AUFGABENSAMMLUNG – TERMRECHNUNG

Inhaltsverzeichnis

1. Potenzen, Wurzeln und Bruchterme 2
2. Quadratische Gleichungen und Polynome 7
3. Wurzelgleichungen 11
4. Exponential- und Logarithmusgleichungen 13
5. Ungleichungen und Grenzwerte 14
6. Weitere nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme 19
7. Analytische Geometrie 24

Eine traditionsreiche Aufgabe für Erstsemestrige ist, die ansprechende Formel

$$(1 + 2 + \cdots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$$

mit vollständiger Induktion – übrigens eine tolle Sache – zu beweisen. Dabei kommt man nicht darum herum, Terme wie $(n + 1)^3$ richtig auszumultiplizieren, was Stoff der Unterstufe ist. Genau daran scheitern viele. Das ist bitter für alle, besonders wenn die Aufgabe bei Prüfungen gestellt wird.

Bis in die 60er-Jahre wurde an österreichischen Schulen die *Methodisch geordnete Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra* von Dr. Karl Rosenberg (1861-1936) verwendet. Wir haben dieses Schulbuch für Sie digitalisieren lassen. Das war offenbar ein Goldenes Zeitalter für das Termrechnen. Der Anblick „eines Rosenbergs“ treibt Älteren gerne einmal die Tränen in die Augen.

Wir wünschen Ihnen viele schöne Anfänge im Zuge Ihres Studienbeginns.
Wir freuen uns sehr, dass wir Sie dabei ein Stück weit begleiten dürfen.

Datum: 3. Juli 2024

1. Potenzen, Wurzeln und Bruchterme

Potenzen, Wurzeln und Bruchterme

Auf den folgenden Materialien findest du Erklärungen sowie grundlegende Aufgaben zu diesem Thema:

- Arbeitsblatt – Bruchrechnung
- Arbeitsblatt – Potenzen und Wurzeln
- Arbeitsblatt – Binomische Formeln und Pascalsches Dreieck
- Aufgabensammlung – Mathematik auf Augenhöhe (9. Schulstufe)
- Aufgabensammlung – Mathematik auf Augenhöhe (10. Schulstufe)

1.1

Stelle das Ergebnis als gekürzten Bruch dar.

Berechne mit dem Taschenrechner die zugehörige Dezimalzahl.

a) $2+\frac{1}{2}$ **b)** $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ **c)** $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ **d)** $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$ **e)** $2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}$

Setzt man diesen Prozess unendlich fort, spricht man von einem Kettenbruch. Der Grenzwert ist $1+\sqrt{2}=2{,}4142\ldots$.

1.2

Stelle den gegebenen Term als gekürzten Bruch dar.

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}$ **b)** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$ **c)** $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$

d) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}+\cdots+\frac{1}{98\cdot 99}+\frac{1}{99\cdot 100}$

Hinweis: $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

e) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)\cdot(k+2)}+\cdots+\frac{1}{97\cdot 98\cdot 99}+\frac{1}{98\cdot 99\cdot 100}$

1.3

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $6^3\cdot 5^3$

b) $25^3\cdot 4^6\cdot 250^2$

c) $\frac{84^3\cdot 12\cdot 2^4}{4^3\cdot 6^3\cdot 14^2}$

d) $\frac{25^{75}\cdot 4^{120}}{125^{51}\cdot 2^{241}}$

e) $\frac{22^3\cdot 35^3}{55^4\cdot 14^3}$

f) $(-1)^{1365}$

1.4

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $\dfrac{42 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2}{6 \cdot x^2 - 3 \cdot x}$

b) $\dfrac{☺^8}{☺^3}$

c) $\dfrac{2 \cdot x - 5}{(2 \cdot x - 5)^4}$

d) $\dfrac{x - 3}{x^2 - 9}$

e) $\dfrac{54 \cdot a^3 \cdot b^5 \cdot c^3}{24 \cdot b^2 \cdot c^7 \cdot d^5}$

f) $\dfrac{21 \cdot f^3 \cdot g^2 \cdot (2 \cdot k - 3 \cdot m)}{56 \cdot f^4 \cdot g \cdot (3 \cdot m - 2 \cdot k)}$

g) $\dfrac{35 \cdot p^2 \cdot q^2 + 49 \cdot p \cdot q^3}{70 \cdot p \cdot q + 98 \cdot q^2}$

1.5

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $\dfrac{3 \cdot x}{10} + \dfrac{5}{7} \cdot x - 3 \cdot \dfrac{x}{35} + \dfrac{x}{14}$

b) $\dfrac{a+1}{4} + \dfrac{2 + 3 \cdot a}{12} - \dfrac{1 - a}{8} - \dfrac{2 \cdot a - 5}{6}$

c) $\dfrac{y}{5} + 3 - y + \dfrac{2 \cdot y}{3} - \dfrac{1 - y}{15}$

1.6

Stelle den gegebenen Term als möglichst einfachen Bruch dar.

a) $\dfrac{1}{2 \cdot x \cdot y^2 \cdot z} + \dfrac{1}{5 \cdot x^3 \cdot y \cdot z^4}$

b) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1}$

c) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{x^3}$

d) $\dfrac{1}{x \cdot y} - \dfrac{42}{x^2} + \dfrac{y}{x}$

e) $\dfrac{y}{6 \cdot x} - \dfrac{3 \cdot x}{10 \cdot y^2}$

f) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2}$

g) $\dfrac{2 \cdot x - 1}{x^2} - \dfrac{3 \cdot x + 1}{3 \cdot x}$

h) $\dfrac{5}{x-2} + 3 \cdot \dfrac{x}{x+1}$

i) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z}$

j) $\left(\dfrac{1}{2 \cdot x} - \dfrac{1}{2 \cdot x + y}\right) \cdot \dfrac{84 \cdot x \cdot (2 \cdot x + y)}{y}$

1.7

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $\dfrac{2 \cdot y - 1}{y - 2} - \dfrac{3 \cdot y}{y^2 - 4}$

b) $\dfrac{x+5}{2 \cdot x + 3} - \dfrac{x+4}{2 \cdot x - 3} + \dfrac{21}{4 \cdot x^2 - 9}$

c) $\dfrac{4 \cdot n^2 + 16}{n^4 - 16} - \dfrac{n}{n+2} + 1$

1.8

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $\dfrac{\frac{c}{d} - \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} + 2 + \frac{d}{c}}$

b) $\left(\dfrac{5 \cdot r^4}{3 \cdot t^2} - \dfrac{3 \cdot t^2}{5}\right) : \left(\dfrac{r^2}{3 \cdot t} - \dfrac{t}{5}\right)$

c) $\dfrac{\frac{2 \cdot x}{y} - 1}{\frac{2 \cdot x}{y} + 1} \cdot \dfrac{4 \cdot x^2 + 4 \cdot x \cdot y + y^2}{4 \cdot x^2 - 4 \cdot x \cdot y + y^2}$

d) $\dfrac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} \cdot \dfrac{a - b}{b}$

1.9

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $\dfrac{\sqrt{14\,400}}{\sqrt{25\,200}}$ **b)** $2\cdot\sqrt{5}+2\cdot\sqrt{45}-4\cdot\sqrt{20}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{3}\cdot(\sqrt{50}+7\cdot\sqrt{2})}{(5\cdot\sqrt{48}-8\cdot\sqrt{27})\cdot\sqrt{2}}$

1.10

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $(a^{32}\cdot a^{16}\cdot a^{8}\cdot a^{4}\cdot a^{2}\cdot a)\cdot a$

b) $\dfrac{(5\cdot x^2\cdot y^3)^{-1}}{(25\cdot x^{-2}\cdot y^4)^{-2}}$

c) $2\cdot\dfrac{3\cdot a^{-2}\cdot b^4}{12\cdot a^{-2}\cdot b^{-4}}$

d) $\sqrt[2]{a^3\cdot\sqrt[4]{a^5\cdot\sqrt[6]{a^7}}}$

e) $(a\cdot\sqrt[2]{a}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[8]{a}\cdot\sqrt[16]{a}\cdot\sqrt[32]{a})\cdot\sqrt[32]{a}$

f) $\sqrt[6]{(((2\cdot m\cdot n)^{-3})^{-1})^{-2}}$

g) $\sqrt[4]{9^2\cdot(x^2\cdot y^{-12})^2}$

h) $\left(x^{-3/2}\cdot y^{6/5}\right)^{10/3}$

1.11

Schreibe den gegebenen Term als Potenz von a.

a) $a^{(b^c)}\cdot a^{(b^c)}$ **b)** $(a^b)^c\cdot(a^b)^c$ **c)** $a^{(b^c)}\cdot(a^b)^c$

1.12

Vereinfache den gegebenen Term so weit wie möglich.

a) $(a+b)^4-(a-b)^4$ **b)** $\left(x-x^{2-a}\right)\cdot(x^a+x)$ **c)** $\dfrac{(m^2+n^2)^2}{(2\cdot m\cdot n)^2+(m^2-n^2)^2}$

1.13

Multipliziere den gegebenen Term aus und stelle das Ergebnis möglichst übersichtlich dar.

a) $(1+x)\cdot(1-x)$

b) $(1+x+x^2)\cdot(1-x)$

c) $(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots+x^{99})\cdot(1-x)$

d) $(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots+x^{n-1})\cdot(1-x)$

1.14

Leite die **geometrische Summenformel** her:

$$\underbrace{\boldsymbol{1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}}}_{\boldsymbol{n}\ \textbf{Summanden}}=\frac{\boldsymbol{1-q^n}}{\boldsymbol{1-q}}\,,\qquad q\neq 1$$

1.15

Berechne das Ergebnis mithilfe der geometrischen Summenformel.

a) $1+2+2^2+\cdots+2^9$

b) $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^9}$

c) $2+2\cdot 3+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^7$

d) $\dfrac{1-3+3^2-3^3+3^4-3^5+3^6-3^7+3^8-3^9}{1+3+3^2+3^3+3^4+3^5+3^6+3^7+3^8+3^9}$

1.16

Stelle das Ergebnis der Multiplikation möglichst übersichtlich dar.

a) $(x-a)\cdot(x+a)$

b) $(x-a)\cdot(x^2+a\cdot x+a^2)$

c) $(x-a)\cdot(x^3+a\cdot x^2+a^2\cdot x+a^3)$

d) $(x-a)\cdot(x^n+a\cdot x^{n-1}+a^2\cdot x^{n-2}+\ldots+a^k\cdot x^{n-k}+\ldots+a^{n-2}\cdot x^2+a^{n-1}\cdot x+a^n)$

1.17

Stelle das Ergebnis der Multiplikation möglichst übersichtlich dar.

a) $(1+x+x^2)\cdot(1-x+x^2)$

b) $(1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1-x+x^2-x^3+x^4)$

1.18

Stelle das Ergebnis der Multiplikation möglichst übersichtlich dar.

a) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)$

b) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)$

c) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot(x^{16}+1)$

d) $(x^2+1)\cdot(x^4+1)\cdot(x^8+1)\cdot\ldots\cdot(x^{(2^k)}+1)\cdot\ldots\cdot(x^{512}+1)\cdot(x^{1024}+1)$

1.19

Finde eine bequeme Formel, mithilfe der du den Ausdruck

$$s=1+2\cdot x+3\cdot x^2+\ldots+k\cdot x^{k-1}+\ldots+n\cdot x^{n-1}$$

für beliebige Werte von x und z.B. $n=100$ berechnen kannst.

