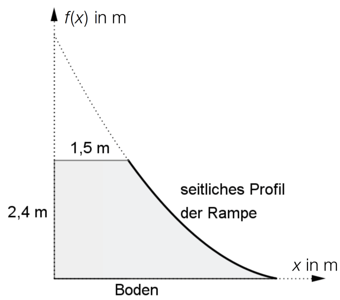
1) Berechnen Sie, wie viele Kubikmeter Wasser pro Sekunde durch den Kanalquerschnitt fließen.

4.10

Ein Unternehmen, das Skate-Parks errichtet, plant eine neue Minirampe.
Das seitliche Profil der Rampe kann durch eine Parabel 2. Ordnung modelliert werden:

$$f(x) = 0{,}2 \cdot x^2 - 2 \cdot x + 4{,}95 \quad \text{mit} \quad 1{,}5 \leq x \leq 4{,}5$$

$x \ldots$ waagrechte Entfernung von der Rückwand in Metern (m)
$f(x) \ldots$ Höhe der Rampe in Metern (m) an der Stelle x



1) Berechnen Sie den Inhalt der Querschnittsfläche einer seitlichen Abdeckung. Entnehmen Sie die dazu notwendigen Werte der Abbildung.

4.11

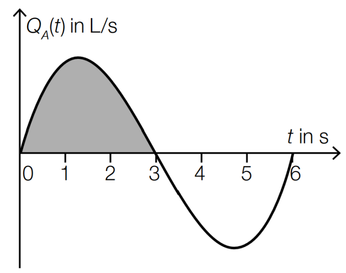
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die sogenannte *Spirometrie* ist ein Verfahren zur Beurteilung der Lungenfunktion anhand des ein bzw. ausgeatmeten Luftvolumens. Dabei wird das Luftvolumen in Abhängigkeit von der Zeit t durch die Funktion V beschrieben. Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens wird als Durchflussrate $Q(t)$ bezeichnet, also $Q(t) = V'(t)$.
Im Modell A wird die Durchflussrate durch die Funktion Q_A beschrieben:

$$Q_A(t) = a \cdot t \cdot (t - 3) \cdot (t - 6)$$

t ... Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Einatmens
$Q_A(t)$ ... Durchflussrate zur Zeit t in L/s
a ... ... Parameter

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion Q_A bei einmaligem Ein- und Ausatmen dargestellt.



1) Interpretieren Sie den Inhalt der markierten Fläche im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

Es gilt: $\int_0^3 Q_A(t)\,\mathrm{d}t = 0{,}5$

2) Ermitteln Sie den Parameter a.

4.12

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Usain Bolt im Finale des 100-Meter-Laufes der Männer. Die Silbermedaille ging an Richard Thompson. Die jeweilige Geschwindigkeit der beiden Läufer bei diesem Lauf kann durch die nachstehenden Funktionen modellhaft beschrieben werden.

$$v_B(t) = 12{,}151 \cdot (1 - e^{-0{,}684 \cdot t})$$

$$v_T(t) = 12{,}15 \cdot (1 - e^{-0{,}601 \cdot t})$$

t ... Zeit ab dem Start in s
$v_B(t)$ ... Geschwindigkeit von Usain Bolt zur Zeit t in m/s
$v_T(t)$ ... Geschwindigkeit von Richard Thompson zur Zeit t in m/s

a) Berechnen Sie die Beschleunigung von Usain Bolt 1 s nach dem Start.

Es gilt: $t_1 = 5\,\mathrm{s}$, $t_2 = 8\,\mathrm{s}$

2) Beschreiben Sie, was mit dem nachstehenden Ausdruck im gegebenen Sachzusammenhang berechnet wird.

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \cdot \int_{t_1}^{t_2} v_B(t)\,\mathrm{d}t$$

Usain Bolt überquerte die Ziellinie 9,69 s nach dem Start.

3) Ermitteln Sie, wie weit Richard Thompson von der Ziellinie entfernt war, als Usain Bolt diese überquerte.

4.13

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Kurt und sein Freund Bernd fahren mit ihren Mopeds zu einem Badesee. Auf einem Teilstück kann die Geschwindigkeit von Bernd näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$v(t) = 0{,}3 \cdot t + 0{,}8$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden (s)
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zur Zeit t in Metern pro Sekunde (m/s)

1) Berechnen Sie den Weg, der innerhalb der ersten Minute zurückgelegt wurde.

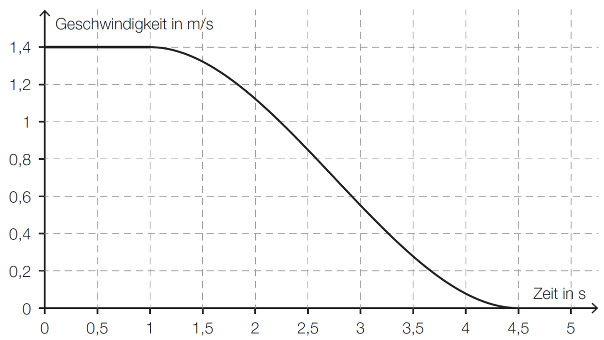
4.14

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nachstehenden Abbildung ist das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm eines Balles auf einer Minigolfbahn dargestellt. Während der ersten Sekunde hat der Ball eine konstante Geschwindigkeit. Danach kann die abnehmende Geschwindigkeit näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden:

$$v(t) = \frac{1}{245} \cdot (16 \cdot t^3 - 132 \cdot t^2 + 216 \cdot t + 243) \quad \text{mit } 1 \leq t \leq 4{,}5$$

$t \ldots$ Zeit in Sekunden (s)
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in Metern pro Sekunde (m/s)



1) Erklären Sie, was die momentane Änderungsrate der Funktion v zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 in diesem Sachzusammenhang angibt.

2) Berechnen Sie den zurückgelegten Weg des Balles in den ersten 4,5 Sekunden.

4.15

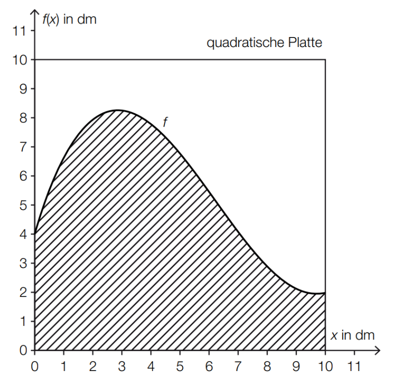
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Eine Großbank erteilt einer Druckerei den Auftrag, ihre Bankenlogos anzufertigen.
Das Logo wird auf quadratische Platten gedruckt.
Die Begrenzungslinie des Logos wird durch die Funktion f beschrieben.

$$f(x) = \frac{1}{25} \cdot x^3 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + \frac{33}{10} \cdot x + 4$$

$x, f(x) \ldots$ Koordination in dm

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt der schraffierten Fläche.



4.16

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Für den Zeitraum von 1990 bis 2010 wurden die Feinstaubemissionen in verschiedenen Bereichen aufgezeichnet. Die Feinstaubemissionswerte der Industrie lassen sich annähernd durch die Funktion E mit

$$E(t) = 2{,}5 \cdot t^2 - 50 \cdot t + 12\,500$$

beschreiben.
$t \ldots$ Zeit in Jahren nach Jahresbeginn 1990 mit $0 \leq t \leq 20$
$E(t) \ldots$ Emission zur Zeit t in Tonnen pro Jahr

F ist derjenige Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion E und der horizontalen Achse im Intervall $[0; 20]$ eingeschlossen wird.

1) Berechnen Sie den Flächeninhalt F.

2) Interpretieren Sie die Bedeutung des Flächeninhalts F im gegebenen Sachzusammenhang.

4.17

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Bremsweg ist die Länge des zurückgelegten Weges vom Beginn des Bremsvorgangs bis zum Stillstand.
Ein Fahrzeug wird bis zum Stillstand abgebremst. Die Geschwindigkeit dieses Fahrzeugs während dieses Bremsvorgangs kann durch die Funktion v beschrieben werden.

$$v(t) = 30 \cdot e^{-0{,}28 \cdot t} - 2 \quad \text{mit } t \geq 0$$

$t \ldots$ Zeit in s mit $t = 0$ für den Beginn des Bremsvorgangs
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie den Bremsweg.

4.18

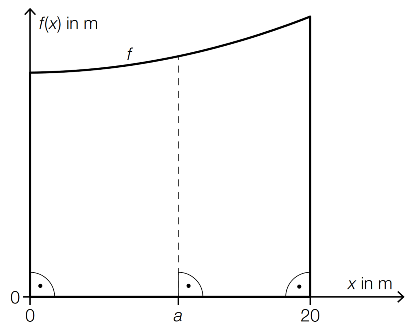
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In einem Plan ist ein Grundstück durch 3 gerade Seiten und durch den Graphen der Funktion f begrenzt (siehe nebenstehende Abbildung).

$$f(x) = 0{,}01 \cdot x^2 + 0{,}01 \cdot x + 16 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 20$$

$x,\ f(x) \ldots$ Koordinaten in m

Das Grundstück soll so halbiert werden, dass 2 Kleingärten mit gleich großem Flächeninhalt entstehen. Die Halbierung soll – wie in der nebenstehenden Abbildung dargestellt – an der Stelle a erfolgen.



1) Berechnen Sie die Stelle a.

4.19

Auf einer Teststrecke wurde die Geschwindigkeit eines Elektroautos bei einem Beschleunigungstest gemessen. Die Auswertung der Daten ergibt die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v.

$$v(t) = 50 \cdot \left(1 - e^{-0{,}1123 \cdot t}\right)$$

$t \ldots$ Zeit nach dem Start in s
$v(t) \ldots$ Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Berechnen Sie die Zeit in Sekunden, die das Elektroauto für die Beschleunigung von 40 km/h auf 100 km/h benötigt.

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt, der vom Graphen der Funktion v und der Zeitachse im Intervall $0 \leq t \leq 10$ eingeschlossen wird.

3) Interpretieren Sie diesen Flächeninhalt im gegebenen Sachzusammenhang. Geben Sie dabei die zugehörige Einheit an.

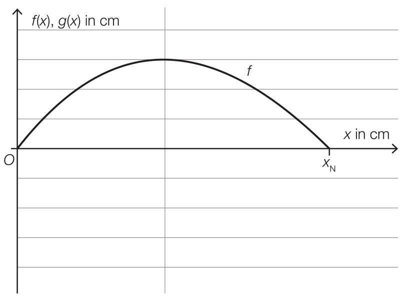
4.20

Die Form des Blattes einer Buche lässt sich in einem Koordinatensystem näherungsweise durch die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und dem Graphen der Funktion g beschreiben.

$$f(x) = 0{,}0047 \cdot x^3 - 0{,}2 \cdot x^2 + 1{,}28 \cdot x \quad \text{mit } 0 \leq x \leq x_N$$

$$g(x) = -f(x)$$

$x,\ f(x),\ g(x) \ldots$ Koordinaten in cm



In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Funktion f dargestellt.

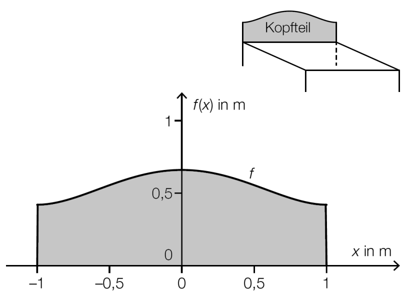
1) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der Funktion g im Intervall $[0; x_N]$ ein.

2) Berechnen Sie die Nullstelle x_N.

3) Berechnen Sie gemäß diesem Modell den Flächeninhalt dieses Blattes.

4.21

Ein Unternehmen stellt Betten aus Zirbenholz mit einem Kopfteil her.
Die nebenstehende Abbildung zeigt ein Modell des Kopfteils eines Bettes.
Die obere Begrenzungslinie kann näherungsweise durch die Funktion f beschrieben werden.



$$f(x) = 0{,}24 \cdot x^4 - 0{,}48 \cdot x^2 + 0{,}66 \quad \text{mit } -1 \leq x \leq 1$$

$x,\ f(x) \ldots$ Koordinaten in m

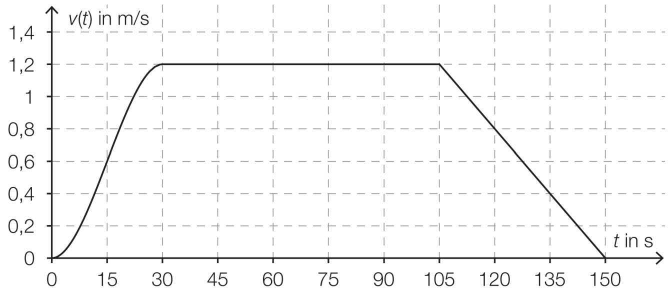
1) Berechne den Inhalt der grau markierten Fläche.

Das Kopfteil wird aus einer 50 mm dicken Platte aus Zirbenholz angefertigt. Die Dichte des verwendeten Holzes beträgt $\rho = 400\,\text{kg/m}^3$.

2) Berechne die Masse m des Kopfteils.

4.22

Vom Fußpunkt des *Torre de Collserola* (Fernsehturm in Barcelona) bis zu dessen Aussichtsplattform führt ein Aufzug senkrecht nach oben. In der nachstehenden Abbildung ist die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v bei einer Aufzugsfahrt modellhaft dargestellt.



t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zur Zeit t in m/s

Im Zeitintervall $[0;30]$ gilt für die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion v:

$$v(t) = -\frac{1}{11\,250} \cdot t^3 + \frac{1}{250} \cdot t^2 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 30$$

Die Aufzugsfahrt dauert insgesamt 150 Sekunden.

1) Berechnen Sie die Länge des Weges, der bei dieser Aufzugsfahrt insgesamt zurückgelegt wird.

4.23

Die Wassermenge in einem Schwimmbecken nimmt durch Verdunstung und durch betriebsbedingte Ursachen ab. Dabei beschreibt die Funktion $W\colon [0;10] \to \mathbb{R}$ mit

$$W(t) = -\frac{1}{96} \cdot t^3 + \frac{1}{4} \cdot t^2 - \frac{35}{24} \cdot t$$

modellhaft die momentane Änderungsrate der Wassermenge zum Zeitpunkt t an einem bestimmten Tag (t in h, $W(t)$ in m^3/h).

1) Ermitteln Sie die Abnahme der Wassermenge (in m^3) im Zeitintervall $[0;6]$.

4.24

Bettina macht eine 2-stündige Fahrradtour. Ihre Geschwindigkeit kann dabei näherungsweise durch die Funktion v beschrieben werden.

$$v(t) = -0{,}08 \cdot t^2 + 16 \quad \text{mit } 0 \leq t \leq 2$$

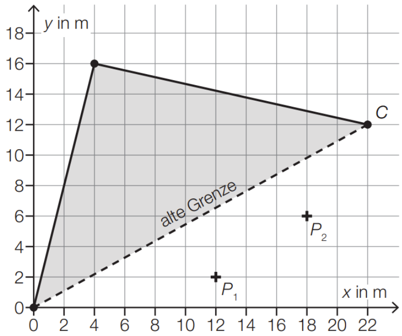
t ... Zeit in h mit $t = 0$ für den Beginn der Fahrradtour
$v(t)$ ... Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t in km/h

1) Berechnen Sie die Zeitdauer, die Bettina für die ersten 10 km dieser Fahrradtour benötigt.

2) Berechnen Sie die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t = 1$. Geben Sie auch die zugehörige Einheit an.