Hinweis: $s\cdot(1-x)$

1.20

Multipliziere aus und vereinfache so weit wie möglich.

a) $(1+x)^5+(1-x)^5$

b) $(x^6-y^6)/\sqrt{5}$, wobei $x=(1+\sqrt{5})/2$ und $y=(1-\sqrt{5})/2$.

Ist $(x^{37}-y^{37})/\sqrt{5}$ eine rationale Zahl?

1.21

Es ist $x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ und $x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$.

Berechne und vereinfache das Ergebnis so weit wie möglich.

a) $x_1 + x_2$ **b)** $x_1 \cdot x_2$ **c)** $(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

1.1 **a)** $\frac{5}{2} = 2{,}5$ **b)** $\frac{12}{5} = 2{,}4$ **c)** $\frac{29}{12} = 2{,}4166...$ **d)** $\frac{70}{29} = 2{,}4137...$ **e)** $\frac{169}{70} = 2{,}4142...$

1.2 **a)** $\frac{2}{3}$ **b)** $\frac{3}{4}$ **c)** $\frac{4}{5}$ **d)** $\frac{99}{100}$ **e)** $\frac{4949}{19\,800}$

1.3 **a)** 27 000 **b)** 4 000 000 000 000 **c)** 42 **d)** $\frac{1}{250}$ **e)** $\frac{1}{55}$ **f)** -1

1.4 **a)** $\frac{14 \cdot x^2 - x}{2 \cdot x - 1}$ **b)** $☺^5$ **c)** $\frac{1}{(2 \cdot x - 5)^3}$ **d)** $\frac{1}{x+3}$ **e)** $\frac{9 \cdot a^3 \cdot b^3}{4 \cdot c^4 \cdot d^5}$ **f)** $-\frac{3 \cdot g}{8 \cdot f}$ **g)** $\frac{p \cdot q}{2}$

1.5 **a)** x **b)** $\frac{7 \cdot a + 27}{24}$ **c)** $\frac{44 - y}{15}$

1.6 **a)** $\frac{5 \cdot x^2 \cdot z^3 + 2 \cdot y}{10 \cdot x^3 \cdot y^2 \cdot z^4}$ **b)** $\frac{2 \cdot x + 1}{x \cdot (x+1)}$ **c)** $\frac{x^2 + 2 \cdot x + 3}{x^3}$ **d)** $\frac{x \cdot y^2 + x - 42 \cdot y}{x^2 \cdot y}$ **e)** $\frac{5 \cdot y^3 - 9 \cdot x^2}{30 \cdot x \cdot y^2}$ **f)** $\frac{3 \cdot x + 1}{(x+1)^2}$
g) $\frac{-3 \cdot x^2 + 5 \cdot x - 3}{3 \cdot x^2}$ **h)** $\frac{3 \cdot x^2 - x + 5}{(x-2) \cdot (x+1)}$ **i)** $\frac{x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z}{x \cdot y \cdot z}$ **j)** 42

1.7 **a)** $2 \cdot \frac{y^2 - 1}{y^2 - 4}$ **b)** $\frac{2}{3 - 2 \cdot x}$ **c)** $\frac{2 \cdot n}{n^2 - 4}$

1.8 **a)** $\frac{c - d}{c + d}$ **b)** $\frac{5 \cdot r^2 + 3 \cdot t^2}{t}$ **c)** $\frac{2 \cdot x + y}{2 \cdot x - y}$ **d)** $-a$

1.9 **a)** $\frac{2}{\sqrt{7}}$ **b)** 0 **c)** -3

1.10 **a)** a^{64} **b)** $125 \cdot y^5 \cdot x^{-6}$ **c)** $\frac{1}{2} \cdot b^8$ **d)** $a^{\frac{109}{48}}$
e) a^2 **f)** $\frac{1}{2 \cdot |m| \cdot |n|}$ **g)** $3 \cdot |x| \cdot y^{-6}$ **h)** $x^{-5} \cdot y^4$

1.11 **a)** $a^{2 \cdot (b^c)}$ **b)** $a^{(2 \cdot b \cdot c)}$ **c)** $a^{(b^c) + b \cdot c}$

1.12 **a)** $8 \cdot a^3 \cdot b + 8 \cdot a \cdot b^3$ **b)** $x^{1+a} - x^{3-a}$ **c)** 1

1.13 **a)** $1 - x^2$ **b)** $1 - x^3$ **c)** $1 - x^{100}$ **d)** $1 - x^n$

1.14 $(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) \cdot (1 - q) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} - q - q^2 - \cdots - q^{n-1} - q^n = 1 - q^n$ ✓

1.15 **a)** $2^{10} - 1 = 1023$ **b)** $2 - \frac{1}{2^9} = \frac{1023}{512}$ **c)** $3^8 - 1 = 6560$ **d)** $-\frac{1}{2}$

1.16 **a)** $x^2 - a^2$ **b)** $x^3 - a^3$ **c)** $x^4 - a^4$ **d)** $x^{n+1} - a^{n+1}$

1.17 **a)** $1 + x^2 + x^4$ **b)** $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8$

1.18 **a)** $1 + x^2 + x^4 + x^6$
b) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14}$
c) $1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10} + x^{12} + x^{14} + \cdots + x^{30}$
d) $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2044} + x^{2046}$

1.19 $s = \begin{cases} \frac{1 - x^n}{(1-x)^2} - \frac{n \cdot x^n}{(1-x)} & \text{wenn } x \neq 1 \\ \frac{n \cdot (n+1)}{2} & \text{wenn } x = 1 \end{cases}$

1.20 **a)** $2 + 20 \cdot x^2 + 10 \cdot x^4$ **b)** 8

1.21 **a)** $-p$ **b)** q **c)** $x^2 + p \cdot x + q$

2. Quadratische Gleichungen und Polynome

Quadratische Gleichungen und Polynome

Auf den folgenden Materialien findest du Erklärungen sowie grundlegende Aufgaben zu diesem Thema:

- Arbeitsblatt – Quadratische Gleichungen
- Arbeitsblatt – Polynomfunktionen
- Arbeitsblatt – Polynomdivision
- Aufgabensammlung – Quadratische Funktionen und Polynomfunktionen
- Aufgabensammlung – Mathematik auf Augenhöhe (9. Schulstufe)
- Aufgabensammlung – Mathematik auf Augenhöhe (10. Schulstufe)

2.1

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $(3 \cdot x - 2)^2 - 2 \cdot (x - 3) \cdot (3 \cdot x - 1) = 14 \cdot x + 22$ **b)** $\dfrac{5 \cdot x - 2}{3 \cdot x + 1} = \dfrac{9 \cdot x - 1}{8 \cdot x - 4}$

2.2

Für welche Werte von $k \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung

$$x^2 + (2 \cdot k - 2) \cdot x + 1 - 6 \cdot k = 0$$

a) genau eine reelle Lösung? **b)** keine reelle Lösung? **c)** zwei reelle Lösungen?

2.3

Zeige, dass die quadratische Gleichung

$$(a - x) \cdot (c - x) = b^2 \quad \text{mit } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$$

immer reelle Lösungen hat. Unter welchen Bedingungen für a, b, c hat sie genau eine Lösung?

Hinweis: Skizziere den Graphen der quadratischen Funktion f mit $f(x) = (a - x) \cdot (c - x)$.

2.4

Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a,\ b > 0$.

a) Zeige: Die Gerade mit Gleichung

$$y = k \cdot x + d$$

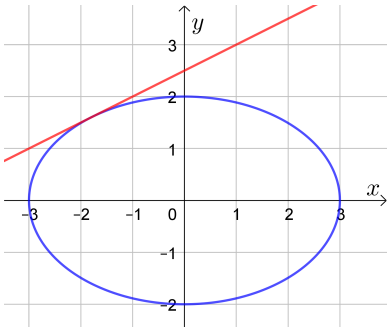
und die Ellipse mit Gleichung

$$b^2 \cdot x^2 + a^2 \cdot y^2 = a^2 \cdot b^2$$

schneiden einander genau dann in *genau* einem Punkt, wenn

$$a^2 \cdot k^2 + b^2 = d^2.$$

„Berührbedingung der Ellipse“



b) In der nebenstehenden Abbildung sind eine Ellipse und eine Gerade dargestellt.
Lies die Parameter a, b, k und d ab. Rechne nach, dass die Berührbedingung erfüllt ist.

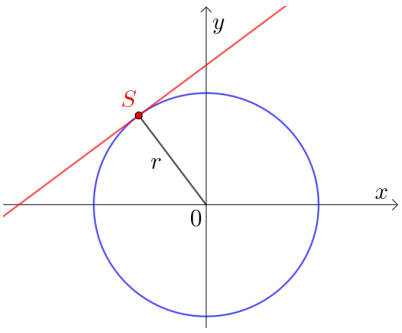
2.5

Für den Kreis mit Mittelpunkt $(0 \mid 0)$ und Radius r gilt: $x^2 + y^2 = r^2$
Zu jeder Gerade $y = k \cdot x + d$ mit $d \neq 0$ gibt es genau einen Radius $r > 0$ so, dass der Kreis und die Gerade einander in genau einem Punkt S berühren.

a) Berechne diesen Radius r und diesen Berührpunkt S für die Gerade $y = \frac{3}{4} \cdot x + 20$.

b) ☆ Stelle mithilfe von k und d eine Formel zur Berechnung von r auf.