Flächeninhalte zwischen Funktionsgraphen

4.25



Ein dreieckiges Grundstück wird erweitert.
Die neue Grenze soll nun nicht mehr direkt vom Koordinatenursprung zum Punkt C verlaufen, sondern über die beiden markierten Punkte P_1 und P_2 (siehe nebenstehende Abbildung).
Der Verlauf dieser neuen Grenze soll durch den Graphen einer Polynomfunktion f mit

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$

beschrieben werden.

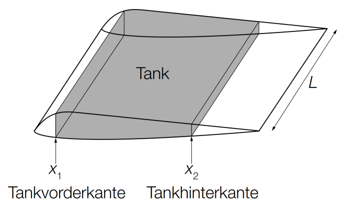
1) Erstellen Sie ein Gleichungssystem zur Berechnung der Koeffizienten von f.

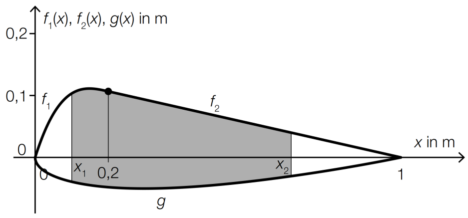
2) Berechnen Sie die Koeffizienten von f.

3) Berechnen Sie, um wie viele Quadratmeter der Flächeninhalt des Grundstücks durch die Erweiterung zunimmt.

4.26

Bei einem bestimmten Kleinflugzeug befindet sich in jedem der beiden Flügel ein Tank (siehe nebenstehende Abbildung).





Der Querschnitt eines Flügels dieses Kleinflugzeugs kann durch die Graphen der Funktionen f_1, f_2 und g modelliert werden. An der Stelle $x = 0{,}2$ geht der Graph von f_1 in den Graphen von f_2 über.

1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Inhalts A der grau markierten Fläche auf.

$$A = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Es gilt:

$f_1(x) = \frac{50}{3} \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + \frac{28}{15} \cdot x \quad$ mit $0 \leq x \leq 0{,}2$

$f_2(x) = \frac{2}{15} \cdot (1 - x) \quad$ mit $0{,}2 \leq x \leq 1$

$g(x) = 0{,}051 \cdot x^4 - 0{,}142 \cdot x^3 + 0{,}176 \cdot x^2 + 0{,}063 \cdot x - 0{,}148 \cdot \sqrt{x} \quad$ mit $0 \leq x \leq 1$

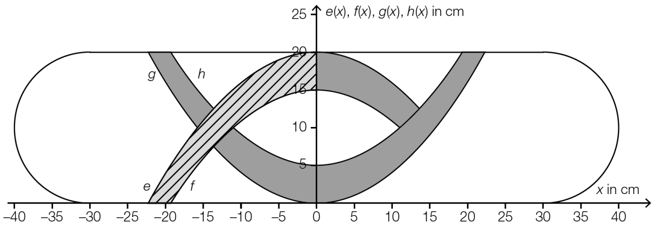
x, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ ... Koordinaten in m

$L = 5\,\text{m}$
$x_1 = 0{,}1\,\text{m}$
$x_2 = 0{,}7\,\text{m}$

2) Berechnen Sie das Volumen eines Tanks dieses Kleinflugzeugs.

4.27

Der Entwurf für das Ornament auf einem Skateboard wird in einem Koordinatensystem dargestellt:



Die markierten Farbflächen werden durch die Ränder des Skateboards und die Graphen folgender quadratischer Funktionen begrenzt:

$$e(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 20$$
$$f(x) = -0{,}04 \cdot x^2 + 15$$
$$h(x) = 0{,}04 \cdot x^2 + 5$$

$x \ldots$ horizontale Koordinate in cm
$e(x),\ f(x),\ g(x),\ h(x) \ldots$ vertikale Koordinate in cm

Der Graph der Funktion g entsteht durch Verschiebung des Graphen der Funktion h entlang der vertikalen Achse.

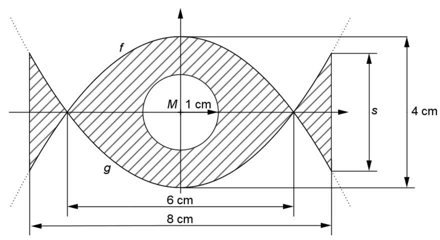
1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion g auf.

2) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Schnittpunkte der Graphen der Funktionen e und h.

3) Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Fläche.

4.28

Ein Schmuckstück wird gemäß nebenstehender Skizze in den schraffierten Teilen mit Blattgold belegt.
$x \ldots$ waagrechte Koordinate in cm
$f(x) \ldots$ Funktionswert an der Stelle x in cm
$g(x) \ldots$ Funktionswert an der Stelle x in cm



Der Koordinatenursprung des Koordinatensystems liegt im Punkt M.

Die Begrenzungslinien der Blattgoldfläche sind außen Parabeln und innen ein Kreis.
Die 1. Parabel wird durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{2}{9} \cdot x^2 + 2$$

beschrieben, die 2. Parabel durch die Funktion

$$g(x) = \frac{2}{9} \cdot x^2 - 2\,.$$

1) Berechnen Sie die Länge s.

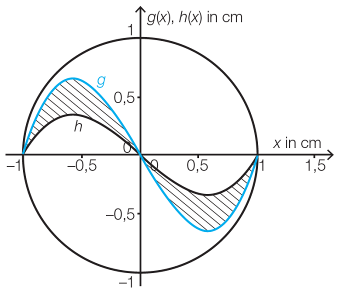
2) Berechnen Sie, wie groß die Fläche ist, die mit Blattgold belegt werden soll.

4.29

Ein Goldschmied fertigt Schmuckstücke nach kreisrunden Designvorlagen.
Die kreisrunde Designvorlage für einen Armbandanhänger wird durch die in der Abbildung veranschaulichte Fläche zwischen den beiden Funktionsgraphen von g und h geteilt.

$$h(x) = \frac{8}{9} \cdot x^3 - \frac{8}{9} \cdot x$$
$$g(x) = a \cdot h(x) \qquad \text{mit } a > 0$$

x, $g(x)$, $h(x)$ … Koordinaten in Zentimetern (cm)



1) Erklären Sie, was eine Multiplikation einer Funktion mit einem Faktor $a > 0$ bewirkt.

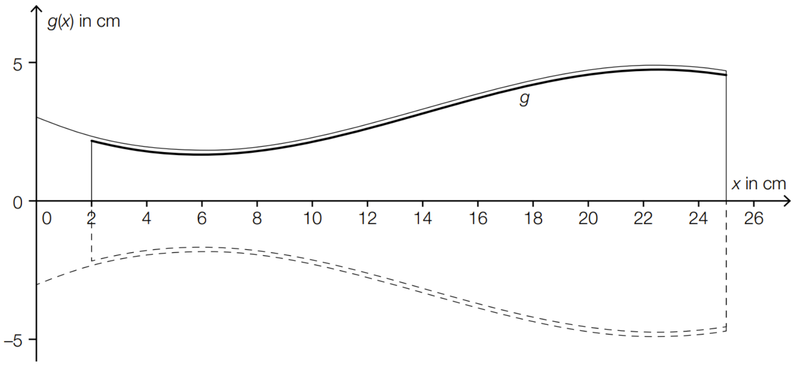
2) Begründen Sie, warum gilt: $\int_{-1}^{1} (g(x) - h(x))\, \mathrm{d}x = 0$.

3) Bestimmen Sie den Faktor a so, dass der schraffierte Flächeninhalt $0{,}4\,\text{cm}^2$ beträgt.

Rotationsvolumen

4.30

Die Form eines Weizenbierglases kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Funktion g um die x-Achse dargestellt werden (siehe nachstehende Abbildung).



Es gilt:

$$g(x) = -0{,}00108 \cdot x^3 + 0{,}046 \cdot x^2 - 0{,}4367 \cdot x + 3 \quad \text{mit } 2 \leq x \leq 25$$

x, $g(x)$ … Koordinaten in cm

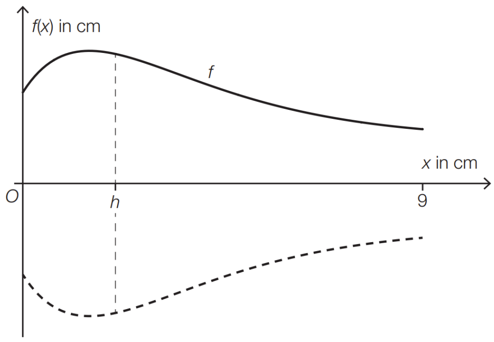
1) Berechnen Sie den kleinsten Innendurchmesser des Weizenbierglases.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Weizenbierglases in Litern.

4.31

Obstfliegen können mithilfe von Glasgefäßen eingefangen werden. Die Gefäße werden bis zu einer bestimmten Höhe mit einer Flüssigkeit befüllt, die die Obstfliegen anlocken soll. Die Obstfliegenfalle kann durch Rotation des Graphen der Funktion f um die x-Achse modelliert werden (siehe nachstehende Abbildung).

Bildquelle: BMBWF



Für die Funktion f gilt:

$$f(x) = 1 + 2{,}7 \cdot (x + 0{,}5) \cdot e^{-\frac{2 \cdot x + 1}{4}} \quad \text{für } 0 \leq x \leq 9$$

x, $f(x)$ … Koordinaten in cm

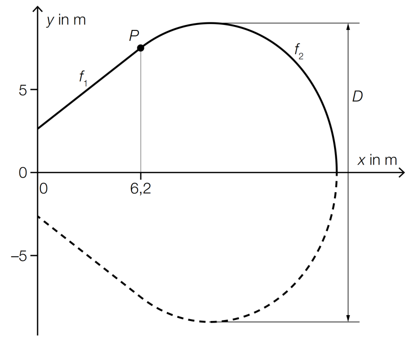
Die Obstfliegenfalle wird mit $50\,\text{cm}^3$ Flüssigkeit befüllt.
In einem Abstand h vom Boden der Obstfliegenfalle soll eine Markierung für diese Flüssigkeitsmenge angebracht werden (siehe obige Abbildung).

1) Berechnen Sie h.

4.32

Die Form eines bestimmten Heißluftballons entsteht durch Rotation der Graphen der Funktionen f_1 und f_2 um die x-Achse (siehe nebenstehende Abbildung). Für die Funktion f_2 gilt:

$$f_2(x) = \frac{5}{4} \cdot \sqrt{-x^2 + 20{,}8 \cdot x - 50{,}4}$$



1) Berechnen Sie den maximalen Durchmesser D des Heißluftballons.

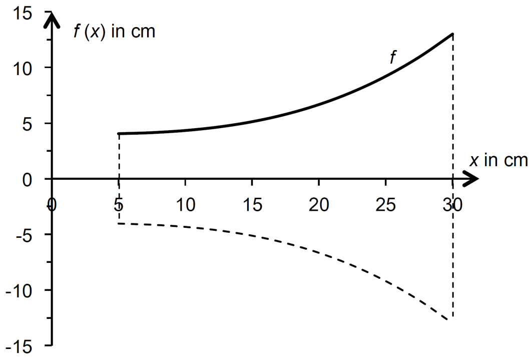
Der Graph der Funktion f_1 ist die Tangente an den Graphen der Funktion f_2 im Punkt P.

2) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f_1 auf.

3) Berechnen Sie das Volumen des Heißluftballons.

4.33

Ein Megafon ist ein trichterförmiges Gerät, das die Ausbreitung von Schall beeinflusst und die Verständlichkeit und Reichweite von Sprache verbessert.



Die nebenstehende Abbildung stellt näherungsweise den inneren Querschnitt eines Megafons dar.

Die Begrenzungslinie der Querschnittsfläche wird durch die Funktion f beschrieben:

$$f(x) = \frac{x^3}{3000} + 4 \quad \text{mit } 5 \leq x \leq 30$$

1) Berechnen Sie das Innenvolumen des Megafons.

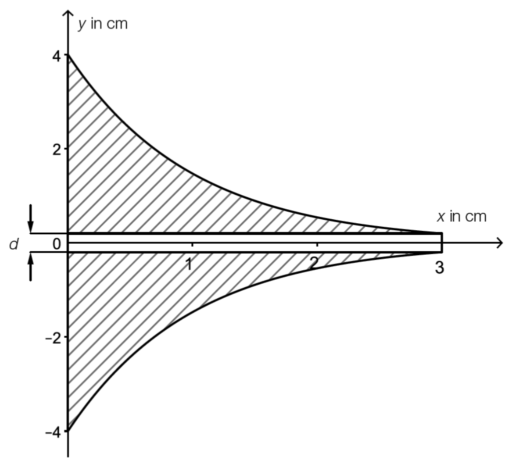
4.34

Ein Schmuckstück kann als Rotationskörper beschrieben werden, der bei einer Rotation des Graphen der folgenden Funktion im Intervall $[0; 3]$ um die x-Achse erzeugt wird:

$$y = 4 \cdot e^{-x}$$

$x, y \ldots$ Koordinaten in Zentimetern (cm)

Damit das Schmuckstück an einer Kette befestigt werden kann, musste es durchbohrt werden. So entsteht ein zylindrisches Bohrloch mit einem Durchmesser d (siehe nebenstehende Abbildung).

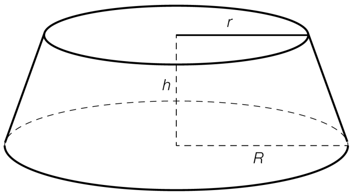


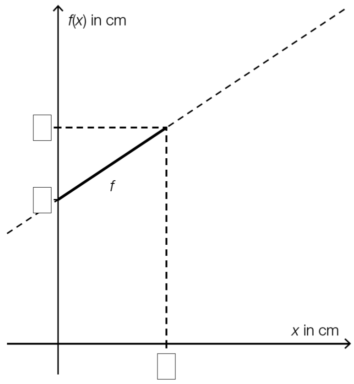
1) Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens dieses Schmuckstücks auf.

2) Berechnen Sie dieses Volumen.

4.35

Ein Händler verkauft Figuren, die auf einem Sockel aus Holz stehen. Dieser hat die Form eines Kegelstumpfes. Der dargestellte Kegelstumpf entsteht durch Rotation des Funktionsgraphen von f im Intervall $[0; h]$ um die horizontale Achse:





1) Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen h, r und R in die dafür vorgesehenen Kästchen ein.

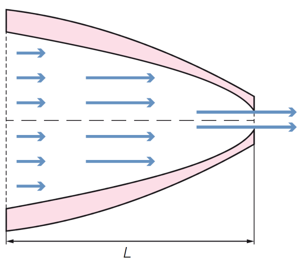
Es gilt: $h = 1{,}50\,\text{cm}$, $r = 2{,}00\,\text{cm}$ und $R = 3{,}00\,\text{cm}$.

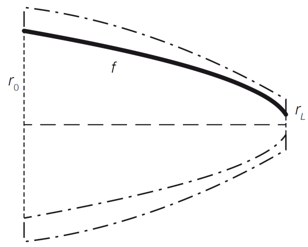
2) Stellen Sie mithilfe dieser Angaben die Gleichung der Funktion f auf.

3) Berechnen Sie das Rotationsvolumen des Kegelstumpfes mithilfe der Integralrechnung.

4.36

Die abgebildete Grafik zeigt den Längsschnitt einer rotationssymmetrischen Wasserdüse mit der Länge L.