$r =$



2.6

Eine *biquadratische Gleichung* hat die Form $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$ mit $a \neq 0$.
Durch die *Substitution* $u = x^2$ erhält man eine quadratische Gleichung in u.
Berechne alle Lösungen der folgenden Gleichungen in $\mathbb{R}$.

a) $x^4 - 2 \cdot x^2 - 8 = 0$

b) $x^4 - 10 \cdot x^2 + 9 = 0$

c) $2 \cdot x^4 - x^2 + 18 = 0$

d) $x^4 + 5 \cdot x^2 = 0$

e) $x^6 + 7 \cdot x^3 - 8 = 0$

f) $x^{42} + 8 \cdot x^{21} + 15 = 0$

2.7

Löse die gegebene Polynomgleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $x^{44} - 3 \cdot x^{43} - 10 \cdot x^{42} = 0$

b) $2 \cdot x^8 - 34 \cdot x^4 + 32 = 0$

c) ☆ $3 \cdot (x+3)^4 + 15 \cdot (x+3)^2 - 108 = 0$

d) ☆ $x \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) - 2 \cdot (x^2 - 2 \cdot x - 15) \cdot (x^2 + 1) = 0$

2.8

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ gibt es *genau eine* Lösung über der Grundmenge $\mathbb{R}$? Wie lautet diese Lösung?

a) $a \cdot x^2 + 2 \cdot x + a = 0$

b) $x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a = 0$

c) $a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + 1 = 0$

d) $a \cdot x^2 + 2 \cdot a \cdot x + a = 0$

e) $(x - 2 \cdot a - 1) \cdot (x + 3 \cdot a + 4) = 0$

f) $(a \cdot x + 1)^{42} + 1 = 0$

g) $(a \cdot x - 1)^{42} - 1 = 0$

h) $(13 \cdot x + 65 \cdot a)^{1365} + 1 = 0$

i) $(13 \cdot x + 65 \cdot a)^{1365} - 1 = 0$

2.9

Führe die Polynomdivision durch.

a) $\left(3 \cdot x^3 - 19 \cdot x^2 + 30 \cdot x - 8\right) : (x - 4)$

b) $\left(-3 \cdot x^5 + 14 \cdot x^4 - 29 \cdot x^3 + 20 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 4\right) : \left(-x^3 + 3 \cdot x^2 - 4 \cdot x - 2\right)$

c) $(12 \cdot x^4 - 29 \cdot x^3 + 23 \cdot x^2 - 34 \cdot x + 21) : (4 \cdot x - 3)$

d) $(2 + 6 \cdot x^4 - 7 \cdot x^2) : (2 - 3 \cdot x^2)$

e) $(8 \cdot x^5 + 12 \cdot x^4 - 6 \cdot x^3 + 9 \cdot x^2 + 13 \cdot x + 9) : (2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4)$

f) $\left(8 \cdot x + 23 \cdot x^3 - 39 \cdot x^2 - 12 \cdot x^4 - 9\right) : \left(2 \cdot x - 3 \cdot x^2 - 5\right)$

2.10

Prüfe, dass die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 5 \cdot x^3 - 31 \cdot x^2 - 40 \cdot x + 84$$

die Nullstellen -2 und 7 hat. Berechne die dritte Nullstelle, und schreibe die Gleichung von f als Produkt von Linearfaktoren.

2.11

Prüfe, dass die Polynomfunktion f mit

$$f(x) = 12 \cdot x^4 - 19 \cdot x^3 - 192 \cdot x^2 - 71 \cdot x + 30$$

die Nullstellen -3 und 5 hat. Berechne die anderen beiden Nullstellen, und schreibe die Gleichung von f als Produkt von Linearfaktoren.

2.12

Für die Polynomfunktion p gilt: $p(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15$

a) Zeige, dass bei der Polynomdivision

$$p(x) : (x - 1)$$

kein Rest bleibt.

b) Ermittle alle Nullstellen von p und vervollständige die Linearfaktorform von p.

$$p(x) = \boxed{} \cdot \left(\boxed{}\right) \cdot \left(\boxed{}\right) \cdot \left(\boxed{}\right)$$

2.13

Über die 3 reellen Nullstellen x_1, x_2 und x_3 der Polynomfunktion f mit

$$f(x) = x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + 60 = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3)$$

sind folgende Informationen bekannt:

a) x_2 ist eine natürliche Zahl. **b)** x_3 ist dreimal so groß wie x_2. **c)** x_2^2 ist um 9 größer als x_1.

Berechne die Koeffizienten b und c.

2.1 **a)** $L = \{-2, 4\}$ **b)** $L = \{\frac{3}{13}, 3\}$

2.2 **a)** genau eine reelle Lösung $\iff D = 0 \iff k = -4$ oder $k = 0$

b) keine reelle Lösung $\iff D < 0 \iff -4 < k < 0$

c) zwei reelle Lösungen $\iff D > 0 \iff k < -4$ oder $k > 0$

2.3 $a = c$ und $b = 0$

2.4 **a)** Die Schnittstellen sind die Lösungen von $(b^2 + a^2 \cdot k^2) \cdot x^2 + 2 \cdot a^2 \cdot d \cdot k \cdot x + a^2 \cdot d^2 - a^2 \cdot b^2 = 0$.
Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist genau dann 0, wenn $a^2 \cdot k^2 + b^2 = d^2$ gilt.

b) $a = 3$, $b = 2$, $k = \frac{1}{2}$, $d = \frac{5}{2}$

2.5 **a)** $r = 16$ $S = (-9{,}6 \mid 12{,}8)$ **b)** $r = \sqrt{\frac{d^2}{1+k^2}}$

2.6 **a)** $L = \{-2, 2\}$ **b)** $L = \{-1, 1, -3, 3\}$ **c)** $L = \{\ \}$ **d)** $L = \{0\}$ **e)** $L = \{-2, 1\}$ **f)** $L = \{\sqrt[21]{-5}, \sqrt[21]{-3}\}$

2.7 **a)** $L = \{-2, 0, 5\}$ **b)** $L = \{-2, -1, 1, 2\}$ **c)** $L = \{-5, -1\}$ **d)** $L = \{-3, 2, 5\}$

2.8 **a)** $a = 1 \implies x = -1$ $a = -1 \implies x = 1$

b) $a = 0 \implies x = 0$ $a = 1 \implies x = -1$

c) $a = 1 \implies x = -1$

d) $a \neq 0 \implies x = -1$ ($a = 0$ liefert unendlich viele Lösungen.)

e) $a = -1 \implies x = -1$

f) Keiner: Die linke Seite ist für alle a, $x \in \mathbb{R}$ größer als 0.

g) Keiner: $a = 0$ liefert unendlich viele Lösungen, $a \neq 0$ liefert immer 2 Lösungen $x = 0$ und $x = \frac{2}{a}$

h) Jeder Wert $a \in \mathbb{R}$ liefert genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1+65 \cdot a}{-13}$

i) Jeder Wert $a \in \mathbb{R}$ liefert genau eine Lösung, nämlich $x = \frac{1-65 \cdot a}{-13}$

2.9 **a)** $3 \cdot x^2 - 7 \cdot x + 2$ **b)** $3 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 2$ **c)** $3 \cdot x^3 - 5 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 7$ **d)** $-2 \cdot x^2 + 1$ **e)** $4 \cdot x^3 + 5 \cdot x - 3 + \frac{42 \cdot x - 3}{2 \cdot x^2 + 3 \cdot x - 4}$

f) $4 \cdot x^2 - 5 \cdot x + 3 + \frac{-23 \cdot x + 6}{-3 \cdot x^2 + 2 \cdot x - 5}$

2.10 $x_3 = \frac{6}{5}$ $f(x) = 5 \cdot (x + 2) \cdot (x - 7) \cdot (x - \frac{6}{5})$

2.11 $x_3 = -\frac{2}{3}$, $x_4 = \frac{1}{4}$ $f(x) = 12 \cdot (x + 3) \cdot (x - 5) \cdot (x + \frac{2}{3}) \cdot (x - \frac{1}{4})$

2.12 **a)**

$$\begin{array}{l}
\ominus \left\{ \begin{array}{l} (2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15) : (x - 1) = 2 \cdot x^2 - x - 15 \\ 2 \cdot x^3 - 2 \cdot x^2 \end{array} \right. \\
\hline
\quad \ominus \left\{ \begin{array}{l} -1 \cdot x^2 - 14 \cdot x + 15 \\ -1 \cdot x^2 + \ \ 1 \cdot x \end{array} \right. \\
\hline
\qquad \ominus \left\{ \begin{array}{l} -15 \cdot x + 15 \\ -15 \cdot x + 15 \end{array} \right. \\
\hline
\qquad\qquad 0 \text{ Rest}
\end{array}$$

b) $p(x) = 2 \cdot \left(x + \frac{5}{2}\right) \cdot (x - 1) \cdot (x - 3)$

2.13 $b = -3$, $c = -28$

3. Wurzelgleichungen

Wurzelgleichungen

Auf den folgenden Materialien findest du Erklärungen sowie grundlegende Aufgaben zu diesem Thema:

- Arbeitsblatt – Wurzelgleichungen

3.1

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $\sqrt{x-6} = -2$

b) $\sqrt{7 \cdot x + 2} - 3 = 1$

c) $6 - \sqrt{1 + 3 \cdot x} = 11$

d) $x + \sqrt{8 - 7 \cdot x} = 2$

3.2

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $3 \cdot \sqrt{2 \cdot x - 11} - \sqrt{27 \cdot x - 135} = 0$

b) $\sqrt{x^2 + 2 \cdot x - 3} = \sqrt{2 - 2 \cdot x}$

c) $5 \cdot \sqrt{10 - 2 \cdot x} - 4 \cdot \sqrt{16 - 3 \cdot x} = 0$

d) $\sqrt{2 \cdot x + 5} = \sqrt{8 \cdot x + 9} - \sqrt{2 \cdot x}$

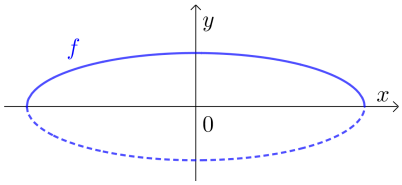
3.3

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-5} - \sqrt{2 \cdot x + 21} = 0$ **b)** $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-2} = \sqrt{2 \cdot x + 2}$ **c)** $\sqrt{5 \cdot x + 10} = \dfrac{10}{\sqrt{5 \cdot x + 10}} + 3$

3.4

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{c - d \cdot x^2}$ ist für alle $c, d > 0$ eine halbe Ellipse.

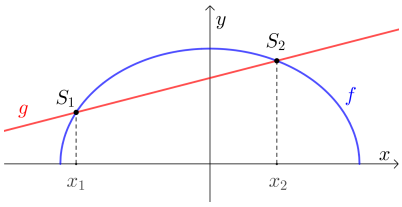


a) Für die links dargestellte Ellipse gilt $c = 1{,}6$ und $d = 0{,}1$.
Berechne die Nullstellen von f sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse.

b) Eine andere solche Ellipse g verläuft durch die Punkte $(-2 \mid 0)$, $(0 \mid 4)$ und $(2 \mid 0)$. Berechne c und d.

3.5

Die Graphen der Funktionen $f(x) = 3 \cdot \sqrt{5 - 0{,}25 \cdot x^2}$ und $g(x) = 0{,}5 \cdot x + 5$ sind dargestellt.



Die beiden Graphen schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.
Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte S_1 und S_2.

3.6

Es gibt zwei Werte für den Parameter $a \in \mathbb{R}$, sodass die Gleichung

$$\sqrt{a \cdot x} = 3 \cdot x + 2$$

genau eine Lösung x über der Grundmenge $\mathbb{R}$ hat.

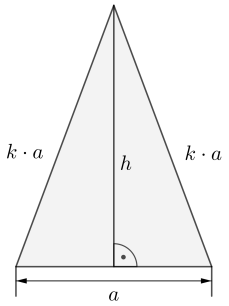
a) Berechne diese beiden Werte für den Parameter a.

b) Berechne für diese beiden Parameterwerte die jeweils eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}$.

3.7

Wir betrachten gleichschenkelige Dreiecke mit Basis a.

Die Schenkel haben jeweils die Länge $k \cdot a$.



a) Damit sich tatsächlich ein gleichschenkeliges Dreieck ausgeht,

muss $k >$ ☐ gelten.

Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein, und begründe deine Antwort.

b) Zeige, dass für den Flächeninhalt F des Dreiecks gilt:

$$F = \frac{a^2}{2} \cdot \sqrt{k^2 - \frac{1}{4}}$$

c) Berechne k so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks 4-mal so groß ist wie der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks mit Seitenlänge a.

3.1 **a)** $L = \{\}$ (Scheinlösung: $x = 10$) **b)** $L = \{2\}$ **c)** $L = \{\}$ (Scheinlösung: $x = 8$) **d)** $L = \{1, -4\}$
3.2 **a)** $L = \{\}$ (Scheinlösung: $x = 4$) **b)** $L = \{-5, 1\}$ **c)** $L = \{-3\}$ **d)** $L = \{2\}$
3.3 **a)** $L = \{14\}$ **b)** $L = \{2\}$ **c)** $L = \{3\}$
3.4 **a)** Nullstellen: $\{-4,\ 4\}$, Schnittpunkt: $(0 \mid 1{,}264...)$ **b)** $c = 16$, $d = 4$
3.5 $S_1 = (-4 \mid 3)$, $S_2 = (2 \mid 6)$
3.6 **a)** $a = 0$ bzw. $a = 24$ **b)** $a = 0 \implies x = -\frac{2}{3}$ $a = 24 \implies x = \frac{2}{3}$
3.7 **a)** $k > \frac{1}{2}$ **b)** $k = \frac{7}{2}$

4. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Exponential- und Logarithmusgleichungen

Auf den folgenden Materialien findest du Erklärungen sowie grundlegende Aufgaben zu diesem Thema:

- Arbeitsblatt – Exponentialfunktionen
- Arbeitsblatt – Logarithmusfunktionen
- Aufgabensammlung – Exponential- und Logarithmusfunktionen
- Aufgabensammlung – Mathematik auf Augenhöhe (10. Schulstufe)

4.1

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $7^x = 4$ **b)** $3 \cdot 4^{2\cdot x-1} - 2 = 46$ **c)** $\dfrac{e^{5\cdot x}+3}{4} = 2$ **d)** $\dfrac{-3}{e^{2\cdot x-3}-8} = 5$ **e)** $8^{x^2-4\cdot x+1} = 5$

4.2

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $2 \cdot \lg(4 \cdot x + 2) = 3$ **b)** $\dfrac{\ln(5 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 10)}{8} = 1$ **c)** $\log_2(x^4) = 40$

4.3

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

a) $4^{x^2-1} = 2^{x^2+1}$ **b)** $7 \cdot 2^{x+2} = 5 \cdot 3^{x-1} - 4 \cdot 2^x$ **c)** $\ln\left[(9 \cdot x + 8)^2\right] = 3 \cdot \ln(3 \cdot x + 4)$

4.4

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Hinweis: Vereinfache $a^{\log_a(b)\cdot\log_b(a)}$.

$$\log_4(x) + \log_x(4) = \frac{10}{3}$$

4.5

Löse die gegebene Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

Hinweis: Produkt-Null-Satz

a) $\lg^3(2 \cdot x + 16) - 4 \cdot \lg(2 \cdot x + 16) = 0$ **b)** $30^x - 16 \cdot 15^x - \dfrac{1}{25} \cdot 6^x + \dfrac{16}{25} \cdot 3^x = 0$

4.1 **a)** $L = \{0{,}7124...\}$ **b)** $L = \{\frac{3}{2}\}$ **c)** $L = \{0{,}3218...\}$ **d)** $L = \{2{,}5007...\}$ **e)** $L = \{0{,}0573..., 3{,}942...\}$
4.2 **a)** $L = \{7{,}405...\}$ **b)** $L = \{-24{,}07..., 24{,}67...\}$ **c)** $L = \{-1024, 1024\}$
4.3 **a)** $L = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ **b)** $L = \{7{,}287...\}$ **c)** $L = \{-1, 0\}$
4.4 $L = \{\sqrt[3]{4}, 64\}$
4.5 **a)** $L = \{-\frac{1599}{200}, -\frac{15}{2}, 42\}$ **b)** $L = \{-2, 4\}$

5. Ungleichungen und Grenzwerte

Ungleichungen und Grenzwerte

Auf den folgenden Materialien findest du Erklärungen sowie grundlegende Aufgaben zu diesem Thema:

- Arbeitsblatt – Ungleichungen
- Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen I
- Arbeitsblatt – Grenzwert von Folgen II
- Aufgabensammlung – Mathematik auf Augenhöhe (10. Schulstufe)

5.1

Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt die Ungleichung?

a) $(x-2)\cdot(x-3) > 0$

b) $x^2 + 1 > 2 \cdot x$

c) $x^2 + 2 > 2 \cdot x$

d) $x^3 + x > 2 \cdot x^2$

e) $x^4 + 4 \leq 5 \cdot x^2$

f) $x^4 + x^2 + 2 \cdot x > 2 \cdot x^3 + 2$

5.2

Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n).

a) $a_n = \dfrac{42}{n^2}$ **b)** $a_n = 3 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^2}$ **c)** $a_n = \sqrt{4 - \dfrac{5}{n^3}}$ **d)** $a_n = \dfrac{3 - \frac{4}{n}}{\frac{1}{n^2} - 6}$

5.3

Ermittle den Grenzwert der Folge (b_n).

a) $b_n = \dfrac{-4 \cdot n^3 + 5 \cdot n^2 - n}{2 \cdot n^3 - 1}$ **b)** $b_n = \dfrac{3 \cdot n^3 + n^2 - n}{2 \cdot n^4 - 3 \cdot n^2 + 1}$ **c)** $b_n = \dfrac{2 \cdot n^4 - n + 2}{-5 \cdot n^3 - 1}$

5.4

Ermittle den Grenzwert der Folge (c_n).

a) $c_n = \sqrt{\dfrac{n^5 + 2}{4 \cdot n^5 - n^3 + 1}}$ **b)** $c_n = \dfrac{4 + n - 3 \cdot n^2}{7 \cdot n - 2}$ **c)** $c_n = \dfrac{0{,}3^n - 2}{1{,}1^n + n^2}$

5.5

Für die Folge (a_n) gilt: $a_n = \dfrac{n^3 - 2}{n^2 + 1} - \dfrac{n^2 + 3}{n + 4}$

a) Schreibe den Term auf einen gemeinsamen Bruch, und vereinfache so weit wie möglich.

b) Ermittle den Grenzwert der Folge (a_n).

5.6

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Beschreibung von ε-Umgebungen.

a) Schreibe die Lösungsmenge der Betragsungleichung $|x-3|<2$ als Intervall an, und stelle sie grafisch auf der Zahlengerade dar.

b) Alle Lösungen von $|x+2|<1{,}5$ bilden zusammen eine ε-Umgebung einer Zahl a. Ermittle ε und a.

c) Alle Lösungen x der Ungleichung

$$-0{,}32 < x < 0{,}28$$

bilden zusammen eine ε-Umgebung einer Zahl a. Ermittle ε und a.

5.7

Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt: $a_n = 3 - \dfrac{100}{n}$

a) Ermittle den Grenzwert der Folge.

b) Berechne, ab dem wievielten Folgenglied alle Folgenglieder weniger als **i)** $\varepsilon = 1$ **ii)** $\varepsilon = 0{,}1$ **iii)** $\varepsilon = 0{,}01$ vom Grenzwert entfernt sind.

5.8

Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt: $a_n = \dfrac{42}{n^3} - 12$

a) Ermittle den Grenzwert der Folge.

b) Berechne, ab dem wievielten Folgenglied alle Folgenglieder weniger als $\varepsilon = 0{,}001$ vom Grenzwert entfernt sind.

5.9

Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2} + 5$

a) Begründe, warum die Folge weder monoton wachsend noch monoton fallend ist.

b) Berechne, ab dem wievielten Folgenglied alle Folgenglieder weniger als $\varepsilon = \frac{1}{100}$ vom Grenzwert 5 entfernt sind.

5.10

Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt: $a_n = 1{,}01^n$

a) Berechne, ab dem wievielten Folgenglied alle Folgenglieder größer als 10^6 sind.

b) Es gilt $M > 0$. Stelle mithilfe von M eine Formel auf, ab dem wievielten Folgenglied alle Folgenglieder größer als M sind.