Bei einer speziellen Düse ist der Innenradius r_0 am linken Rand der Düse 5 mm. Die Austrittsöffnung (rechts) hat einen Innenradius von $r_L = 0{,}5\,\text{mm}$. Die Länge der Düse L ist 25 mm. Die in der obenstehenden Grafik gekennzeichnete Begrenzungslinie lässt sich durch die Funktion f beschreiben:

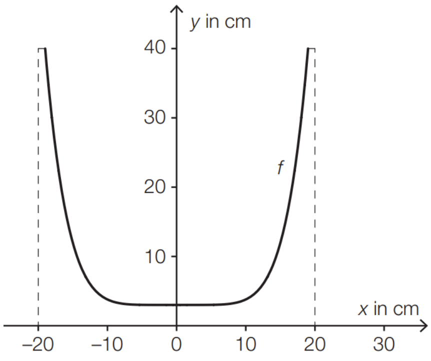
$$f(x) = \sqrt{a - b \cdot x} \quad \text{mit } 0\,\text{mm} \leq x \leq 25\,\text{mm}$$

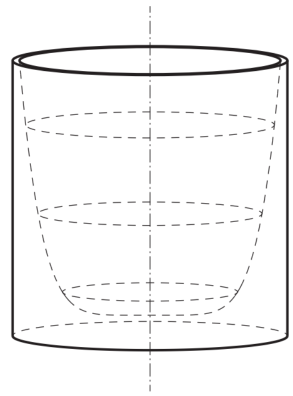
1) Berechnen Sie die Parameter a und b der Funktion f.

2) Berechnen Sie das Innenvolumen der Wasserdüse.

4.37

Ein Unternehmen produziert Blumentöpfe. Der Außendurchmesser eines solchen Blumentopfs beträgt 40 cm. Auch die Gesamthöhe des Blumentopfs beträgt 40 cm. (Siehe nachstehende Abbildung.)





Für die Funktion f mit $f(x) = y$ gilt:

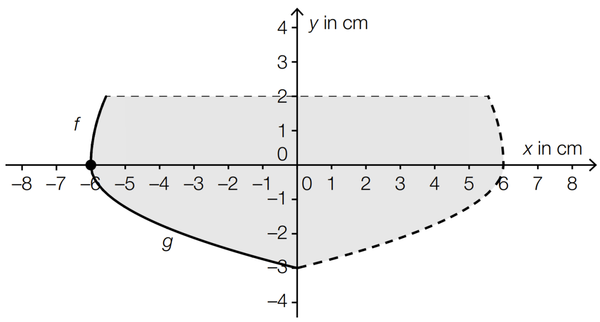
$$y = \frac{37}{19^6} \cdot x^6 + 3 \quad \text{mit } -19 \leq x \leq 19$$

Die Innenwand des Blumentopfs entsteht durch Rotation des oben dargestellten Graphen von f um die y-Achse.

1) Berechnen Sie das Innenvolumen des Blumentopfs.

4.38

Champagner wird im französischen Weinbaugebiet *Champagne* nach streng festgelegten Regeln erzeugt.
Ein Champagnerglas (ohne Stiel, Glasdicke nicht berücksichtigt) kann näherungsweise durch die Rotation des Graphen der Wurzelfunktion f und des Graphen der Wurzelfunktion g um die y-Achse beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



Für f gilt: $f(x) = 3 \cdot \sqrt{x + a}$

Für g gilt: $g(x) = -\sqrt{1{,}5 \cdot x + 9}$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung den Wert für a ab.

2) Berechnen Sie das Füllvolumen des Champagnerglases.

In das Champagnerglas werden 150 ml Champagner gefüllt.

3) Berechnen Sie die zugehörige Füllhöhe.

4.39

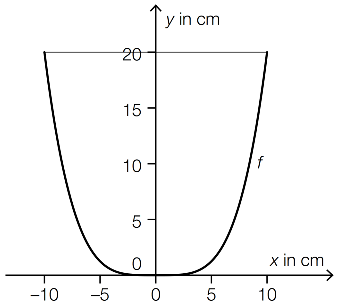
Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Abbildung ist der Querschnitt eines Topfes modellhaft dargestellt. Die Form des Topfinneren entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion f um die y-Achse.

Für f gilt: $y = \frac{1}{500} \cdot x^4$

Der Topf wird bis 5 cm unter den Rand mit Wasser befüllt. Das Volumen des eingefüllten Wassers wird als Füllvolumen V bezeichnet.

1) Berechnen Sie das Füllvolumen V.



4.40

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Form eines Wassergefäßes kann durch Rotation des Graphen der Funktion mit folgender Gleichung um die y-Achse beschrieben werden:

$$y = 0{,}000\,142\,1 \cdot x^4 \qquad \text{mit} \quad x \geq 0$$

x, y ... Längen in cm

Der obere Rand des Gefäßes hat einen Radius von 30 cm.

Das Gefäß wird bis zum oberen Rand gefüllt.

1) Berechnen Sie das Volumen in Litern.

Bogenlänge / Linearer Mittelwert

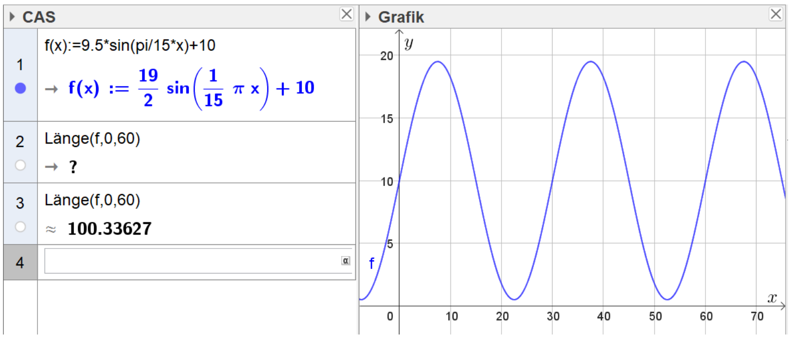
Bogenlänge des Graphen einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ MmF

Die Formel für die Bogenlänge

$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x$$

kann man in GeoGebra mit dem Befehl Länge(<Funktion>, <Startwert>, <Endwert>) aufrufen.

Häufig lässt sich aber dieses bestimmte Integral nicht exakt, sondern nur numerisch ermitteln:



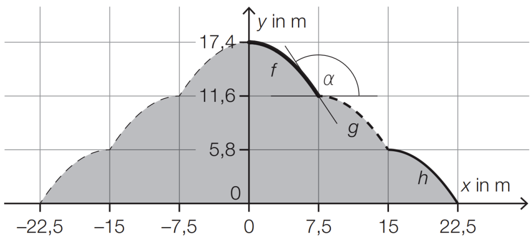
Verwende im CAS daher die numerische Berechnung ≈ oder gib den Länge-Befehl in die Eingabezeile ein.

4.41

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Auf der Insel Mainau steht ein besonderes Gewächshaus.
Die nachstehende Abbildung zeigt die Vorderseite des Gewächshauses in einem Koordinatensystem.
Die Vorderseite ist dabei symmetrisch zur y-Achse.

Bildquelle: BMBWF



Die Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{87}{5} - \frac{116}{1125} \cdot x^2 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 7{,}5$$

An der Stelle $x = 7{,}5$ schließt die Tangente an den Graphen von f mit der horizontalen Tangente an den Graphen von g den stumpfen Winkel α ein (siehe obige Abbildung).

1) Berechnen Sie den Winkel α.

Die in der obigen Abbildung eingezeichneten Graphen der Funktionen f, g und h haben jeweils die gleiche Länge.

2) Berechnen Sie den Umfang der grau markierten Fläche.

4.42

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Im Computerspiel Angry Birds muss man mithilfe einer Schleuder Schweine treffen. Als Wurfgeschoße stehen verschiedene Vögel zur Verfügung. Einige dieser Vögel haben besondere Funktionen, die durch einen Mausklick ausgelöst werden können. Koordinaten bzw. Abstände sind im Folgenden in Längeneinheiten (LE) angegeben. Die Flugparabel des Vogels Red bei einem Wurf kann durch den Graphen der Funktion f beschrieben werden:

$$f(x) = -0{,}1 \cdot x^2 + 0{,}9 \cdot x + 1 \qquad \text{mit} \quad x \geq 0$$

$x \ldots$ horizontale Entfernung vom Abschusspunkt in Längeneinheiten (LE)
$f(x) \ldots$ Flughöhe des Vogels über dem horizontalen Boden an der Stelle x in LE

Red trifft kein Schwein und prallt auf den Boden auf.

1) Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung vom Abschusspunkt der Vogel auf dem Boden aufprallt.

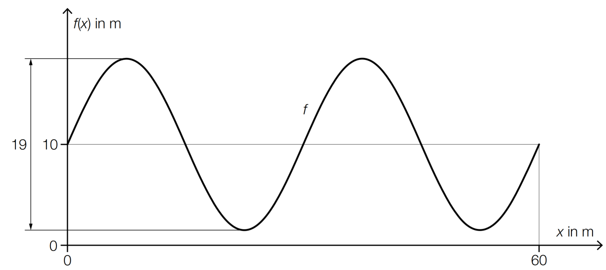
Der Weg, den der Vogel vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden zurücklegt, entspricht der Länge der Kurve zwischen diesen Punkten.

2) Berechnen Sie den vom Vogel zurückgelegten Weg vom Abschusspunkt bis zum Aufprall am Boden.

4.43

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nebenstehenden Abbildung ist der Weg des Pferdes bei der Übung *Schlangenlinien durch die ganze Bahn* modellhaft in der Ansicht von oben dargestellt.



$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d \quad$ mit $\; 0 \leq x \leq 60$
$x,\ f(x) \ldots$ Koordinaten in m
$a,\ b,\ c,\ d \ldots$ Parameter
$a > 0,\ b > 0$

1) Lesen Sie aus der obigen Abbildung die Parameter a und d ab.

$a =$ ______________________

$d =$ ______________________

2) Geben Sie die Parameter b und c an.

$b =$ ______________________

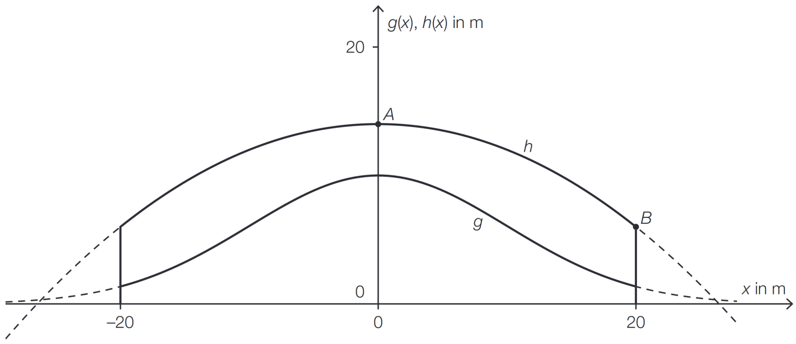
$c =$ ______________________

3) Berechnen Sie die Länge desjenigen Weges, den das Pferd entlang des Graphen der Funktion f zurücklegt.

4.44

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Über Grünbrücken können wildlebende Tiere stark befahrene Verkehrswege wie z.B. Autobahnen gefahrlos überqueren. Als Geländer einer Grünbrücke ist eine Betonmauer geplant.
Die obere und die untere Begrenzungslinie der Betonmauer (in der Seitenansicht) können im Intervall $[-20; 20]$ näherungsweise durch den Graphen der Funktion h und den Graphen der Funktion g beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).



1) Kennzeichnen Sie in der obigen Abbildung diejenige Fläche, deren Inhalt mit dem nach stehenden Ausdruck berechnet werden kann.

$$\int_0^{20} h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{20} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Die Funktion h ist eine Polynomfunktion 2. Grades.
Der Scheitelpunkt von h ist $A = (0 \mid 14)$. Weiters verläuft h durch den Punkt $B = (20 \mid 6)$.

2) Ermitteln Sie die Koeffizienten der Funktion h.

3) Berechnen Sie die Länge des Graphen von h im Intervall $[-20; 20]$.

4.45

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Pac-Man ist ein Videospiel, das 1980 veröffentlicht wurde. Die Spielfigur Pac-Man muss Punkte in einem Labyrinth fressen, während sie von Gespenstern verfolgt wird.

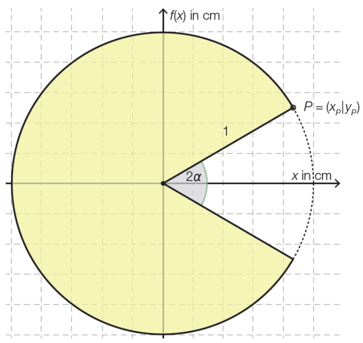


Abbildung 1: Pac-Man

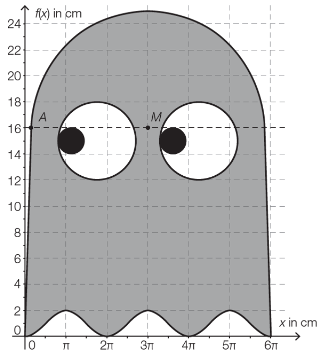


Abbildung 2: Gespenst

In Abbildung 2 wird ein Gespenst durch 4 Funktionen im Intervall $[0; 6\pi]$ dargestellt. Der Punkt A hat die Koordinaten $(0{,}5 \mid 16)$. Der Kopf wird durch einen Halbkreis dargestellt. Die Seitenlinien entsprechen 2 Geraden.

1) Stellen Sie eine mögliche Winkelfunktion f für die dargestellte Wellenlinie auf.

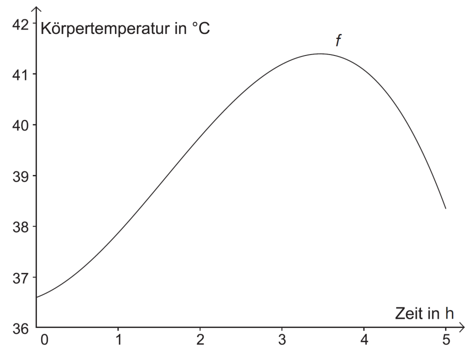
2) Berechnen Sie die Länge der äußeren Umrisslinie der dargestellten Figur.

4.46

Bei einem Therapieverfahren wird die Körpertemperatur bewusst stark erhöht (künstliches Fieber).

Die nebenstehende Grafik dokumentiert näherungsweise den Verlauf des künstlichen Fiebers bei einer solchen Behandlung.

Die Funktion f beschreibt den Zusammenhang zwischen Zeit und Körpertemperatur:



$$f(t) = -0{,}18 \cdot t^3 + 0{,}85 \cdot t^2 + 0{,}6 \cdot t + 36{,}6$$

$t \ldots$ Zeit in Stunden (h) mit $0 \leq t \leq 5$

$f(t) \ldots$ Körpertemperatur zur Zeit t in °C

1) Berechnen Sie die mittlere Körpertemperatur $\bar{f}$ im Intervall $[0; 5]$.

4.1 **1)** Das Auto hat die konstante Beschleunigung $-1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$ (bzw. Bremsverzögerung von $1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$).
Oder: Pro Sekunde wird das Auto um 1,5 m/s langsamer.

2) $s(t) = 20 \cdot t - \frac{3}{4} \cdot t^2$

4.2 $s(t) = 18 \cdot t + 1500 \cdot e^{-0{,}012 \cdot t} - 1500$

4.3 $V(t) = -0{,}25 \cdot \cos(1{,}6 \cdot t) + 2{,}65$

4.4 **1)** $m(t) = -30 \cdot e^{-0{,}04 \cdot t} - 0{,}1 \cdot t + 40$ **2)** 399,9... min

4.5 **1)** Beim Differenzieren einer Polynomfunktion sinkt ihr Grad um 1.
$R'(\vartheta)$ ist eine lineare Funktion. $\Longrightarrow$ $R(\vartheta)$ ist eine quadratische Funktion.
2) $R''(\vartheta) = 0{,}0012 > 0 \Longrightarrow R$ hat positive Krümmung **3)** $R(\vartheta) = 0{,}55 \cdot \vartheta + 0{,}0006 \cdot \vartheta^2 + c$

4.6 $h_1(t) = 0{,}03 \cdot t^3 - 3{,}6 \cdot t^2 + 108 \cdot t + 240$

4.7 $K(x) = 0{,}11 \cdot x^3 - 0{,}9 \cdot x^2 + 3 \cdot x + 42$

4.8 $6{,}4\,\mathrm{m^2}$

4.9 Pro Sekunde fließen 21,66... $\mathrm{m^3}$ durch den Kanal.

4.10 $A = 6{,}3\,\mathrm{m^2}$

4.11 **1)** Der Flächeninhalt entspricht dem (in den ersten 3 Sekunden) eingeatmeten Luftvolumen in Litern.