5.11

Gegeben ist eine geometrische Folge (b_n).

1) Stelle mithilfe von n eine Formel für $s_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ auf, und vereinfache so weit wie möglich.

2) Ermittle den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$.

a) $(b_n) = (8; 4; 2; 1; \ldots)$ **b)** $(b_n) = \left(\frac{27}{4}; -\frac{9}{4}; \frac{3}{4}; -\frac{1}{4}; \ldots\right)$ **c)** $(b_n) = (0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; \ldots)$

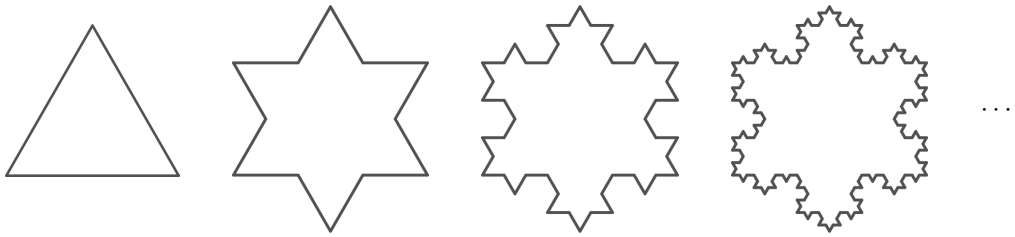
5.12

Es gibt geometrische Figuren mit endlichem Flächeninhalt, aber unendlichem Umfang. Für die *Kochsche Schneeflocke* starten wir mit einem gleichseitigen Dreieck und wiederholen immer wieder die folgenden drei Schritte:

i) Teile jede Seite in drei gleich lange Teile.

ii) Ergänze jeweils den mittleren Teil nach außen zu einem gleichseitigen Dreieck.

iii) Entferne den mittleren Teil.



Für den Umfang der ersten Figur gilt: $u_1 = 3 \cdot a$

a) Erkläre, warum die Umfänge $(u_1, u_2, u_3, \ldots)$ eine geometrische Folge mit $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$ bilden.

b) Erkläre, warum daraus $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ folgt.

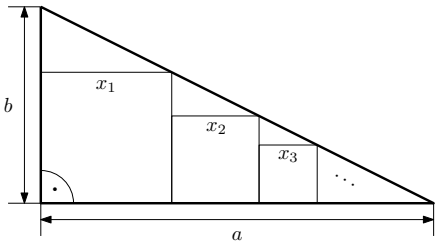
c) ☆ Für den Flächeninhalt des gleichseitigen Dreiecks gilt: $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$
Zeige, dass für den Flächeninhalt A_n nach n Durchläufen der drei Schritte **i)**, **ii)**, **iii)** gilt:

$$A_n = A_0 \cdot \left(\frac{8}{5} - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^n\right)$$

d) Stelle mithilfe von a eine Formel für den Flächeninhalt $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ der Kochschen Schneeflocke auf.

5.13

Wir schreiben einem rechtwinkeligen Dreieck mit Kathetenlängen a und b – wie abgebildet – Quadrate ein.



a) Stelle mithilfe von a und b eine Formel für x_1 auf.

b) Die Seitenlängen (x_n) bilden eine geometrische Folge.
Stelle mithilfe von a und b eine Formel für $q = \frac{x_2}{x_1}$ auf.

c) Zeige mithilfe von **1)** und **2)**, dass $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots = a$ gilt.

d) Stelle mithilfe von a und b eine Formel für die Summe aller Quadratflächen auf, und vereinfache so weit wie möglich.

e) Berechne den relativen Anteil der Dreiecksfläche, der von den Quadratflächen abgedeckt wird, wenn $a = b$ gilt.

5.14

Die *Mandelbrotmenge* enthält alle $c \in \mathbb{C}$, für die die Folge (z_n) mit

$$z_1 = c \quad \text{und} \quad z_{n+1} = z_n^2 + c,\ n \geq 1$$

beschränkt bleibt. Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl $M \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|z_n| \leq M$ für alle Folgenglieder gilt.

Die Zahl $c = -1$ ist zum Beispiel in der Mandelbrotmenge enthalten:

$$z_1 = -1$$
$$z_2 = (-1)^2 + (-1) = 0$$
$$z_3 = 0^2 + (-1) = -1$$
$$z_4 = (-1)^2 + (-1) = 0$$

Die Zahlenfolge springt zwischen -1 und 0.
Sie ist also beschränkt. Zum Beispiel: $M = 1$

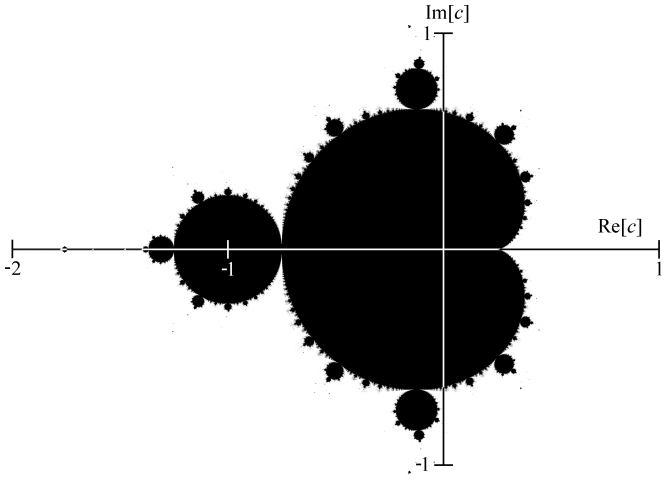
Die Zahl $c = 1$ ist zum Beispiel *nicht* in der Mandelbrotmenge enthalten:

$$z_1 = 1$$
$$z_2 = 1^2 + 1 = 2$$
$$z_3 = 2^2 + 1 = 5$$
$$z_4 = 5^2 + 1 = 26$$

Die Zahlenfolge ist *nicht* beschränkt.

Multipliziert man eine Zahl ≥ 1 mit sich selbst und addiert 1, dann ist das Ergebnis mindestens doppelt so groß.

Alle komplexen Zahlen in der Mandelbrotmenge sind im folgenden Bild schwarz dargestellt:



Alle reellen Zahlen im Intervall $[-2; 0{,}25]$ sind in der Mandelbrotmenge enthalten:

a) Begründe, warum für $0 \leq c \leq 0{,}25$ alle Folgenglieder im Intervall $[0; 0{,}5]$ liegen.

b) Begründe, warum für $-1 \leq c \leq 0$ alle Folgenglieder im Intervall $[c; 0]$ liegen.

c) Begründe, warum für $-2 \leq c \leq -1$ alle Folgenglieder im Intervall $[c; -c]$ liegen.

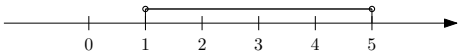
5.1 **a)** $x \in]-\infty; 2[\cup]3; \infty[$ **b)** $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ **c)** $x \in \mathbb{R}$
d) $x \in]0; 1[\cup]1; \infty[$ **e)** $x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$ **f)** $x \in]-\infty; -1[\cup]1; \infty[$

5.2 **a)** 0 **b)** 3 **c)** 2 **d)** $-\frac{1}{2}$

5.3 **a)** -2 **b)** 0 **c)** $-\infty$

5.4 **a)** $0{,}5$ **b)** $-\infty$ **c)** 0

5.5 **a)** $\frac{4 \cdot n^3 - 4 \cdot n^2 - 2 \cdot n - 11}{n^3 + 4 \cdot n^2 + n + 4}$ **b)** 4

5.6 **a)** $]1; 5[$ 

b) $\varepsilon = 1{,}5, \ a = -2$ **c)** $\varepsilon = 0{,}3, \ a = -0{,}02$

5.7 **a)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 3$
b) **i)** Ab dem 101. Folgenglied. **ii)** Ab dem 1001. Folgenglied. **iii)** Ab dem 10001. Folgenglied.

5.8 **a)** $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = -12$ **b)** ab dem 35. Folgenglied

5.9 **a)** Wenn n gerade ist, dann ist $a_n > 5$. Wenn n ungerade ist, dann ist $a_n < 5$. Die Folgenglieder werden also immer abwechselnd größer und wieder kleiner.
b) ab dem 11. Folgenglied

5.10 **a)** ab dem 1389. Folgenglied **b)** $n > \frac{\log(M)}{\log(1{,}01)}$ bzw. ab dem $\left(\lfloor \frac{\log(M)}{\log(1{,}01)} \rfloor + 1\right)$. Folgenglied

5.11 **a)** **1)** $s_n = 16 - 16 \cdot 0{,}5^n$ **2)** 16
b) **1)** $s_n = \frac{81}{16} - \frac{81}{16} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ **2)** $\frac{81}{16}$
c) **1)** $s_n = 1 - 0{,}1^n$ **2)** 1

5.12 **a)** Die Seitenlängen werden mit jedem Schritt auf ein Drittel der vorherigen Seitenlänge gekürzt. Die Anzahl der Seiten vervierfacht sich (jede Seite wird in vier neue Seiten verwandelt).
Für den Umfang gilt also: $u_{n+1} = u_n \cdot \frac{4}{3}$. Also ist (u_n) eine geometrische Folge mit $q = \frac{4}{3}$.
b) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \infty$, weil $q = \frac{4}{3} > 1$ ist.
c) Hinweise: Wie viele Seiten gibt es nach n Durchläufen?
Wie viele neue Dreiecke entstehen beim n-ten Durchlauf?
Wie groß ist der Flächeninhalt der neuen Dreiecke beim n-ten Durchlauf?
Um wie viel wächst der Flächeninhalt also beim n-ten Durchlauf?
d) $A = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{5} \cdot a^2$

5.13 **a)** $x_1 = \frac{a \cdot b}{a + b}$ **b)** $q = \frac{a}{a + b}$ **c)** Summenformel **d)** $A = \frac{a^2 \cdot b}{2 \cdot a + b}$ **e)** $\frac{2}{3}$

5.14 **a)** $z_1 = c \in [0; 0{,}5], \quad z_{n+1} = z_n^2 + c \geq 0 + 0 = 0, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c \leq 0{,}25 + 0{,}25 = 0{,}5 \implies z_{n+1} \in [0; 0{,}5]$
b) $z_1 = c \in [c; 0], \quad z_{n+1} = z_n^2 + c \geq 0 + c = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c \leq c^2 + c = \underbrace{c}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(c+1)}_{\geq 0} \leq 0 \implies z_{n+1} \in [c; 0]$
c) $z_1 = c \in [c; -c], \quad z_{n+1} = z_n^2 + c \geq 0 + c = c, \quad z_{n+1} = z_n^2 + c \leq c^2 + c \leq -c$, weil $c^2 + 2 \cdot c = \underbrace{c}_{\leq 0} \cdot \underbrace{(c+2)}_{\geq 0} \leq 0$.
$\implies z_{n+1} \in [c; -c]$

6. Weitere nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Weitere nichtlineare Gleichungen und Gleichungssysteme

Auf den folgenden Materialien findest du Erklärungen sowie grundlegende Aufgaben zu diesem Thema:

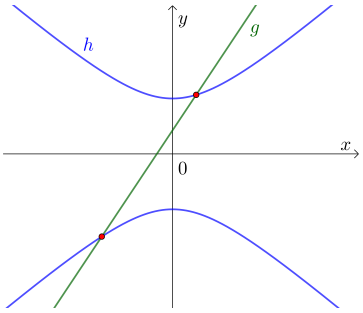
- Arbeitsblatt – Gleichungssysteme in 2 Variablen
- Arbeitsblatt – Gleichungssysteme in 3 Variablen

6.1

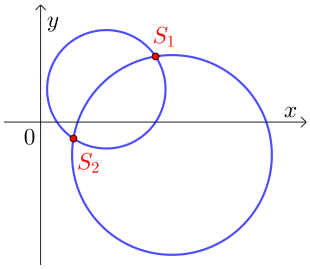
Die Gerade g und die Hyperbel h mit

$$g\colon\ -3\cdot x+2\cdot y=4 \qquad\qquad h\colon\ -3\cdot x^2+4\cdot y^2=88$$

schneiden einander in 2 Punkten.
Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.



6.2



Die beiden dargestellten Kreise haben die folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-2)^2=13\\(x-8)^2+(y+2)^2=37\end{cases}$$

a) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

Hinweis: Subtrahiere eine Gleichung von der anderen Gleichung.

b) Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

6.3

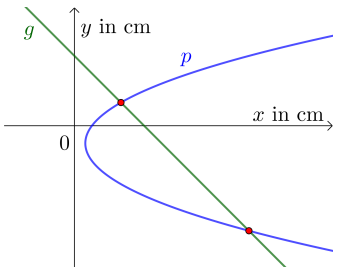
Die Gerade g und die Parabel p mit

$$g\colon\ x+y=6 \qquad p\colon\ y^2-4\cdot x+3\cdot y+6=0 \qquad (x,y \text{ in cm})$$

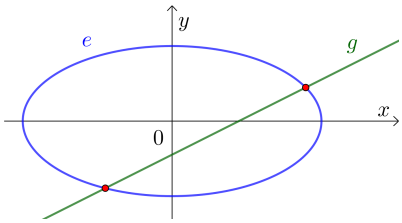
sind rechts unten dargestellt.

a) Die Gerade und die Parabel schneiden einander in 2 Punkten.
Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

b) ☆ Die senkrechte Gerade $x=c$ schneidet die Parabel p in 2 Punkten.
Berechne $c\in\mathbb{R}$ so, dass die Entfernung dieser beiden Schnittpunkte 23 cm beträgt.



6.4



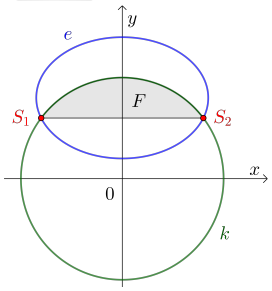
Die Gerade g und die Ellipse e mit

$$g\colon\ -x + 2 \cdot y = -2 \qquad\qquad e\colon\ x^2 + 4 \cdot y^2 = 20$$

schneiden einander in 2 Punkten.

Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.

6.5



Der Kreis k und die Ellipse e mit

$$k\colon\ x^2 + y^2 = 25 \qquad\qquad e\colon\ x^2 + 2 \cdot (y-4)^2 = 18$$

schneiden einander in 2 Punkten.

a) Berechne die Schnittpunkte S_1 und S_2.

b) Berechne den Inhalt F der grau markierten Fläche.

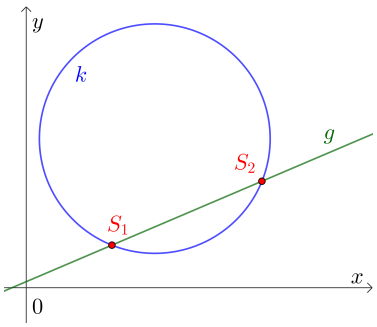
6.6

Die Gerade g und der Kreis k mit

$$g\colon\ -3 \cdot x + 7 \cdot y = 2 \qquad\qquad k\colon\ (x-6)^2 + (y-7)^2 = 29$$

schneiden einander in den Punkten S_1 und S_2.

Berechne die Entfernung zwischen diesen beiden Schnittpunkten.



6.7

Für die hyperbolischen Winkelfunktionen sinh, cosh, tanh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\underbrace{\boldsymbol{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}}_{\textbf{Sinus hyperbolicus}} \qquad \underbrace{\boldsymbol{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}}_{\textbf{Cosinus hyperbolicus}} \qquad \underbrace{\boldsymbol{\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}}}_{\textbf{Tangens hyperbolicus}}$$

Ermittle die Umkehrfunktionen der hyperbolischen Winkelfunktionen.

Forme dafür die folgenden Gleichungen nach x um.

Hinweis: Substituiere $u = e^x$.

a) $\sinh(x) = y$ **b)** $\cosh(x) = y$ **c)** $\tanh(x) = y$

6.8

Zeige, dass die Ungleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Für welche Werte von x gilt Gleichheit?

a) $x^2 + 1 \geq 2 \cdot x$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{x^2 - 4 \cdot x + 13}} \leq 1$ **c)** $-\dfrac{1}{4} \leq \sin^2(x) - \sin(x)$ **d)** $\sin^2(x) - \sin(x) \leq 2$

6.9

Zerlege das Polynom in Linearfaktoren.

Hinweis: Suche nach ganzzahligen Nullstellen.

a) $x^2 - 6 \cdot x - 91$

b) $x^3 + 3 \cdot x^2 + 2 \cdot x$

c) $x^4 - 10 \cdot x^3 + 35 \cdot x^2 - 50 \cdot x + 24$

d) $2 \cdot x^4 - 3 \cdot x^3 - x^2 + 3 \cdot x - 1$

6.10

Zerlege das Polynom in Linearfaktoren.

a) $x^2 - 3 \cdot x - 40$ **b)** $6 \cdot x^2 - x - 1$ **c)** $a^2 - 3 \cdot a \cdot b - 40 \cdot b^2$ **d)** $6 \cdot a^2 - a \cdot b - b^2$

6.11

Löse das gegebene Gleichungssystem.

a) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 \cdot x - 6 \cdot y - 37 = 0 \\ 3 \cdot x - y = 13 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 = 88 \\ 2 \cdot x - 3 \cdot y = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2 \cdot x + 4 \cdot y - 80 = 0 \\ x^2 + y^2 - 12 \cdot x - 24 \cdot y + 130 = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 192 \\ 9 \cdot x^2 - 4 \cdot y^2 = 405 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 = 308 \\ x - 3 \cdot y^2 = 0 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 128 \\ x^2 + y^2 - 16 \cdot x + 32 = 0 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x - y + \sqrt{x - y} = 6 \\ x^3 - y^3 = 19 \end{cases}$

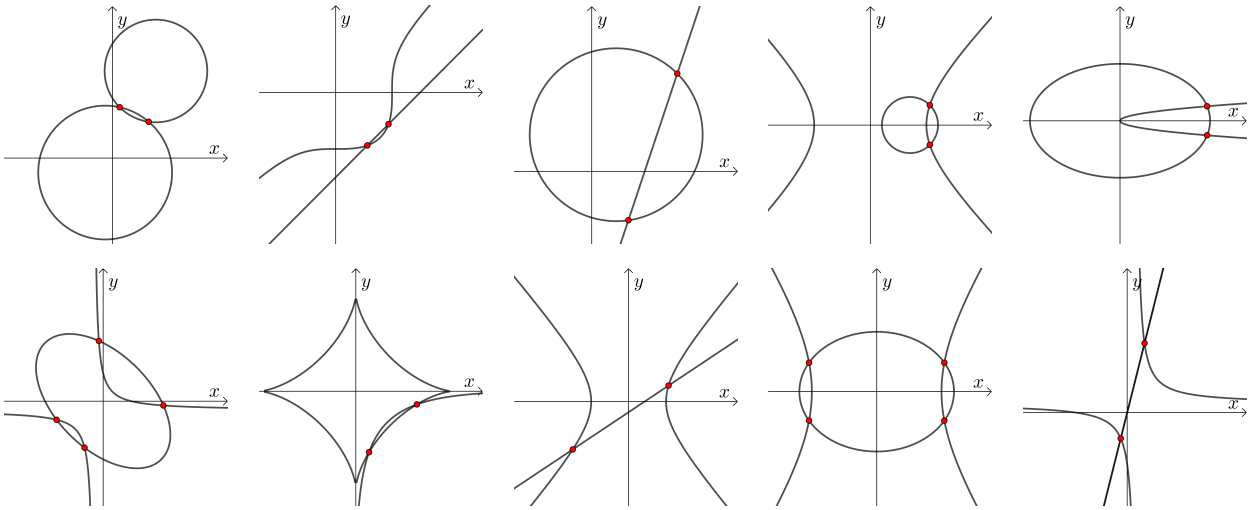
h) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 8 \\ \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 34 \end{cases}$

i) $\begin{cases} \sqrt{\frac{5 \cdot x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{5 \cdot x}} = 2 \\ x \cdot y - (x + y) = 6 \end{cases}$

j) $\begin{cases} x + y + x \cdot y = 3 \\ x^2 + y^2 + x \cdot y = 39 \end{cases}$

Die Lösungen der Gleichungen und Gleichungssysteme sind unten dargestellt.

Ordne die 10 Gleichungssysteme **a)** – **j)** den 10 Bildern zu:



6.12

Wir wählen eine Zahl $a \in]0;4]$.
Betrachte die Funktion $f:\ [0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = a \cdot x \cdot (1-x)$.

a) Erkläre, weshalb $0 \le f(x) \le 1$ für alle $x \in [0;1]$.

b) Für welche $x \in [0;1]$ gilt $f(x) = x$?

c) Für welche $x \in [0;1]$ gilt $f(\,f(x)\,) = x$? Hinweis: Zwei Lösungen kennst du schon.