2) $a = \frac{2}{81} = 0{,}0246\ldots$

4.12 **1)** 4,193... $\mathrm{m/s^2}$

2) Es wird die mittlere Geschwindigkeit (in m/s) von Usain Bolt im Zeitintervall $[5; 8]$ berechnet.

3) 2,423... m

4.13 588 m

4.14 **1)** Die momentane Änderungsrate der Funktion v zum Zeitpunkt t_0 ist $v'(t_0) = a(t_0)$, also die Beschleunigung zum Zeitpunkt t_0.

2) Zurückgelegter Weg: $s = 1{,}4 + s(4{,}5) - s(1) = 3{,}85\,\mathrm{m}$

4.15 $55\,\mathrm{dm^2}$

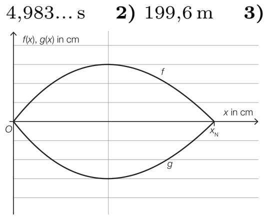
4.16 **1)** $F = 246\,666{,}6\ldots\,\mathrm{t}$ **2)** Die Emission von Feinstaub betrug im Zeitraum 1990 bis 2010 insgesamt 246 666,6... t.

4.17 80,65... m

4.18 $a = 10{,}61\ldots$

4.19 **1)** 4,983... s **2)** 199,6 m **3)** Das Elektroauto legt im Zeitintervall $[0; 10]$ insgesamt 199,6 m zurück.

4.20 **1)**



2) $x_N = 7{,}84\ldots\,\mathrm{cm}$ **3)** 23,30... $\mathrm{cm^2}$

4.21 **1)** $1{,}096\,\mathrm{m^2}$ **2)** 21,92 kg

4.22 135 m

4.23 $11{,}625\,\mathrm{m^3}$

4.24 **1)** 0,62... h **2)** $-0{,}16\,\mathrm{km/h^2}$

4.25 **1)** I : $f(0) = 0$, II : $f(12) = 2$, III : $f(18) = 6$, IV : $f(22) = 12$

2) $a = \frac{1}{396} = 0{,}002\,52\ldots$, $b = -\frac{19}{396} = -0{,}0479\ldots$, $c = \frac{25}{66} = 0{,}378\ldots$, $d = 0$

3) $62{,}7\ldots\ \text{m}^2$

4.26 **1)** $A = \int_{x_1}^{0,2} (f_1(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_{0,2}^{x_2} (f_2(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$ **2)** $0{,}3693\ldots\ \text{m}^3$

4.27 **1)** $g(x) = 0{,}04 \cdot x^2$ **2)** $(13{,}69\ldots \mid 12{,}5)$, $(-13{,}69\ldots \mid 12{,}5)$ **3)** $A = 104{,}49\ldots\ \text{cm}^2$

4.28 **1)** $s = 3{,}11\ldots\ \text{cm}$ **2)** $A = 15{,}82\ldots\ \text{cm}^2$

4.29 **1)** Die Multiplikation mit einem Faktor $a > 0$ bewirkt eine Streckung/Stauchung des Graphen in vertikaler Richtung um den Faktor a.

2) Die Fläche unterhalb der x-Achse ist gleich groß wie die Fläche oberhalb der x-Achse. Der orientierte Flächeninhalt ist daher 0.

3) $a = 1{,}9$

4.30 **1)** $3{,}60\ldots\ \text{cm}$ **2)** $0{,}678\ldots\ \text{L}$

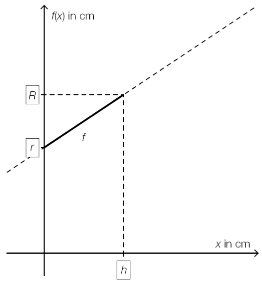
4.31 $h = 2{,}04\ldots\ \text{cm}$

4.32 **1)** $D = 19\ \text{m}$ **2)** $f_1(x) = 0{,}8288\ldots \cdot x + 2{,}778\ldots$ **3)** $3106{,}1\ldots\ \text{m}^3$

4.33 $V = 4042{,}36\ldots\ \text{cm}^3$

4.34 **1)** $V = \pi \cdot \int_0^3 \left(4 \cdot e^{-x}\right)^2 \mathrm{d}x - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 3$ mit $\frac{d}{2} = 4 \cdot e^{-3}$ **2)** $V = 24{,}696\ldots\ \text{cm}^3$

4.35 **1)**



2) $f(x) = \dfrac{1}{1{,}5} \cdot x + 2$

3) $V = 29{,}845\ldots\ \text{cm}^3$

4.36 **1)** $a = 25$, $b = 0{,}99$ **2)** $V = 991{,}56\ldots\ \text{mm}^3$

4.37 $31\,471{,}6\ldots\ \text{cm}^3$

4.38 **1)** $a = 6$ **2)** $215{,}2\ldots\ \text{ml} + 180{,}9\ldots\ \text{ml} = 396{,}2\ldots\ \text{ml}$ **3)** $2{,}724\ldots\ \text{cm}$

4.39 $2720{,}6\ldots\ \text{cm}^3$

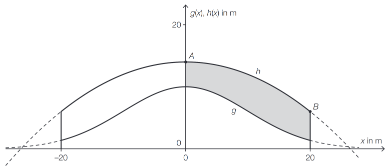
4.40 $V = 216{,}96\ldots\ \text{L}$

4.41 **1)** $\alpha = 122{,}8\ldots^\circ$ **2)** $104{,}19\ldots\ \text{m}$

4.42 **1)** Aufprall bei $x = 10\ \text{LE}$ **2)** Zurückgelegter Weg: $11{,}51\ldots\ \text{LE}$

4.43 **1)** $a = 9{,}5$, $d = 10$ **2)** $b = \frac{\pi}{15}$, $c = 0$ bzw. $c = 2 \cdot k \cdot \pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ **3)** $100{,}33\ldots\ \text{m}$

4.44 **1)**



2) $h(x) = -0{,}02 \cdot x^2 + 14$ **3)** $43{,}92\ldots\ \text{m}$

4.45 **1)** Zum Beispiel: $f(x) = \cos(x + \pi) + 1$ oder $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ **2)** $U = 82{,}974\ldots\ \text{cm}$

4.46 $t = 39{,}55\ldots\ ^\circ\text{C}$

5. Interpolation und Regression

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Interpolation und Regression

Interpolation

5.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe über dem Meeresspiegel (Seehöhe) ab. Der Zusammenhang kann durch Exponentialfunktionen oder näherungsweise durch lineare Funktionen beschrieben werden. Zu Beginn des Jahres 2013 wurden im Schigebiet Kaprun-Kitzsteinhorn folgende Werte für den Luftdruck gemessen:

Seehöhe	Luftdruck
990 m	1040 hPa
1980 m	930 hPa

1) Bestimmen Sie mithilfe eines linearen Modells aus diesen Daten den Luftdruck in einer Höhe von 1300 m über dem Meeresspiegel.

5.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Jeden Tag werden naturbelassene Flächen für unterschiedliche Zwecke verbaut.
Im Jahr 2013 wurde in Österreich täglich durchschnittlich eine Fläche von 15 Hektar neu verbaut.
Im Jahr 2017 wurde in Österreich täglich durchschnittlich eine Fläche von 12,4 Hektar neu verbaut.
Die zeitliche Entwicklung der Fläche, die in Österreich täglich durchschnittlich neu verbaut wird, kann modellhaft durch die lineare Funktion f beschrieben werden.

$t\ldots$ Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2013
$f(t)\ldots$ täglich durchschnittlich neu verbaute Fläche zur Zeit t in Hektar

1) Stellen Sie eine Gleichung der Funktion f auf.

Die täglich durchschnittlich neu verbaute Fläche soll auf 2 Hektar reduziert werden.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit gemäß diesem Modell diese Vorgabe erfüllt ist.

5.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein neues, kostenloses Spiel für Smartphones verbreitet sich rasant. Eine Woche nach Erscheinen haben 700 Smartphonebesitzer/innen dieses Spiel heruntergeladen. Eine Woche später sind es bereits 1900. Nehmen Sie an, dass die Verbreitung dieses Spiels mithilfe eines exponentiellen Wachstums beschrieben werden kann.

1) Erstellen Sie eine zugehörige exponentielle Wachstumsfunktion f mit:

$$f(t) = c \cdot e^{k\cdot t}$$

$t\ldots$ Zeit in Wochen ab dem Erscheinen des Spiels
$f(t)\ldots$ Anzahl der Smartphonebesitzer/innen, die das Spiel bis zum Zeitpunkt t heruntergeladen haben

5.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Der zeitliche Verlauf der Temperatur einer Suppe kann durch die Exponentialfunktion T modelliert werden.

$$T(t) = a \cdot b^t$$

$t \ldots$ Zeit in min
$T(t) \ldots$ Temperatur zur Zeit t in °C
a, $b \ldots$ positive Parameter

Zum Zeitpunkt $t = 0$ beträgt die Temperatur der Suppe 80 °C.
Nach 45 min beträgt die Temperatur der Suppe 6 °C.

1) Berechnen Sie, nach wie vielen Minuten die Temperatur der Suppe 37 °C beträgt.

5.5

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bei der Herstellung von Käse werden verschiedene Enzyme verwendet.
Die Masse eines bestimmten Enzyms nimmt mit der Zeit exponentiell ab.
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) betrug die Masse 0,19 μg, nach 15 Wochen betrug die Masse 0,06 μg.
Die Masse des Enzyms in μg soll in Abhängigkeit von der Zeit t in Wochen näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden.

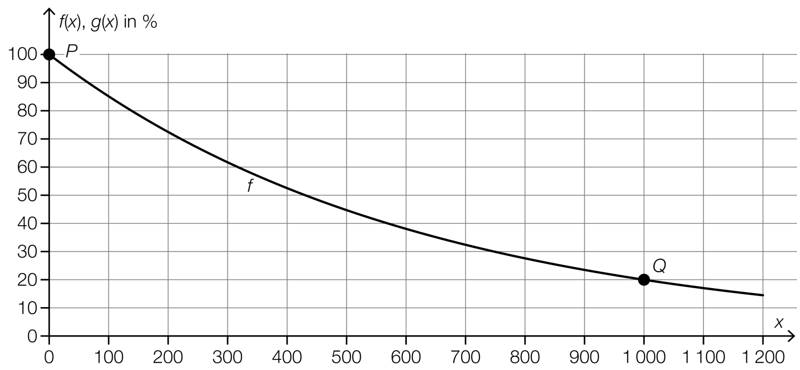
1) Stellen Sie eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf.

5.6

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Auf einer Straße wird Auftausalz gestreut. Durch den nachfolgenden Verkehr nimmt die Salzmenge auf der Straße allerdings wieder ab.
Die Salzmenge auf der Straße in Prozent der gestreuten Salzmenge hängt von der Anzahl der Fahrzeuge, die die Straße befahren, ab. Sie kann näherungsweise durch die Exponentialfunktion f beschrieben werden (siehe nachstehende Abbildung).

$x \ldots$ Anzahl der Fahrzeuge
$f(x) \ldots$ Salzmenge auf der Straße nach x Fahrzeugen in %



1) Stellen Sie mithilfe der Punkte P und Q eine Gleichung der Exponentialfunktion f auf.

2) Berechnen Sie, nach wie vielen Fahrzeugen die Salzmenge auf der Straße auf 10 % der gestreuten Salzmenge gesunken ist.

5.7

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Obstanbaufläche in Österreich ist in den letzten Jahrzehnten zurückgegangen. Im Jahr 1960 betrug die Obstanbaufläche rund 28 000 Hektar (ha). Im Jahr 2005 betrug die Obstanbaufläche rund 15 000 ha.
Die Entwicklung der Obstanbaufläche lässt sich für diesen Zeitraum näherungsweise durch die Exponentialfunktion A beschreiben.

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

$t \ldots$ Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1960
$A(t) \ldots$ Obstanbaufläche zur Zeit t in ha
A_0, $k \ldots$ Parameter

1) Ermitteln Sie die Parameter A_0 und k.

5.8

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In der nachstehenden Tabelle ist für bestimmte Kalenderjahre die Schätzung der Weltbevölkerung (jeweils zur Jahresmitte) angegeben.

Kalenderjahr	Weltbevölkerung in Milliarden
1850	1,260
1900	1,650
1950	2,536
1960	3,030
1970	3,700
1990	5,327
2000	6,140
2010	6,957
2020	7,790

Datenquellen: https://de.statista.com/statistik/daten/studie/1694/umfrage/entwicklung-der-weltbevoelkerungszahl/,
https://www.statistik.at/web_de/statistiken/menschen_und_gesellschaft/bevoelkerung/internationale_uebersich/036446.html
[17.05.2020].

Ab 1970 kann die Entwicklung der Weltbevölkerung näherungsweise durch eine lineare Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Werte für die Weltbevölkerung der Kalenderjahre 1970 und 2000 eine Funktionsgleichung von f in Abhängigkeit von der Zeit t auf (t in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 1970, $f(t)$ in Milliarden).

2) Berechnen Sie, um wie viel Prozent der mithilfe von f ermittelte Wert für das Kalenderjahr 2020 vom in der obigen Tabelle angegebenen Wert abweicht.

Lineare Regression

5.9

Die nachstehende Tabelle zeigt die Preisentwicklung für ein bestimmtes Rasenmähroboter-Modell.

Zeit ab Beginn des Jahres 2015 in Monaten	3	6	12	18	24	36	48
Verkaufspreis in €	1 204	1 199	1 137	1 089	1 032	985	889

Der Verkaufspreis soll in Abhängigkeit von der Zeit t durch die lineare Funktion p beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion p auf. Wählen Sie $t = 0$ für den Beginn des Jahres 2015.

2) Berechnen Sie, nach welcher Zeit der Rasenmähroboter gemäß der linearen Funktion p einen Verkaufspreis von € 700 hat.

5.10

Der Zusammenhang zwischen der Absprunggeschwindigkeit und der Sprungweite soll untersucht werden. Es wird vermutet, dass die Sprungweite linear von der Absprunggeschwindigkeit abhängt.
Es stehen folgende Messdaten zur Verfügung:

Absprunggeschwindigkeit in km/h	88,0	89,9	90,2	91,2	91,5	91,9	92,5
Sprungweite in m	110,0	112,5	113,7	115,8	116,6	118,7	120,0

1) Bestimmen Sie für diese Datenpaare eine Gleichung der linearen Regressionsfunktion.

2) Interpretieren Sie den Wert der Steigung dieser Regressionsfunktion im gegebenen Sachzusammenhang.

5.11

Bei hochwertigen Federgabeln (siehe nebenstehendes Foto) wird eine mit Luft gefüllte Kammer zur Federung verwendet. Der erforderliche Druck (in der Einheit psi) hängt von der Masse des Fahrers (in kg) ab (siehe nachstehende Tabelle).

Masse des Fahrers in kg	55	70	80	90	100
erforderlicher Druck in psi	115	165	200	230	265

Bildquelle: BMBWF

Der erforderliche Druck soll in Abhängigkeit von der Masse des Fahrers näherungsweise durch die lineare Funktion p beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion p auf.

Ein bestimmter Fahrer hat eine Masse von 82 kg.
Er berechnet einen Wert für den erforderlichen Druck durch lineare Interpolation mit den Werten der obigen Tabelle bei 80 kg und 90 kg. Den so erhaltenen Wert vergleicht er mit demjenigen Wert, der sich bei Verwendung der linearen Funktion p ergibt.

2) Ermitteln Sie die Differenz dieser beiden Werte.

5.12

Wien betreibt das fünftgrößte Straßenbahnnetz weltweit und das fünftgrößte U-Bahn-Netz in der Europäischen Union. Seit 1995 steigt die Zahl der Passagiere ständig an.

Jahr	2002	2005	2008	2011
Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen	722,4	746,8	803,7	875,0

Es wird angenommen, dass der Zusammenhang zwischen der Zeit t in Jahren und der Fahrgastzahl der Wiener Linien in Millionen pro Jahr näherungsweise durch eine lineare Funktion beschrieben werden kann. **1)** Ermitteln Sie eine Gleichung der zugehörigen linearen Regressionsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2002. **2)** Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für die Fahrgastzahl im Jahr 2018.

5.13

Ein Unternehmen bringt einen neuen E-Reader auf den Markt. Die nebenstehende Tabelle beschreibt die Entwicklung der Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader in einer bestimmten Region.
Betrachtet man nur die 5 Zahlenpaare im Zeitintervall $[3; 7]$, so zeigt sich ein annähernd linearer Verlauf.

1) Ermitteln Sie die Regressionsgerade für das Zeitintervall $[3; 7]$.

2) Interpretieren Sie die Steigung dieser Regressionsgeraden im Sachzusammenhang.

Zeit in Wochen	Anzahl der insgesamt (von Anfang an) verkauften E-Reader
1	179
2	364
3	674
4	981
5	1 310
6	1 700
7	2 055
8	2 280
9	2 470
10	2 500
11	2 540
12	2 545

5.14

Jedes Jahr im Frühjahr findet die CeBIT, die Messe für Informationstechnik, in Hannover statt. Die folgende Tabelle zeigt die Besucherzahlen (in 1000) von 2004 bis 2013:

2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013
510	480	450	480	495	400	334	339	312	280

1) Ermitteln Sie unter Annahme eines linearen Zusammenhangs der Daten die entsprechende Ausgleichsfunktion. Wählen Sie $t = 0$ für das Jahr 2004.

2) Erklären Sie die Bedeutung des Vorzeichens des Korrelationskoeffizienten.

3) Berechnen Sie, wie viele Besucher/innen aufgrund dieses Modells im Jahr 2015 erwartet werden können.

5.15

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Bei den Olympischen Sommerspielen 2008 in Peking siegte Tirunesh Dibaba im Finale des 10 000-Meter-Laufes der Frauen. In der nachstehenden Tabelle sind einige Distanzen und die zugehörigen Zwischenzeiten für die erste Hälfte des Laufes angegeben.

Distanz in m	1000	2000	3000	4000	5000
Zeit in s	180,5	360,2	543,8	726,6	910,0

Datenquelle: https://sportsscientists.com/2008/08/beijng-2008-10000-m-women/ [15.12.2020].

Die Zeit soll in Abhängigkeit von der Distanz durch eine lineare Regressionsfunktion beschrieben werden.

1) Ermitteln Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung dieser linearen Funktion.

Tirunesh Dibaba benötigte für diesen 10 000-Meter-Lauf insgesamt 29 min 54,66 s.

2) Berechnen Sie den Betrag des relativen Fehlers, wenn zur Berechnung der Laufzeit von Tirunesh Dibaba die ermittelte Regressionsfunktion verwendet wird.

5.16

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Von 9 zufällig ausgewählten Mädchen einer Altersgruppe wurden die Oberarmlänge und die Körpergröße gemessen:

Körpergröße in cm	165	164	166	159	163	170	158	168	172
Oberarmlänge in cm	34,5	34,7	34,6	34,0	34,5	35,0	33,8	34,9	34,9

Die Oberarmlänge soll in Abhängigkeit von der Körpergröße näherungsweise durch die lineare Funktion g beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der linearen Funktion g auf.

2) Beurteilen Sie mithilfe des Korrelationskoeffizienten, ob die lineare Funktion g ein geeignetes Modell zur Beschreibung dieser Abhängigkeit ist.

3) Interpretieren Sie den Wert der Steigung der linearen Funktion g im gegebenen Sachzusammenhang.

Nichtlineare Regression

5.17

Ein Thermistor oder Heißleiter ist ein Halbleiter, dessen elektrischer Widerstand R mit zunehmender Temperatur T abnimmt.
Für einen bestimmten Heißleiter wurden die nebenstehenden Werte gemessen.
Zur weiteren Auswertung wird eine Polynomfunktion 3. Grades als Ausgleichsfunktion verwendet.

T in K	R in Ω
293	510
313	290
333	178
353	120
373	80

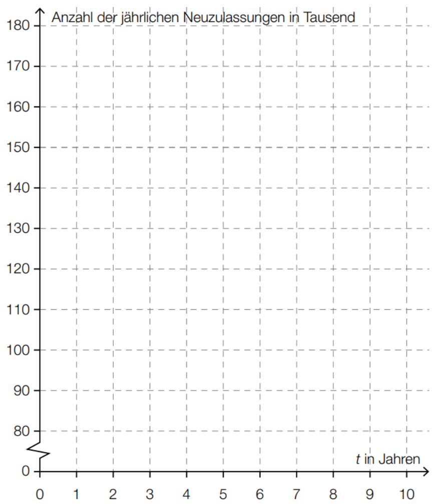
1) Ermitteln Sie diese Ausgleichsfunktion.

5.18

In der nachstehenden Tabelle sind die jährlichen Neuzulassungen von benzinbetriebenen Personenkraftwagen (PKW) in Österreich in den Jahren 1999 bis 2009 dargestellt.

t in Jahren (t = 0 entspricht dem Jahr 1999)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Anzahl der jährlichen Neuzulassungen in Tausend	134	118	101	85	86	91	108	116	120	132	171

(Quelle: STATISTIK AUSTRIA, gerundete Werte http://www.statistik.at/web_de/statistiken/energie_umwelt_innovation_mobilitaet/verkehr/strasse/kraftfahrzeuge_-_neuzulassungen/index.html [22.03.2016])



1) Stellen Sie im Diagramm den Graphen derjenigen quadratischen Regressionsfunktion dar, der die Anzahl der jährlichen Neuzulassungen in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt.

Im Jahr 2010 wurden 160 000 benzinbetriebene PKW neu zugelassen.

2) Berechnen Sie, wie groß die prozentuelle Abweichung der mithilfe der Regressionsfunktion aufgestellten Prognose vom tatsächlichen Wert ist.

5.19

Die Beobachtung einer Bakterienkultur ergab folgende Daten:

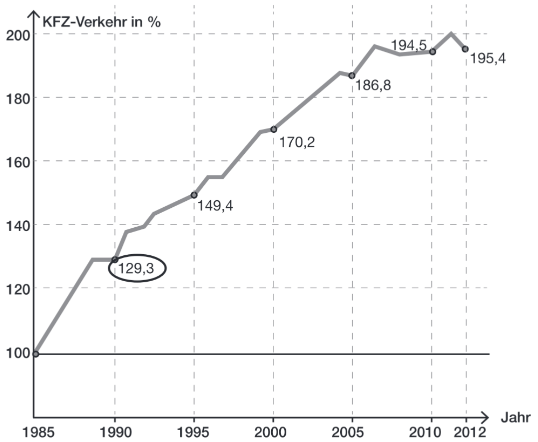
Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Anzahl der Bakterien	110	120	156	185	190	245	274	340	360	430

1) Ermitteln Sie die Gleichung der exponentiellen Ausgleichsfunktion, die die Bakterienanzahl in Abhängigkeit von der Zeit nach Beginn der Beobachtung näherungsweise beschreibt.

2) Berechnen Sie mithilfe der Ausgleichsfunktion, wie viele Minuten nach Beginn der Beobachtung 1000 Bakterien zu erwarten sind.

5.20

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung



Das Verkehrsaufkommen wird seit vielen Jahren statistisch erfasst. Die Grafik zeigt die Entwicklung des KFZ-Verkehrs von 1985 bis 2012 in Tirol.

1) Interpretieren Sie die Bedeutung der in der Grafik markierten Zahl 129,3 in diesem Sachzusammenhang.

2) Erstellen Sie basierend auf den Daten der Grafik eine quadratische Regressionsfunktion. Wählen Sie dabei für das Jahr 1985 den Zeitpunkt $t = 0$.

3) Ermitteln Sie mithilfe dieser Regressionsfunktion eine Prognose für den KFZ-Verkehr im Jahr 2013.

5.21

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

An einem Tag im Oktober hat man einen Temperaturverlauf gemessen, der durch eine Polynomfunktion 3. Grades f mit $f(t) = a \cdot t^3 + b \cdot t^2 + c \cdot t + d$ angenähert werden kann.
$t \ldots$ Zeit nach Mitternacht in Stunden
$f(t) \ldots$ Temperatur zum Zeitpunkt t in °C

t	2	5	8	11	14	17	20	23
$f(t)$	5,4	4,3	8,3	12,2	15,3	14	9,1	7,2

1) Erstellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine zu den angegebenen Werten passende Polynomfunktion 3. Grades. (Runden Sie dabei die Koeffizienten auf 4 Nachkommastellen.)

5.22

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Das Flussbett der Donau verändert sich ständig. Die Seehöhe (Höhe über dem Meeresspiegel) an einer bestimmten Stelle des Flussbetts wurde wiederholt gemessen. Die Messwerte sind in der nebenstehenden Tabelle dargestellt.

Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren	Seehöhe des Flussbetts in m
0	142,0
20	141,7
35	141,6
45	141,2
52	141,0

Die Seehöhe des Flussbetts soll in Abhängigkeit von der Zeit durch die quadratische Funktion f beschrieben werden.

1) Stellen Sie mithilfe der Regressionsrechnung eine Gleichung der quadratischen Funktion f auf.
$t \ldots$ Zeit seit Beginn des Jahres 1950 in Jahren
$f(t) \ldots$ Seehöhe des Flussbetts zur Zeit t in m

2) Ermitteln Sie mithilfe der quadratischen Funktion f die Seehöhe des Flussbetts zu Beginn des Jahres 2010.

5.1 1005,5... hPa

5.2 **1)** $f(t) = -0{,}65 \cdot t + 15$ **2)** nach 20 Jahren (im Jahr 2033)

5.3 $f(t) = 257{,}89... \cdot e^{0{,}998\,52...\cdot t}$

5.4 13,39... min

5.5 $f(t) = 0{,}19 \cdot 0{,}926...^{t}$ bzw. $f(t) = 0{,}19 \cdot e^{-0{,}0768...\cdot t}$

5.6 **1)** $f(x) = 100 \cdot 0{,}998\,39...^{x}$ bzw. $f(x) = 100 \cdot e^{-0{,}001\,609...\cdot x}$ **2)** nach rund 1431 Fahrzeugen

5.7 $A_0 = 28\,000$ $k = 0{,}013\,87...$

5.8 **1)** $f(t) = 0{,}081\,33... \cdot t + 3{,}7$ **2)** 0,0029... %

5.9 **1)** $p(t) = -7{,}043... \cdot t + 1224{,}3...$ **2)** 74,4... Monate

5.10 **1)** $f(x) = 2{,}269... \cdot x - 90{,}57...$
x ... Absprunggeschwindigkeit in km/h
$f(x)$ ... Sprungweite bei einer Absprunggeschwindigkeit x in m

2) Steigt die Absprunggeschwindigkeit um 1 km/h, dann steigt die Sprungweite gemäß diesem Modell um rund 2,3 m.

5.11 **1)** $p(m) = 3{,}32 \cdot m - 67{,}3$ (Koeffizienten gerundet) m ... Masse des Fahrers in kg $p(m)$ ... Druck bei der Masse m in psi
2) 1,040... psi

5.12 **1)** $f(t) = 17{,}15... \cdot t + 709{,}7...$ **2)** 984,2... Millionen Fahrgäste im Jahr 2018

5.13 **1)** $V(t) = 348{,}1 \cdot t - 396{,}5$ t ... Zeit in Wochen $V(t)$ ... Anzahl der bis zur Zeit t insgesamt verkauften E-Reader

2) In diesem Zeitraum werden nach diesem Modell pro Woche rund 348 Stück verkauft.

5.14 **1)** $f(t) = -26{,}26... \cdot t + 526{,}2$ t ... Zeit in Jahren mit $t = 0$ für das Jahr 2004 $f(t)$ ... Besucheranzahl (in 1000) zur Zeit t

2) $r = -0{,}9286...$ Das negative Vorzeichen von r bedeutet, dass die lineare Ausgleichsfunktion fallend ist.

3) 237 267 Besucher/innen.

5.15 **1)** $f(x) = 0{,}182\,54 \cdot x - 3{,}4$ x ... Distanz in m $f(x)$ ... Zeit bei der Distanz x in s **2)** 0,0152... = 1,52... %

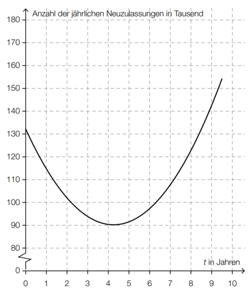
5.16 **1)** $g(x) = 0{,}082 \cdot x + 20{,}98$ (Koeffizienten gerundet) x ... Körpergröße in cm $g(x)$ ... Oberarmlänge bei der Körpergröße x in cm

2) Da der Korrelationskoeffizient $r = 0{,}935...$ nahe bei 1 liegt, kann ein starker positiver linearer Zusammenhang zwischen der Körpergröße und der Oberarmlänge bei Mädchen dieser Altersgruppe vermutet werden.

3) Nimmt die Körpergröße um 1 cm zu, so nimmt die Oberarmlänge gemäß diesem Modell um 0,082 cm zu.

5.17 $P(T) = -9{,}073... \cdot 10^{-4} \cdot T^3 + 0{,}9780... \cdot T^2 - 353{,}2... \cdot T + 4{,}286... \cdot 10^4$

5.18 $f(t) = 2{,}321... \cdot t^2 - 19{,}74... \cdot t + 132{,}1...$
Die Prognose ist um 22,4... % größer als der tatsächliche Wert.



5.19 **1)** $f(t) = 69{,}43... \cdot e^{0{,}030\,65...\cdot t} = 69{,}43... \cdot 1{,}0311...^{t}$
t ... Zeit nach Beginn der Beobachtung in Minuten $f(t)$ ... Bakterienanzahl zur Zeit t

2) Rund 87 Minuten nach Beginn der Beobachtung sind 1000 Bakterien zu erwarten.

5.20 **1)** 129,3 bedeutet, dass der Verkehr im Jahr 1990 gegenüber dem Jahr 1985 um 29,3 % zugenommen hat.

2) $r(t) = -0{,}0939... \cdot t^2 + 6{,}114... \cdot t + 99{,}93...$

3) $r(28) = 197{,}5...$ %
Die Regressionsfunktion prognostiziert für 2013 ein KFZ-Verkehrsaufkommen, das um rund 97,4 % größer ist als 1985.