6.13

Zeige, dass x_0 eine Lösung der gegebenen Gleichung ist.
Vereinfache anschließend den gegebenen Ausdruck für x_0.

a) $x^3 + 3 \cdot x - 14 = 0$, $x_0 = \sqrt[3]{7 + 5 \cdot \sqrt{2}} + \sqrt[3]{7 - 5 \cdot \sqrt{2}}$

b) $x^3 + 9 \cdot x - 10 = 0$, $x_0 = \sqrt[3]{5 + 2 \cdot \sqrt{13}} + \sqrt[3]{5 - 2 \cdot \sqrt{13}}$

6.14

Seien a, $b \in \mathbb{R}$. Unter welcher Bedingung an a und b gibt es Zahlen u, $v \in \mathbb{R}$, sodass

$$u \cdot v = -\left(\frac{a}{3}\right)^3 \qquad \text{und} \qquad u + v = -b?$$

Zeige: $x_0 = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}$ ist Lösung der Gleichung $x^3 + a \cdot x + b = 0$. Es folgt die Cardanische Formel.

6.15

Seien $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ nicht alle null und $w_1, w_2, \ldots, w_n \in \mathbb{R}$.
In dieser Aufgabe interessieren wir uns für die folgende Funktion:

$$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad F(x) = \sum_{i=1}^{n} (v_i \cdot x + w_i)^2$$

a) Erkläre mit wenigen Worten, weshalb ...

... F eine quadratische Funktion ist. Es gibt also a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$, sodass $F(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$.

... F keine negativen Werte annimmt.

... F einen kleinsten Wert annimmt.

b) Zeige: Der Scheitel der Funktion F liegt an der Stelle

$$x_S = -\frac{\sum_{j=1}^{n} v_j \cdot w_j}{\sum_{j=1}^{n} v_j^2}\,.$$

c) Berechne den Scheitelwert $y_S = F(x_S)$.

d) Füge die Ergebnisse der vorigen Schritte zusammen, um folgende Ungleichung zu zeigen:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \cdot w_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} w_i^2\right) \tag{1}$$

e) Weshalb gilt (1) auch, wenn alle $v_i = 0$? Das ist die Ungleichung von Cauchy-Schwarz.

6.1 **a)** $S_1 = (2 \mid 5)$, $S_2 = (-6 \mid -7)$ **b)** Entfernung: 14,42...

6.2 **a)** $S_1 = (7 \mid 4)$, $S_2 = (2 \mid -1)$ **b)** Entfernung: 7,071...

6.3 **a)** $S_1 = (4 \mid 2)$, $S_2 = (15 \mid -9)$, Entfernung: 15,55... cm **b)** $c = 34$

6.4 $S_1 = (-2 \mid -2)$, $S_2 = (4 \mid 1)$, Entfernung: 6,708...

6.5 **a)** $S_1 = (-4 \mid 3)$, $S_2 = (4 \mid 3)$ **b)** $F = 11{,}18...$

6.6 Die Schnittpunkte $S_1 = (4 \mid 2)$ und $S_2 = (11 \mid 5)$ haben die Entfernung $\sqrt{58} = 7{,}615....$

6.7 **a)** $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ **b)** $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ **c)** $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

6.8 **a)** $x = 1$

b) $x = 2$

c) $x \in \{\frac{\pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5 \cdot \pi}{6} + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

d) $x \in \{-\frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$

6.9 **a)** $(x-13) \cdot (x+7)$ **b)** $x \cdot (x+2) \cdot (x+1)$ **c)** $(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$ **d)** $(x-1)^2 \cdot (x+1) \cdot (2 \cdot x - 1)$

6.10 **a)** $(x-8) \cdot (x+5)$ **b)** $(2 \cdot x - 1) \cdot (3 \cdot x + 1)$

c) $(a - 8 \cdot b) \cdot (a + 5 \cdot b)$ **d)** $(2 \cdot a - b) \cdot (3 \cdot a + b)$

6.11 **a)** $\{(3 \mid -4), (7 \mid 8)\}$ **b)** $\{(5 \mid 2), (-7 \mid -6)\}$

c) $\{(5 \mid 5), (1 \mid 7)\}$ **d)** $\{(7 \mid 3), (7 \mid -3), (-7 \mid 3), (-7 \mid -3)\}$

e) $\{(12 \mid 2), (12 \mid -2)\}$ **f)** $\{(12 \mid 4), (12 \mid -4)\}$

g) $\{(3/2 \mid -5/2), (5/2 \mid -3/2)\}$ **h)** $\{(27 \mid -125), (125 \mid -27)\}$

i) $\{(2 \mid 8), (-3/4, -3)\}$ **j)** $\{(-2 \mid -5), (-5 \mid -2), (3 + 2 \cdot \sqrt{3} \mid 3 - 2 \cdot \sqrt{3}), (3 - 2 \cdot \sqrt{3}, 3 + 2 \cdot \sqrt{3})\}$

Obere Reihe: **c)**, **g)**, **a)**, **f)**, **e)** Untere Reihe: **j)**, **h)**, **b)**, **d)**, **i)**

6.12 **a)** a, x und $1 - x$ sind nicht negativ. Also ist auch $f(x) \geq 0$.
Der Scheitel von f ist an der Stelle $x = 0{,}5$. Also ist $f(x) \leq a0{,}5^2 \leq 1$.

b) $x = 0$ und $x = 1 - 1/a$

c) 0 und $1 - 1/a$. Falls $a > 3$, dann außerdem $\frac{a+1 \pm \sqrt{a^2 - 2 \cdot a - 3}}{2 \cdot a}$

6.13 **a)** $x_0 = 2$ **b)** $x_0 = 1$

6.14 $27 \cdot b^2 + 4 \cdot a^3 \geq 0$

7. Analytische Geometrie

7.1

Die Seiten eines ebenen Dreiecks liegen auf den folgenden Geraden:

$$\ell_1 : \ 3 \cdot x + 4 \cdot y = 42, \qquad \ell_2 : \ -4 \cdot x + 3 \cdot y = 19, \qquad \ell_3 : \ 7 \cdot x - 24 \cdot y = 98$$

Bestimme die Eckpunkte des Dreiecks und seine Seitenlängen. Weise mit einem Argument aus der Unterstufe nach, dass dieses Dreieck rechtwinkelig ist und berechne seinen Flächeninhalt.

7.2

Felix schneidet Geraden im $\mathbb{R}^3$ in Parameterdarstellung mit einer Ebene.
Dabei tritt das folgende Gleichungssystem auf:

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad x = -4 - 2 \cdot t \\ \text{II}: &\quad y = 6 + t \\ \text{III}: &\quad z = a + b \cdot t \\ \text{IV}: &\quad 4 \cdot x - 5 \cdot y - 3 \cdot z = -1 \end{aligned}$$

a) Wenn $a = 4$ und $b = 2$ gilt, dann schneidet die Gerade die Ebene in einem Punkt $S = (x \mid y \mid z)$.
Löse das Gleichungssystem, um diesen Schnittpunkt zu ermitteln.

b) Wenn das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, ist die Gerade in der Ebene enthalten.
Berechne a und b so, dass die Gerade in der Ebene enthalten ist.

7.3

Für die Geraden g und h_a im $\mathbb{R}^3$ gilt:

$$g\colon X = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{mit } t \in \mathbb{R}$$

$$h_a\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

a) Begründe, warum es keinen Wert $a \in \mathbb{R}$ gibt, für den die beiden Geraden g und h_a parallel sind.

b) Berechne jenen Wert $a \in \mathbb{R}$, für den die Geraden g und h_a einander in genau einem Punkt P schneiden, und berechne diesen Schnittpunkt P.

7.4

Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das Quadrat des Abstands vom Punkt
$P = (5 \mid -3 \mid 13)$ zum Punkt $(4 - 2 \cdot t \mid 3 \cdot t \mid 3 + 4 \cdot t)$ am kleinsten? Hinweis: Ergänze quadratisch.
Erkläre anschaulich, wie du mit dieser Überlegung den auf der Geraden $\ell = \{(4 - 2 \cdot t \mid 3 \cdot t \mid 3 + 4 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ nächsten Punkt an P findest. Dieser nächste Punkt wird manchmal auch als Lotpunkt bezeichnet. Ein Lot hat immer etwas mit einem rechten Winkel zu tun. Kannst du erklären, warum diese Bezeichnung sinnvoll ist? Der Abstand zwischen dem Punkt P und seinem Lotpunkt auf der Geraden ist dann der Abstand von P zur Geraden. Berechne den Lotpunkt und den Abstand des Punkts von der Geraden in den folgenden Fällen:

a) $\ell = \{(4 - 5 \cdot t \mid 7 - 5 \cdot t \mid 12 - 10 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $P = (5 \mid 0 \mid 0)$

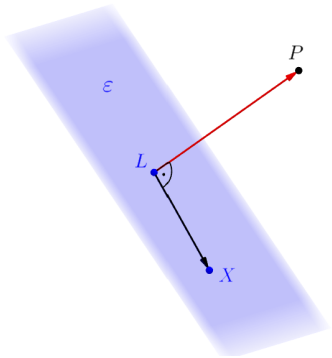
b) $\ell = \{(-4 + 10 \cdot t \mid -t \mid 6 + 3 \cdot t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $P = (4 \mid 1 \mid -2)$

7.5

Die beiden Punkte $L = (3 \mid -5 \mid 1)$ und $X = (x \mid y \mid z)$ liegen in der Ebene ε.

Der Punkt $P = (-5 \mid -9 \mid 7)$ liegt *nicht* in der Ebene ε.

Der Vektor $\overrightarrow{LP}$ steht im rechten Winkel auf den Vektor $\overrightarrow{LX}$.



a) Trage die richtige Zahl in das Kästchen ein:

$$\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LX} = \boxed{}$$

b) Ermittle eine Ebenengleichung von ε, das heißt:
Berechne Zahlen a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ so, dass

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

genau für jeden Punkt $X = (x \mid y \mid z)$ in der Ebene ε gilt.

Für eine andere Ebene π gilt: $3 \cdot x - 5 \cdot y + 2 \cdot z = -32$

c) Ermittle eine Parameterdarstellung jener Gerade g, die durch P verläuft und normal auf π steht.

d) Berechne den Schnittpunkt dieser Gerade g und der Ebene π.

e) Berechne den Abstand von P zu π.