5.21 $f(t) = -0{,}0057 \cdot t^3 + 0{,}1446 \cdot t^2 - 0{,}2598 \cdot t + 4{,}4186$

5.22 **1)** $f(t) = -0{,}000\,276\,2... \cdot t^2 - 0{,}004\,205 \cdot t + 141{,}9...$ **2)** 140,73... m

6. Statistische Auswertungen

Statistische Auswertungen (Liste von Einzelwerten)

Statistische Auswertung einer Liste von Einzelwerten:

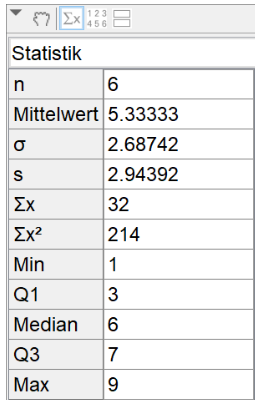
1) Tabellen-Ansicht öffnen und alle Werte eingeben

2) Alle Werte markieren und auswählen (Analyse einer Variablen)

3) Daten kontrollieren und Analyse auswählen

4) Mit Klick auf Σx (siehe rechts) werden die wichtigsten Kenngrößen angezeigt:

n	Stichprobenumfang
Mittelwert	Stichprobenmittelwert $\bar{x}$
σ	Standardabweichung s einer Datenliste
s	Stichprobenstandardabweichung s_{n-1}
Min	kleinster Wert $x_{\min}$
Q1	unteres Quartil q_1
Median	Median q_2
Q3	oberes Quartil q_3
Max	größter Wert $x_{\max}$


Statistik

n	6
Mittelwert	5.33333
σ	2.68742
s	2.94392
Σx	32
Σx²	214
Min	1
Q1	3
Median	6
Q3	7
Max	9

Statistische Auswertungen (Daten mit Häufigkeiten)

Statistische Auswertung von Daten mit Häufigkeiten:

1) Tabellen-Ansicht öffnen und alle Paare (Datenwert, Häufigkeit) in 2 Spalten eingeben

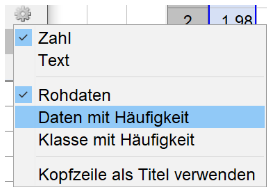
2) Nur die Spalte mit den Datenwerten markieren und auswählen

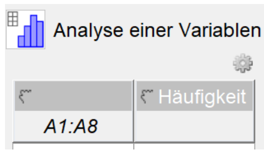
3) Im geöffneten Fenster rechts oben das Zahnrad und „Daten mit Häufigkeit“ auswählen (siehe rechts)

4) Nur die Spalte mit den Häufigkeiten markieren und auf das Handsymbol links von „Häufigkeit“ klicken (siehe rechts)

5) Daten kontrollieren und Analyse auswählen

6) Mit Klick auf Σx werden die wichtigsten Kenngrößen angezeigt.





6.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

In einer Schule werden die Oberarmlängen von Mädchen und Burschen einer bestimmten Altersgruppe erhoben. Die Daten einer Stichprobe von 6 Mädchen sind in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Oberarmlänge in cm	35,8	36,9	37,6	37,8	36,0	37,0

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} für die Oberarmlänge der Mädchen dieser Stichprobe.

6.2

Kinder erlernen normalerweise in den ersten 24 Lebensmonaten das freie Gehen.
In der nachstehenden Tabelle sind die Ergebnisse einer Befragung aufgelistet.

	Kind 1	Kind 2	Kind 3	Kind 4	Kind 5	Kind 6	Kind 7	Kind 8	Kind 9
erstes Auftreten des freien Gehens in Lebensmonaten	12	15	14	13	9	12	16	11	17

1) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der Daten aus der Tabelle.

2) Erstellen Sie auf Basis der Daten aus der Tabelle einen Boxplot.

3) Interpretieren Sie die Bedeutung der Quartile in diesem Zusammenhang.

6.3

Das Ergebnis einer Befragung von 50 Personen zur Schlafdauer ist in der nachstehenden Tabelle angegeben.

Schlafdauer in Stunden	6	7	8	9	10
Anzahl der Personen	3	16	20	10	1

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Schlafdauer dieser 50 Personen.

6.4

In einer Glaserei werden 3-eckige Fensterscheiben zugeschnitten.
In der nebenstehenden Tabelle sind die Flächeninhalte einer Produktionsserie bestimmter Fensterscheiben angegeben.

1) Berechnen Sie den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung der angegebenen Flächeninhalte. Verwenden Sie dazu die Klassenmitten.

Fläche in m²	Anzahl der Scheiben
1,91 – 1,95	1
1,96 – 2,00	5
2,01 – 2,05	22
2,06 – 2,10	48
2,11 – 2,15	52
2,16 – 2,20	29
2,21 – 2,25	0
2,26 – 2,30	1

6.5

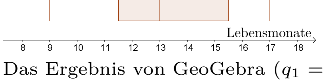
Zum Schutz von Nutzpflanzen werden Pflanzenschutzmittel angewendet. Es wurden insgesamt 24 Proben von Marillen auf Rückstände von Pflanzenschutzmitteln hin untersucht (siehe nebenstehende Tabelle).

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel der Anzahl der festgestellten Pflanzenschutzmittel pro Probe.

Anzahl der festgestellten Pflanzenschutzmittel pro Probe	Anzahl der Proben
1	4
2	10
3	3
4	2
5	2
6	3

6.1 $\bar{x} = 36{,}85\,\text{cm}$ $s_{n-1} = 0{,}814\ldots\,\text{cm}$

6.2 **1)** Arithmetisches Mittel: 13,22... Monate Standardabweichung: 2,39... Monate

2) 

Das Ergebnis von GeoGebra ($q_1 = 11{,}5$, $q_3 = 15{,}5$) wird als richtig gewertet.
Eigentlich sind $q_1 = 12$ und $q_3 = 15$ richtige Quartile (siehe Arbeitsblatt – Statistische Kenngrößen und Boxplot).

3) Jedes der folgenden 4 Intervalle enthält von mindestens 25 % der beobachteten Kinder den Zeitpunkt des ersten Auftretens freien Gehens in Lebensmonaten: [9; 12], [12; 13], [13; 15], [15; 17]

6.3 7,8 h

6.4 Arithmetisches Mittel: $2{,}105\,\text{m}^2$ Standardabweichung: $0{,}055\,61\ldots\,\text{m}^2$

6.5 2,875 Pflanzenschutzmittel pro Probe

7. Binomialverteilung

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Binomialverteilung

7.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Milchverpackungen werden maschinell ausgestanzt. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Maschine eine Milchverpackung korrekt ausstanzt, beträgt laut Hersteller 96 %. Bei einer Qualitätsprüfung der Produktion werden 4 zufällig ausgewählte Milchverpackungen kontrolliert.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter den kontrollierten Milchverpackungen mindestens 1 Milchverpackung fehlerhaft ist.

7.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Jedes Jahr im Frühjahr findet die CeBIT, die Messe für Informationstechnik, in Hannover statt.
Für den Besuch der CeBIT soll ein Flug nach Hannover gebucht werden. Erfahrungsgemäß werden 6 % der Buchungen storniert. Aus diesem Grund wurden 160 voneinander unabhängige Buchungen für eine Maschine mit 156 Sitzplätzen durchgeführt.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass am Flugtag niemand aus Platzgründen auf eine andere Maschine umgebucht werden muss.

7.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Karl Landsteiner entwickelte das AB0-Blutgruppensystem. Er entdeckte auch die beiden Rhesusfaktoren Rh+ und Rh–. 37 % der österreichischen Bevölkerung haben die Blutgruppe A, Rh+.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung höchstens 15 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.

2) Ermitteln Sie, wie viele zufällig ausgewählte Personen mindestens Blut spenden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens eine Person mit der Blutgruppe A, Rh+ darunter ist.

3) Interpretieren Sie, die Bedeutung des Ausdrucks

$$\sum_{k=2}^{6} \binom{60}{k} \cdot 0{,}37^k \cdot 0{,}63^{60-k}$$

im gegebenen Sachzusammenhang.

7.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Mathematiker Blaise Pascal und Pierre de Fermat beschäftigten sich in einem Briefwechsel mit der folgenden Frage: „Was ist wahrscheinlicher: Bei 4 Würfen mit einem Würfel mindestens einen Sechser zu werfen oder bei 24 Würfen mit 2 Würfeln mindestens einen Doppelsechser?“ Dabei wird mit einem herkömmlichen Spielwürfel gewürfelt, wobei die Augenzahlen 1 bis 6 jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten.

1) Überprüfen Sie die Fragestellung durch Berechnung der jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

7.5

Das chinesische Spiel Pat Cha („Griff nach acht“) wird mit 8 Würfeln gespielt. Jede Spielerin / jeder Spieler setzt auf eine der 6 Augenzahlen. Eine Spielerin / ein Spieler gewinnt, wenn mindestens 3 der 8 Würfel die gesetzte Zahl zeigen.
Martin setzt auf die Augenzahl 6.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Martin gewinnt.

7.6

Erfahrungsgemäß enthalten 4 % aller Joghurtbecher eine Woche nach dem Ablaufdatum bereits verdorbene Ware. Im Lager einer Lebensmittelkette befinden sich noch 200 solcher Becher.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert der Anzahl der Becher mit verdorbenem Joghurt.

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in höchstens 5 der 200 Joghurtbecher verdorbene Ware enthalten ist.

7.7

Ein Hotel kann 93 Zimmer vermieten.
Erfahrungsgemäß nehmen 55 % der voneinander unabhängig buchenden Gäste Vollpension in Anspruch.

1) Berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei 40 zufällig ausgewählten Gästen mehr als 20 und weniger als 25 Personen Vollpension buchen.

7.8

Bei einem bestimmten Zufallsversuch tritt entweder „Erfolg“ oder „Misserfolg“ ein. Dieser Zufallsversuch wird 30-mal durchgeführt. Die binomialverteilte Zufallsvariable X gibt an, wie oft dabei „Erfolg“ eintritt. Für den Erwartungswert gilt: $E(X) = 12$.
Aufgabenstellung:
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$.

7.9

Seit vielen Jahren hat die GWUP (Gesellschaft zur wissenschaftlichen Untersuchung von Parawissenschaften e. V.) ein Preisgeld für den Nachweis einer paranormalen (übersinnlichen) Fähigkeit ausgeschrieben. Die behaupteten Fähigkeiten einer Versuchsperson werden dabei mit verschiedenen Tests überprüft.

Eine Versuchsperson muss auf Basis ihrer paranormalen Fähigkeiten angeben, unter welcher von 10 Schachteln ein Glas Wasser versteckt ist. Der Versuch wird 13-mal durchgeführt, wobei das Glas Wasser jedes Mal neu versteckt wird. Um die Testphase zu bestehen, müssen bei 13 Durchführungen des Versuchs 7 oder mehr Treffer erzielt werden.

Es wird angenommen, dass die Versuchsperson keine paranormalen Fähigkeiten besitzt und daher bei jeder Durchführung des Versuchs mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % einen Treffer erzielt.

1) Berechnen Sie den Erwartungswert für die Anzahl der Treffer.

2) Zeigen Sie, dass es wahrscheinlicher ist, dass diese Versuchsperson mindestens 1 Treffer erzielt, als dass sie gar keinen Treffer erzielt.

3) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Versuchsperson die Testphase besteht.

7.10

Vor einer Schule werden Geschwindigkeitsmessungen durchgeführt. Es ist bekannt, dass sich Kfz-Lenker/innen mit einer Wahrscheinlichkeit von nur 26 % an das geltende Tempolimit halten.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich von 20 zufällig ausgewählten Kfz-Lenkerinnen und -Lenkern mehr als die Hälfte an das geltende Tempolimit hält.

7.1 15,06...%

7.2 98,80...%

7.3 **1)** 3,39... %

2) mindestens 7 Personen

3) Es wird die WS berechnet, dass unter 60 zufällig ausgewählten Personen der österreichischen Bevölkerung mindestens 2 und höchstens 6 Personen die Blutgruppe A, Rh+ haben.

7.4 Die Wahrscheinlichkeit für mind. ein Sechser bei 4 Würfen ist 51,77...%.
Die Wahrscheinlichkeit für mind. ein Doppelsechser bei 24 Würfen ist kleiner, nämlich 49,14...%.

7.5 13,48...%

7.6 **1)** 8 **2)** 18,56...%

7.7 47,02...%

7.8 2,03... %

7.9 **1)** 1,3 Treffer **2)** $P(X = 0) = 0{,}9^{13} = 0{,}254... < 1 - P(X = 0)$ **3)** 0,0099... %

7.10 0,54... %

8. NORMALVERTEILUNG

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

- ✓ Arbeitsblatt – Normalverteilung
- ✓ Arbeitsblatt – Zufallsstreubereiche und Konfidenzintervalle

Dichtefunktionen / Verteilungsfunktionen

8.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die Masse von Minigolfbällen eines bestimmten Typs ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 41\,\text{g}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1\,\text{g}$.
Wenn ein Minigolfball mehr als 41,25 g wiegt, wird er aussortiert.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Minigolfball aussortiert wird.

8.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Auf einer Drehmaschine werden Stahlzylinder gefertigt. Die Durchmesser der Zylinder sind annähernd normalverteilt mit den Parametern $\mu = 60\,\text{mm}$ (Erwartungswert) und $\sigma = 0{,}3\,\text{mm}$ (Standardabweichung).

a) Bei einer Überprüfung wird ein Zylinder zufällig ausgewählt.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit in Prozent, dass der Durchmesser dieses Zylinders innerhalb eines Bereichs von $60{,}1\,\text{mm} \pm 0{,}6\,\text{mm}$ liegt.

b) 1) Berechnen Sie jenen um den Erwartungswert symmetrisch liegenden Bereich, in dem erwartungsgemäß 90 % aller Durchmesser der Werkstücke liegen.

8.3

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Ein für Digitalkameras relevantes Qualitätsmerkmal ist die Anzahl der Linienpaare pro Bildhöhe (LP/BH).
Für einen bestimmten Objektiv-Typ ist diese Kenngröße annähernd normalverteilt. Die Objektive werden von 3 verschiedenen Herstellern – A, B und C – jeweils mit dem Erwartungswert $\mu = 1950$ LP/BH und der Standardabweichung σ_A, σ_B bzw. σ_C produziert.
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neu produziertes Objektiv des Herstellers C mindestens 1900 LP/BH darstellen kann, beträgt 97,7 %.

1) Berechnen Sie die zugehörige Standardabweichung σ_C.

8.4

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

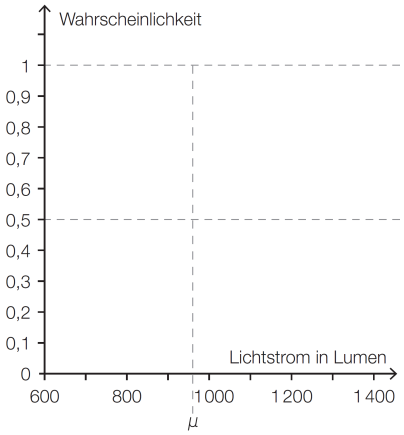
Ein Unternehmen stellt auf computergesteuerten Drehmaschinen Stahlwellen für Elektromotoren in Massenproduktion her.
Bei einer Maschine sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 0{,}02\,\text{mm}$. Ein Durchmesser von 9,97 mm wird von 0,1 % der Stahlwellen unterschritten.

1) Ermitteln Sie den zugehörigen Erwartungswert μ.

8.5

Traditionelle Glühlampen wurden wegen ihrer geringen Energieeffizienz in der EU schrittweise verboten. Als Alternative zu den Glühlampen bieten Hersteller LED-Lampen an.

Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ angenommen werden. Dabei liegen 95 % der Lichtstromwerte in dem um μ symmetrischen Intervall von 780 Lumen bis 1140 Lumen.



1) Berechnen Sie den Erwartungswert μ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.

2) Berechnen Sie die Standardabweichung σ des Lichtstroms für 12-Watt-LED-Lampen.

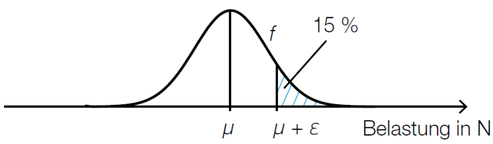
3) Skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Verteilungsfunktion in der nebenstehenden Abbildung.

4) Veranschaulichen Sie in der nebenstehenden Abbildung die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte 12-Watt-LED-Lampe einen Lichtstrom von bis zu 900 Lumen hat.

8.6

Ein Unternehmen stellt verschiedene Bauteile her, die einer gewissen Belastung standhalten müssen. Die Belastung, der die Bauteile standhalten, ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ.

Der Erwartungswert für die Belastbarkeit beträgt $\mu = 102$ Newton (N). Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



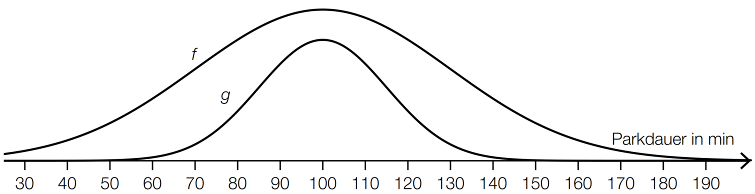
1) Berechnen Sie ε für $\sigma = 3{,}5$ N.

8.7

In einer Tiefgarage ist die Parkdauer der abgestellten Autos annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 100$ min und der Standardabweichung $\sigma = 30$ min.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Parkdauer eines abgestellten Autos in dieser Tiefgarage mindestens 1 Stunde und höchstens 2 Stunden beträgt.

Der Graph der zugehörigen Dichtefunktion f ist in der nachstehenden Abbildung dargestellt.



Jemand behauptet, dass der Graph der Funktion g ebenfalls der Graph einer Dichtefunktion sei.

2) Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist.

8.8

Mehrere Maschinen füllen Säcke mit Dünger ab. Als Füllmenge sind laut Aufdruck 25 kg vorgesehen.

a) Langfristige Überprüfungen einer bestimmten Maschine haben ergeben, dass die tatsächliche Füllmenge der Säcke mit dem Erwartungswert $\mu = 24{,}8\,\text{kg}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}2\,\text{kg}$ normalverteilt ist.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Sack eine geringere Füllmenge als vorgesehen aufweist.

b) Bei einer bestimmten Abfüllmaschine kann die Füllmenge als normalverteilte Zufallsgröße mit einer Standardabweichung von 0,94 kg und einem Erwartungswert von 25 kg angenommen werden.
Laut Betriebsvorschrift müssen Säcke mit mehr als $\pm\frac{1}{2}$ kg Abweichung vom Erwartungswert nachkorrigiert werden.

1) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Füllmenge eines zufällig ausgewählten Sackes nachkorrigiert werden muss.

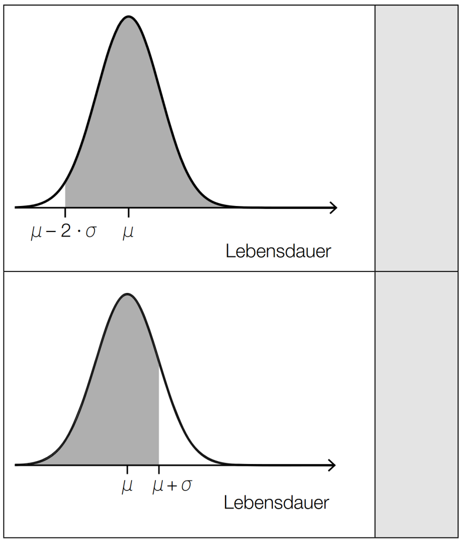
Nach einer Untersuchung wird beschlossen, dass 97 % aller Säcke (symmetrisch um den Erwartungswert) als korrekt abgefüllt betrachtet werden sollen.

2) Berechnen Sie, welche Abweichungen vom Erwartungswert nun bei der Abfüllung toleriert werden.

8.9

Die Lebensdauer eines bestimmten Nähnadeltyps ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ und der Standardabweichung σ.
In den unten stehenden Abbildungen ist der Graph der zugehörigen Dichtefunktion dargestellt.

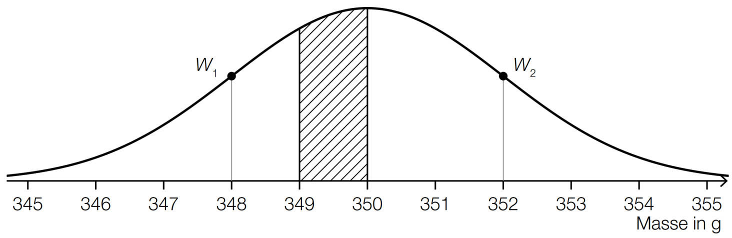
1) Ordnen Sie den grau markierten Flächen jeweils die entsprechende Wahrscheinlichkeit aus A bis D zu.



A	0,68...
B	0,84...
C	0,95...
D	0,97...

8.10

Forellen sind als Speisefische sehr beliebt.
Die Masse einer Forelle, wie sie in einer bestimmten Fischhandlung verkauft wird, kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.
Im Rahmen der regelmäßigen Qualitätskontrollen werden Stichproben vom Umfang $n = 9$ entnommen.
Die nachstehende Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der Stichprobenmittelwerte.



W_1, W_2 ... Wendepunkte der Dichtefunktion

1) Ermitteln Sie die durch die schraffierte Fläche dargestellte Wahrscheinlichkeit.

Die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit unterscheidet sich von der Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte.

2) Ermitteln Sie die durch die schraffierte Fläche dargestellte Wahrscheinlichkeit.

Zufallsstreubereiche

8.11

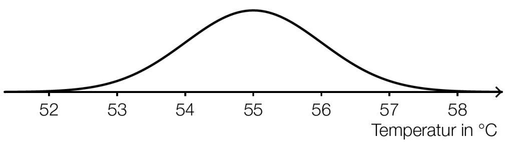
Im Zuge geologischer Tests wird bei einer Tiefenbohrung in einem bestimmten Punkt mehrmals die Temperatur gemessen. Aufgrund von Messfehlern sind die erhaltenen Werte annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 55\,°\mathrm{C}$ und der Standardabweichung $\sigma = 1\,°\mathrm{C}$

1) Ermitteln Sie den symmetrischen 95-%-Zufallsstreubereich der Temperatur.

2) Geben Sie an, um wie viel Prozent sich die Breite eines symmetrischen Zufallsstreubereichs verändert, wenn anstelle von 95 % aller Messwerte nun 98 % aller Messwerte in diesem Bereich fallen sollen.

In der nebenstehenden Abbildung ist der Graph der Dichtefunktion dieser normalverteilten Zufallsvariable X dargestellt.

3) Skizzieren Sie in der nebenstehenden Abbildung den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\bar{X}$ für einen Stichprobenumfang $n = 7$.



8.12

Für Schweißroboter werden Schweißelektroden benötigt. Ein Unternehmen liefert Elektroden, deren Längen annähernd normalverteilt mit $\mu = 300\,\mathrm{mm}$ und $\sigma = 5\,\mathrm{mm}$ sind. Man entnimmt einer umfangreichen Lieferung eine Zufallsstichprobe von 20 Schweißelektroden.

1) Ermitteln Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem der Stichprobenmittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % liegt.

8.13

In einer Fertigungsanlage werden Werkstücke erzeugt, deren Längen erfahrungsgemäß normalverteilt sind.
Die Länge eines Werkstücks ist normalverteilt mit $\mu = 72{,}3\,\mathrm{mm}$ und $\sigma = 0{,}5\,\mathrm{mm}$.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang $n = 7$ entnommen.
Für jede Stichprobe wird der Mittelwert der Längen bestimmt.

1) Geben Sie die Parameter der Verteilung der Stichprobenmittelwerte $\bar{X}$ an.

2) Berechnen Sie den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 95 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

8.14

Ein Unternehmen stellt auf computergesteuerten Drehmaschinen Stahlwellen für Elektromotoren in Massenproduktion her. Bei einer Maschine sind die Durchmesser der hergestellten Stahlwellen annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10{,}00\,\mathrm{mm}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}03\,\mathrm{mm}$.
Im Rahmen der Qualitätssicherung werden Stichproben vom Umfang n untersucht.

1) Berechnen Sie für $n = 30$ den zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

2) Geben Sie an, um welchen Faktor sich der Stichprobenumfang ändern muss, damit sich die Breite des 99-%-Zufallsstreubereichs halbiert.

8.15

Eine wichtige Kenngröße einer Feder ist die sogenannte *Federkonstante*.
Bei der Herstellung einer bestimmten Feder wird angenommen, dass die Federkonstante annähernd normalverteilt ist. Der Erwartungswert beträgt $\mu = 80$ Newton pro cm (N/cm), die Standardabweichung beträgt $\sigma = 3\,\text{N/cm}$.
In der Qualitätskontrolle werden Stichproben vom Umfang $n = 8$ untersucht.

1) Berechnen Sie denjenigen zum Erwartungswert symmetrischen Zufallsstreubereich, in dem erwartungsgemäß 99 % aller Stichprobenmittelwerte liegen.

Eine Stichprobe vom Umfang $n = 8$ ergab die folgenden Messwerte (in N/cm):

69,77 82,12 80,67 78,72 75,28 75,51 75,66 79,13

2) Überprüfen Sie nachweislich, ob das arithmetische Mittel dieser Stichprobe im oben berechneten Zufallsstreubereich enthalten ist.

8.16

Für eine Eisenbahnstrecke wird ein Tunnel gegraben. Beim Ausbau des Tunnels werden vorgefertigte Betonelemente eingesetzt. Die Breite dieser Betonelemente ist annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 5\,\text{m}$ und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}005\,\text{m}$.
Zur Qualitätssicherung werden Zufallsstichproben mit dem Stichprobenumfang $n = 10$ entnommen und die Stichprobenmittelwerte der Breiten ermittelt.

1) Geben Sie den Erwartungswert $\mu_{\bar{X}}$ und die Standardabweichung $\sigma_{\bar{X}}$ für die Verteilung dieser Stichprobenmittelwerte an.

$\mu_{\bar{X}} =$ ________________ m $\qquad$ $\sigma_{\bar{X}} =$ ________________ m

2) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Stichprobenmittelwerte zwischen 4,996 m und 5,004 m liegen.

Konfidenzintervalle

8.17

Eine Messstation registriert täglich zu einem bestimmten Zeitpunkt die Konzentration der von einer Fabrik emittierten Schadstoffe (in mg/m^3). Es wird angenommen, dass diese Schadstoffkonzentrationen annähernd normalverteilt sind.
Es werden Messungen an 10 Tagen vorgenommen:

Schadstoffkonzentration in mg/m^3	152	166	149	153	172	147	157	164	157	168

1) Berechnen Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$.

2) Ermitteln Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ, wenn bekannt ist, dass die Standardabweichung $\sigma = 8{,}5\,\text{mg/m}^3$ beträgt.

8.18

Der Kerosinverbrauch eines bestimmten Flugzeugs auf einer bestimmten Strecke kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.
Der Erwartungswert beträgt $\mu = 845$ L/100 km und die Standardabweichung beträgt $\sigma = 25$ L/100 km.

1) Ermitteln Sie dasjenige um μ symmetrische Intervall, in dem der Kerosinverbrauch mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Nach Reparaturarbeiten soll der Erwartungswert des Kerosinverbrauchs mithilfe eines Konfidenzintervalls neu geschätzt werden. Dabei wird angenommen, dass die Standardabweichung weiterhin $\sigma = 25$ L/100 km beträgt.
Nach den Reparaturarbeiten wurde der Kerosinverbrauch in L/100 km von einer Zufallsstichprobe von 10 Flügen auf dieser Strecke gemessen:

844	840	864	820	788	858	832	817	839	796

2) Ermitteln Sie das zweiseitige 99-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert des Kerosinverbrauchs nach den Reparaturarbeiten.

8.19

Der Energieertrag von Photovoltaikanlagen eines bestimmten Typs ist annähernd normalverteilt mit einer Standardabweichung von $\sigma = 6$ Kilowattstunden (kWh).
Für 10 zufällig ausgewählte Anlagen dieses Typs wurden folgende Energieerträge in kWh gemessen:

195	198	210	204	196	202	210	199	192	201

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel $\bar{x}$ der Messwerte.

2) Ermitteln Sie das zweiseitige 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ des Energieertrags.

3) Beschreiben Sie, wie sich die Breite des Konfidenzintervalls ändert, wenn die Irrtumswahrscheinlichkeit α kleiner wird.

8.20

Laut einem Ratgeber für LED-Lampen kann der Lichtstrom von 12-Watt-LED-Lampen als annähernd normalverteilt mit $\sigma = 75$ Lumen angenommen werden. Für 8 zufällig ausgewählte Lampen wurde jeweils der Lichtstrom (in Lumen) gemessen.

1053	900	984	873	838	1045	960	955

1) Ermitteln Sie den 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ.

2) Zeigen Sie anhand der entsprechenden Formel, warum für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekanntem σ gilt: Wird der Stichprobenumfang vervierfacht, so halbiert sich die Breite des $(1-\alpha)$-Vertrauensbereichs für den Erwartungswert μ.

8.21

Die Anzahl der täglichen Zugriffe auf eine bestimmte Website kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Zufallsstichprobe von 10 Werten wurde erhoben:

9730	9932	8960	10488	9842	10340	10234	9549	9751	10190

1) Berechnen Sie das arithmetische Mittel und die Standardabweichung dieser Zufallsstichprobe.

2) Bestimmen Sie das 95-%-Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ der Normalverteilung.

8.22

Ein Unternehmen stellt verschiedene Bauteile her, die einer gewissen Belastung standhalten müssen. Die Belastung, der die Bauteile standhalten, ist normalverteilt mit den Parametern μ und σ.
Das Unternehmen behauptet, dass der Erwartungswert der Belastung, der die Bauteile standhalten, $\mu = 120$ Newton (N) beträgt.
Eine Stichprobe ergab folgende Werte:

118,5 N	122 N	120,5 N	117 N	118,5 N	121 N	121,5 N	119,5 N

1) Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s dieser Stichprobe.

2) Überprüfen Sie mithilfe eines 95-%-Vertrauensbereichs für μ, ob die Behauptung des Unternehmens durch diese Stichprobe untermauert werden kann.

8.23

Absorbiert ein Körper elektromagnetische Strahlung, so führt dies durch Energieaufnahme zur Erwärmung des Körpers. Dabei ist der SAR-Wert (spezifische Absorptionsrate) in Watt pro Kilogramm (W/kg) eine wichtige Kenngröße.
Der SAR-Wert eines bestimmten Smartphone-Modells kann als annähernd normalverteilt angenommen werden. Eine Stichprobe ergab die folgenden Messwerte:

SAR-Wert in W/kg	0,970	0,971	0,968	0,970	0,965	0,973	0,971	0,966

1) Ermitteln Sie den Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s_{n-1} dieser Messwerte.

2) Ermitteln Sie den zweiseitigen 95-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert der SAR-Werte.