7.6

Durch den Punkt P ist eine Gerade, die normal auf die Ebene π steht, zu legen. Schneide dann die Ebene mit dieser Geraden. Der Schnittpunkt P_0 ist dann der *Lotpunkt* des Punktes P auf die Ebene π. Berechne den Lotpunkt in den folgenden Fällen.

a) $\pi: \; -2 \cdot x + 3 \cdot y - 6 \cdot z = -6$, $P = (-1 \mid 10 \mid -10)$

b) $\pi: \; 4 \cdot x - 4 \cdot y - 7 \cdot z = 8$, $P = (-5 \mid 8 \mid 3)$

c) $\pi: \; -14 \cdot x + 5 \cdot y + 2 \cdot z = -7$, $P = (-13 \mid 8 \mid -2)$

d) $\pi: \; 4 \cdot x + 4 \cdot y - 7 \cdot z = 1$, $P = (9 \mid 9 \mid -13)$.

Der Lotpunkt hat die ausgezeichnete Eigenschaft, dass jeder andere Punkt auf der Ebene noch größeren Abstand zu P hat. Erkläre, weshalb ausgerechnet der Lotpunkt diese besondere Eigenschaft hat.

Hinweis: Sei X irgendein Punkt auf der Ebene π. Erkläre, weshalb die Vektoren $\overrightarrow{XP}$ und $\overrightarrow{P_0P}$ normal aufeinander stehen. Argumentiere so, dass $|\overrightarrow{XP}|^2 = |\overrightarrow{XP_0}|^2 + |\overrightarrow{P_0P}|^2 \geq |\overrightarrow{P_0P}|^2$ und damit, dass $|\overrightarrow{XP}| \geq |\overrightarrow{P_0P}|$. Wann gilt denn Gleichheit?

7.7

Gegeben seien Punkte A, B, C, P und Q im Raum. Finde heraus, ob die Gerade durch P und Q einen Schnittpunkt mit der Ebene hat, die A, B und C enthält und berechne diesen Schnittpunkt, falls er existiert. Muss man dafür ein Gleichungssystem mit 3 Variablen betrachten, oder führt die Normalvektordarstellung der Ebene zu einem einfacheren Weg? Gibt es einen Fall, den man gesondert behandeln muss?

a) $A = (1 \mid 2 \mid 3)$, $B = (4 \mid 3 \mid 0)$, $C = (5 \mid 4 \mid 1)$, $P = (2 \mid 1 \mid 2)$, $Q = (6 \mid 7 \mid 10)$.

b) $A = (-1 \mid 2 \mid 3)$, $B = (7 \mid 4 \mid 1)$, $C = (1 \mid 2 \mid 1)$, $P = (1 \mid 1 \mid -1)$, $Q = (3 \mid 5 \mid 1)$.

c) $A = (4 \mid -1 \mid -2)$, $B = (3 \mid 0 \mid -1)$, $C = (-2 \mid 2 \mid 3)$, $P = (2 \mid 2 \mid 1)$, $Q = (5 \mid 1 \mid -1)$

d) $A = (2 \mid 0 \mid 1)$, $B = (1 \mid -2 \mid 3)$, $C = (4 \mid -1 \mid -2)$, $P = (1 \mid -7 \mid 4)$, $Q = (1 \mid 3 \mid 2)$

7.8

Betrachten wir 2 windschiefe Gerade g und h im Raum, also Geraden die weder parallel sind, noch einen Schnittpunkt besitzen. Finde einen Punkt P von g und einen Punkt Q von h, sodass die Verbindungsstrecke von P nach Q normal auf beide Geraden steht. Erkläre, warum für jeden Punkt $P' \neq P$ von g und jeden Punkt $Q' \neq Q$ von h, der Abstand von P' zu Q' größer ist als der Abstand von P zu Q. Was würde passieren, wenn man im Fall von 2 schneidenden Geraden analog rechnet?

a) $g = \{(-4 + 2 \cdot t \mid -t \mid 10 - 2t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $h = \{(2 + s \mid 7 - 2 \cdot s \mid -12 + 5 \cdot s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

b) $g = \{(-5 + 4 \cdot t \mid 2 - 2 \cdot t \mid 3 + t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, $h = \{(5 + 3 \cdot s \mid -2 + s \mid 11 + 2 \cdot s) \mid s \in \mathbb{R}\}$

7.9

Was kann damit gemeint sein, dass man einen Punkt P oder eine Strecke $\overline{PQ}$ im Raum an einer Ebene E spiegelt? Bestimme die Spiegelungen in den folgenden Situationen explizit.

a) $E = \{(2 + 6 \cdot s + 2 \cdot t \mid -3 + 2 \cdot s + 3 \cdot t \mid 6 - s + 2 \cdot t) : s, t \in \mathbb{R}\}$, $P = (1 \mid -3 \mid 2)$

b) $E = \{(x \mid y \mid z) \in \mathbb{R}^3 : 2 \cdot x - y + 2 \cdot z = -2\}$, $P = (2 \mid 1 \mid 1)$, $Q = (-1 \mid -2 \mid 0)$

7.10

Sei π die Ebene mit der Gleichung $-2 \cdot x + y + 2 \cdot z = 14$, P der Punkt $(2 \mid 1 \mid 3)$ und ℓ die Gerade durch den Punkt $(-1 \mid 1 \mid 2)$ mit Richtungsvektor $(1 \mid 2 \mid -1)$. Finde einen Richtungsvektor für eine Gerade durch P, die parallel zu π ist und die ℓ schneidet. Überlege, warum es nur eine solche Gerade gibt.

7.1 Das Dreieck hat die Eckpunkte $(2 \mid 9)$, $(14 \mid 0)$ und $(-10 \mid -7)$ sowie die Seitenlängen 15, 25 und 20. Aus der Umkehrung vom Satz des Pythagoras ($15^2 + 20^2 = 25^2$) folgt, dass das Dreieck rechtwinkelig ist und damit den Flächeninhalt 150 hat.

7.2 **a)** $S = (2 \mid 3 \mid -2)$ **b)** $a = -15,\ b = -\frac{13}{3}$

7.3 **a)** Damit die angegebenen Richtungsvektoren der beiden Vektoren parallel sind, müsste

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$$

für eine bestimmte Zahl $k \in \mathbb{R}$ gelten.
Aus der ersten Komponente folgt, dass diese Zahl $k = \frac{1}{2}$ sein müsste.
Aus der zweiten Komponente folgt aber gleichzeitig, dass diese Zahl $k = 3$ sein müsste.
Also können die beiden Geraden nicht parallel sein.

b) $a = 4$ $P = (-1 \mid 4 \mid -3)$

7.4 siehe auch Video $P_0 = (2 \mid 3 \mid 7)$, $|\overrightarrow{P_0P}| = 9$

a) $P_0 = (-1 \mid 2 \mid 2)$, $|\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{44} = 2 \cdot \sqrt{11}$

b) $P_0 = (1 \mid -\frac{1}{2} \mid \frac{15}{2})$, $|\overrightarrow{P_0P}| = \sqrt{\frac{203}{2}}$

7.5 **a)** $\overrightarrow{LP} \cdot \overrightarrow{LX} = 0$ **b)** $-8 \cdot x - 4 \cdot y + 6 \cdot z = 2$ **c)** $g\colon X = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ **d)** $S = (-11 \mid 1 \mid 3)$ **e)** $\sqrt{152} = 12{,}32\ldots$

7.6 siehe auch Video **a)** $P_0 = (3 \mid 4 \mid 2)$ **b)** $P_0 = (-1 \mid 4 \mid -4)$ **c)** $P_0 = (1 \mid 3 \mid -4)$ **d)** $P_0 = (1 \mid 1 \mid 1)$

7.7 **a)** $S = (10 \mid 13 \mid 18)$

b) $S = (\frac{5}{4} \mid \frac{3}{2} \mid -\frac{3}{4})$

c) Der Vektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ steht normal auf den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und P bzw. Q liegen nicht in der Ebene, die von A, B und C aufgespannt wird. Daher sind Gerade und Ebene parallel. Alternativ kann man die Parameterform der Gerade in eine Ebenengleichung in Normalvektorform einsetzen und feststellen, dass die resultierende Gleichung keine Lösung besitzt.

d) Der Vektor $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ steht normal auf den Vektor $\overrightarrow{PQ}$ und P bzw. Q liegen in der Ebene, die von A, B und C aufgespannt wird. Daher liegt die Gerade in der Ebene. Alternativ kann man die Parameterform der Gerade in eine Ebenengleichung in Normalvektorform einsetzen und feststellen, dass die resultierende Gleichung immer erfüllt ist.

7.8 siehe auch Video

a) $P = (\frac{98}{39} \mid -\frac{127}{39} \mid \frac{136}{39})$ und $Q = (\frac{206}{39} \mid \frac{17}{39} \mid \frac{172}{39})$

b) $P = (\frac{121}{15} \mid -\frac{68}{15} \mid \frac{94}{15})$ und $Q = (\frac{4}{5} \mid -\frac{17}{5} \mid \frac{41}{5})$

7.9 **a)** Schnittpunkt S der Ebene mit jener Gerade berechnen, die normal auf die Ebene steht und durch P verläuft: $S = (\frac{26}{9} \mid -\frac{61}{9} \mid \frac{16}{9})$
Gespiegelter Punkt $P' = P + 2 \cdot \overrightarrow{PS} = (\frac{43}{9} \mid -\frac{95}{9} \mid \frac{50}{9})$

b) Gespiegelte Strecke hat die Endpunkte $P' = (-\frac{10}{9} \mid \frac{23}{9} \mid -\frac{19}{9})$ und $Q' = (-\frac{17}{9} \mid -\frac{14}{9} \mid -\frac{8}{9})$

7.10 Zum Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Die gesuchte Gerade muss in jener Ebene liegen, die parallel zu π ist und durch den Punkt P verläuft.
Diese Ebene hat einen eindeutigen Schnittpunkt mit der Gerade ℓ.
Die gesuchte Gerade ist also tatsächlich eindeutig, weil sie durch diesen Schnittpunkt und P verlaufen muss.

Dieses Werk des Projekts MmF unterliegt einer CC BY-NC-ND 4.0 Lizenz.
https://mmf.univie.ac.at