8.24

Saiblinge sind als Speisefische sehr beliebt.
Die Masse eines Saiblings, wie er in einer bestimmten Fischhandlung verkauft wird, kann als annähernd normalverteilt angenommen werden.
Bei einer Stichprobe vom Umfang $n = 9$ wurden der Stichprobenmittelwert $\bar{x} = 299\,\text{g}$ und die Stichprobenstandardabweichung $s_{n-1} = 6{,}3\,\text{g}$ ermittelt.

1) Ermitteln Sie den zweiseitigen 90-%-Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ dieser Normalverteilung.

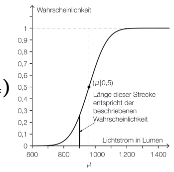
8.1 0,620...%

8.2 **a)** 94,23...% **b)** [59,50... mm; 60,49... mm]

8.3 **1)** $\sigma_C = 25{,}0\ldots$ LP/BH

8.4 $\mu = 10{,}03\ldots\,\text{mm}$

8.5 **1)** $\mu = 960$ Lumen **2)** $\sigma = 91{,}83\ldots$ Lumen **3)** **4)**



8.6 **1)** $\varepsilon = 3{,}627\ldots$

8.7 **1)** 65,62... %

2) Der Flächeninhalt unter dem Graphen einer Dichtefunktion muss 1 betragen. Da der Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion g kleiner als der Flächeninhalt unter dem Graphen der Dichtefunktion f ist, kann g keine Dichtefunktion sein.

8.8 **a)** 84,13...%

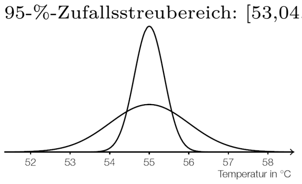
b) 59,47...% Es werden Abweichungen von $\pm 2{,}039\ldots$ kg vom Erwartungswert toleriert.

8.9 Oben: D Unten: B

8.10 **1)** 19,14... % **2)** $\sigma = 6$

8.11 **1)** 95-%-Zufallsstreubereich: [53,04...; 56,95...] **2)** Der 98-%-Zufallsstreubereich ist um 18,69... % breiter.

3)



8.12 [297,8... mm; 302,1... mm].

8.13 **1)** $\mu_{\bar{x}} = 72{,}3\,\text{mm}$ $\sigma_{\bar{X}} = 0{,}188\ldots\,\text{mm}$ **2)** [71,92... mm; 72,67... mm]

8.14 **1)** Zufallsstreubereich: [9,985... mm; 10,01... mm]

2) Die Breite ist $(\mu + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) - (\mu - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.
Eine Halbierung der Breite erfordert also, dass der Stichprobenumfang mit dem Faktor 4 multipliziert wird.

8.15 **1)** [77,26...; 82,73...] **2)** Das arithmetische Mittel $\bar{x} = 77{,}10\ldots$ N/cm ist nicht im oben berechneten Zufallsstreubereich enthalten.

8.16 **1)** $\mu_{\bar{X}} = 5\,\text{m}$ $\sigma_{\bar{X}} = 0{,}001\,58\ldots\,\text{m}$ **2)** 98,85... %

8.17 **1)** $\bar{x} = 158{,}5\,\text{mg/m}^3$ **2)** [153,2... mg/m^3; 163,7... mg/m^3]

8.18 **1)** [803,8...; 886,1...] **2)** [809,4...; 850,1...]

8.19 **1)** $\bar{x} = 200{,}7\,\text{kWh}$

2) Konfidenzintervall für μ: [196,9... kWh; 204,4... kWh]

3) Je kleiner die Irrtumswahrscheinlichkeit, desto breiter ist das Konfidenzintervall.

8.20 **1)** Vertrauensbereich für μ: [899,0... Lumen; 1002,9... Lumen]

2) Breite des Vertrauensbereichs: $b_n = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
Wenn n vervierfacht wird, dann wird $\sqrt{n}$ verdoppelt, dann wird die Breite halbiert.
Oder als Rechnung: $b_{2\cdot n} = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{4\cdot n}} = 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{2\cdot\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \cdot b_n \implies b_{2\cdot n} = \frac{1}{2} \cdot b_n$

8.21 **1)** $\bar{x} = 9901{,}6$ Zugriffe $s = 446{,}8\ldots$ Zugriffe **2)** 95-%-Konfidenzintervall für μ: [9581,9... Zugriffe; 10 221,2... Zugriffe]

8.22 **1)** $\bar{x} = 119{,}8\ldots$ N $s = 1{,}7307\ldots$ N

2) 95-%-Vertrauensbereich für μ: [118,3... N; 121,2... N] $\implies$ Der behauptete Erwartungswert $\mu = 120\,\text{N}$ ist enthalten.
Die Behauptung des Unternehmens, dass $\mu = 120\,\text{N}$ ist, wird daher durch diese Stichprobe untermauert.

8.23 [0,9669...; 0,9715...]

8.24 [295,0...; 302,9...]

9. Vektorrechnung

Vektorrechnung

Vektoren mit Anfangspunkt (0 | 0) definieren:

1) Eingabe: a=(4,2) $\rightsquigarrow$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Wenn die Bezeichnung ein Kleinbuchstabe ist, erkennt GeoGebra die Eingabe als Vektor und nicht als Punkt. Der Vektor wird in der Grafik-Ansicht als Ortsvektor – also ausgehend von (0 | 0) – dargestellt.

Mit $a = (4, 2, -5)$ wird zum Beispiel der 3-dimensionale Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ definiert.

Vektoren mit beliebigem Anfangspunkt definieren:

1) Punkte A und B eingeben.

2) Eingabe: Vektor(<Anfangspunkt>, <Endpunkt>) oder Vektor-Werkzeug 

- GeoGebra kann in der Eingabezeile und im CAS mit Punkten und Vektoren rechnen.
  Zum Beispiel: $a + b,\ a - b,\ 4 * a,\ A + a$
- Länge (<Vektor>)
- Einheitsvektor(<Vektor>)
- Winkel(<Vektor>, <Vektor>)
- Skalarprodukt(<Vektor>, <Vektor>) oder $a \cdot b$
- Kreuzprodukt(<Vektor>, <Vektor>)

Mehr zur Vektorrechnung findest du am Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene I, Arbeitsblatt – Vektorrechnung in der Ebene II und Arbeitsblatt – Vektorrechnung im Raum.

Parameterdarstellung von Geraden

Geraden in Parameterdarstellung definieren:

1) Eingabe: $(0, -2) + t * (-4, 3)$ $\rightsquigarrow$ $X = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) Eingabe: $(1, 2) + t * (-6, -5)$ $\rightsquigarrow$ $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -5 \end{pmatrix}$

Verwende in GeoGebra für jede Gerade in Parameterdarstellung den Parameter t.
Bei anderen Bezeichnungen wird ein Schieberegler für den eingegebenen Parameter erstellt.

- Mit Rechtsklick auf eine Gerade kann man die Darstellung zwischen Parameterdarstellung und den Darstellungen $y = k \cdot x + d$ bzw. $a \cdot x + b \cdot y = c$ wechseln.
- Geraden schneiden: Schneiden-Werkzeug  auswählen und beide Geraden anklicken.

Mehr dazu findest du am Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden in der Ebene und Arbeitsblatt – Parameterdarstellung von Geraden im Raum.

9.1

Die Spitze eines Roboterarms bewegt sich geradlinig vom Punkt $C = (1 \mid -2 \mid 3)$ zum Punkt $D = (5 \mid -3 \mid 2)$. Dort ändert sich die Bewegungsrichtung geringfügig und die Spitze bewegt sich geradlinig zum Punkt $E = (10 \mid -4 \mid 0)$.

1) Berechnen Sie den Winkel, um den die Bewegungsrichtung geändert wurde.

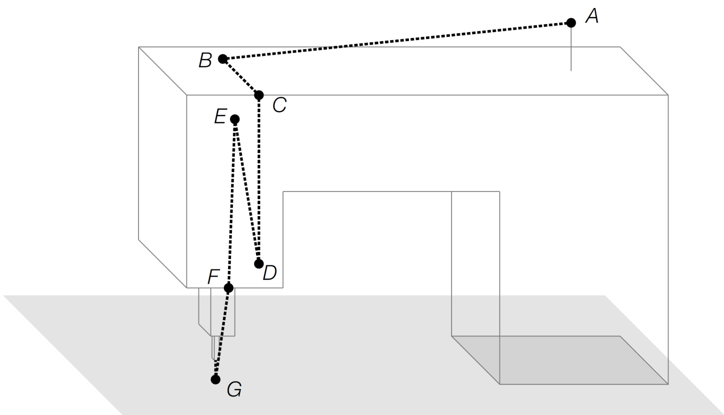
9.2

Eine Motoryacht bewegt sich vom Punkt $P_1 = (0 \mid -2)$ aus in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v_1} = \binom{-4}{3}$ gegeben ist. Ein Fischerboot befindet sich im Punkt $P_2 = (1 \mid 2)$ und fährt in die Richtung, die durch den Vektor $\vec{v_2} = \binom{-6}{-5}$ gegeben ist.

1) Berechnen Sie jenen Punkt S im Koordinatensystem, in dem die beiden Kurse einander kreuzen.

9.3

Die nachstehende Abbildung zeigt modellhaft eine Nähmaschine. Die gepunktete Linie stellt den Verlauf des Fadens von der Spule im Punkt A bis zur Nadel im Punkt G dar.



Es gilt:
$A = (-4 \mid 35 \mid 25)$, $B = (x_B \mid y_B \mid 20)$, $D = (1 \mid 3 \mid 10)$, $E = (2 \mid 1 \mid 18)$, $F = (1 \mid 0 \mid 8)$
(Alle Koordinaten sind in Zentimetern angegeben.)
Der Faden läuft vom Punkt A entlang der Geraden g mit $X = \begin{pmatrix} -4 \\ 35 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \\ 5 \end{pmatrix}$ zum Punkt B.

1) Ermitteln Sie die fehlenden Koordinaten des Punktes B.

2) Interpretieren Sie das Ergebnis der nachstehenden Berechnung geometrisch.

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$$

Der Faden läuft geradlinig vom Punkt D zum Punkt E und geradlinig weiter zum Punkt F.

3) Berechnen Sie die Länge des Fadens vom Punkt D bis zum Punkt F.

9.1 8,20...°
9.2 $S = (-2 \mid -0{,}5)$
9.3 **1)** $B = (-6 \mid 3 \mid 20)$ **2)** Die beiden Vektoren stehen normal aufeinander. **3)** 18,40... cm

10. Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen MmF

Komplexe Zahlen in Komponentenform definieren:

1) Eingabe: a=4-2*i $\rightsquigarrow$ $a = 4 - 2 \cdot i$

Wenn die rechte Seite die imaginäre Einheit i enthält, erkennt GeoGebra die Eingabe als komplexe Zahl.

Die komplexe Zahl wird in der Grafik-Ansicht als Punkt in der Zahlenebene dargestellt.

Komplexe Zahlen in Polarform definieren:

1) Eingabe: a=4*exp(i*20°) $\rightsquigarrow$ $a = (4; 20°) = 3{,}578... + 1{,}368... \cdot i$

In der Algebra-Ansicht wird die komplexe Zahl automatisch in die Komponentenform umgewandelt.

- Umwandlung einer komplexen Zahl von Komponentenform in Polarform:
  Rechtsklick auf komplexe Zahl → Eigenschaften → Algebra → Koordinaten: Polarform
- GeoGebra kann in der Eingabezeile und im CAS mit komplexen Zahlen a und b rechnen.
  Zum Beispiel: $a + b,\ a - b,\ a * b,\ a/b,\ a^5$
- CAS: Löse(<Gleichung>) löst die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.
  CAS: KLöse(<Gleichung>) löst die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$.

  Zum Beispiel:

  1 KLöse(x^2=-1)
  → $\{x = i, x = -i\}$

Mehr zu komplexen Zahlen findest du am Arbeitsblatt – Komplexe Zahlen und Arbeitsblatt – Polarform.

10.1

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

Die komplexe Zahl $c = 0{,}2 + 0{,}1 \cdot j$ gehört zur Mandelbrot-Menge und kann auch in Polarform angegeben werden.

1) Wandeln Sie die Zahl c in Polarform um.

2) Stellen Sie die Zahl c in der Gauß'schen Zahlenebene grafisch dar.

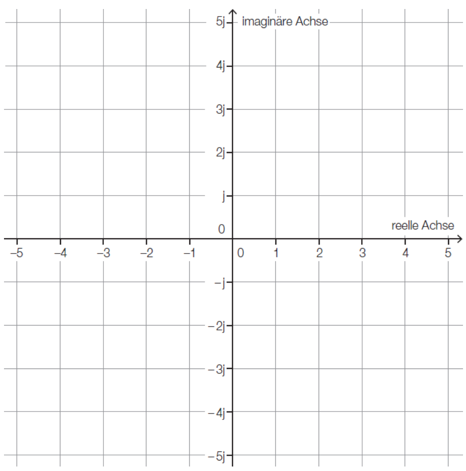
10.2

Bundesministerium Bildung, Wissenschaft und Forschung

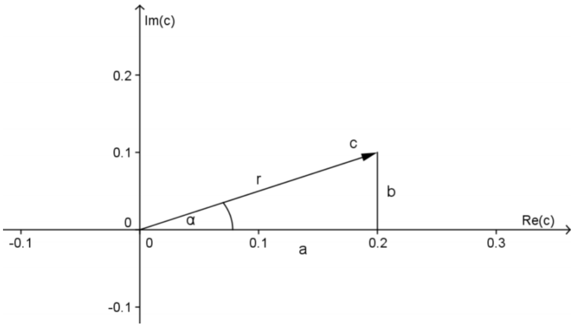
Viele Vorgänge in der Elektrotechnik können modellhaft mithilfe von komplexen Zahlen beschrieben werden.
Dabei wird die imaginäre Einheit mit j bezeichnet.

1) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung die komplexe Zahl $z_1 = 2 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$ ein.

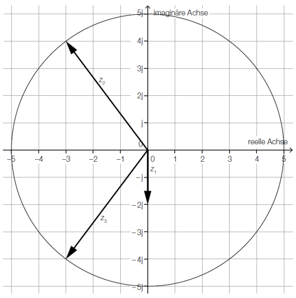
2) Zeichnen Sie in der nebenstehenden Abbildung die beiden komplexen Zahlen z_2 und z_3 ein, die den Realteil -3 und den Betrag 5 haben.



10.1 **1)** $c = (0{,}223\ldots; 26{,}56\ldots\,°)$ **2)**



10.2 **1)** **2)**



11. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

MmF-Materialien

Für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben empfehlen wir:

✓ Arbeitsblatt – Differentialgleichungen

11.1

Die Bewegung eines Bootes wird durch folgende Differenzialgleichung beschrieben:

$$m \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -k \cdot v$$

m ... Masse des Bootes
$v > 0$ ... Geschwindigkeit des Bootes
$k > 0$ ... Konstante
t ... Zeit

1) Argumentieren Sie mathematisch anhand der Differenzialgleichung, dass die Geschwindigkeit mit zunehmender Zeit t abnimmt.

2) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung.

11.2

Über Jahre hinweg wurden Fässer mit Problemstoffen illegal im Meer versenkt.
Für bestimmte Fässer kann die Sinkgeschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise durch die nachstehende Differenzialgleichung beschrieben werden.

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 0{,}25 \cdot v = 2$$

t ... Zeit in s
$v(t)$ ... Sinkgeschwindigkeit zur Zeit t in m/s

1) Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der gegebenen inhomogenen Differenzialgleichung.

11.1 **1)** $v'(t) = -\frac{k}{m} \cdot v(t) < 0$, also nimmt die Geschwindigkeit ab.
2) $v(t) = c \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$
11.2 $v(t) = C \cdot e^{-0{,}25 \cdot t} + 8$