Koordinatengeometrie 3D

Aufgabensammlung

Gerhard Pillwein

René Descartes (1596 – 1650) verknüpfte Geometrie und Algebra und wurde so zu einem Wegbereiter der Analytischen Geometrie: Hier werden geometrische Aufgaben rechnerisch mit Hilfe von Koordinaten gelöst. Vektoren sind ein unverzichtbares Hilfsmittel.

Die **Analytische Geometrie** ist zu einem riesigen und verzweigten Gebiet angewachsen. Um keine überbordende Erwartung zu wecken, wurde als Titel der Aufgabensammlung nicht „Analytische Geometrie 3D“ gewählt, sondern „Koordinatengeometrie 3D“. Gearbeitet wird mit Punkten und Vektoren sowie mit Geraden und Ebenen; die analytische Darstellung von Kurven und Flächen wird nicht behandelt.

Die Aufgaben richten sich vor allem an Studierende des **Lehramts Mathematik** und sollen eine vertiefte Auseinandersetzung mit raumgeometrischen Inhalten ermöglichen, die über das an Schulen oft übliche formale Arbeiten mit Methoden und Formeln der Vektorrechnung hinausgeht. Die Grundlagen der Vektorrechnung werden als bekannt vorausgesetzt (im Ausmaß des Lehrplans für Mathematik an Realgymnasien). Sie sind im Abschnitt **Grundlagen** zusammenfassend aufgelistet.

Die Aufgaben sind nach Inhalten geordnet, die naturgemäß verzahnt sind. Die **Orthogonalität** spielt dabei eine zentrale Rolle, entsprechend ihrer Bedeutung in der Euklidischen Geometrie. Die Aufgaben werden anhand von korrekt konstruierten **Angabebildern** gestellt (also nicht bloß anhand symbolischer Skizzen), welche die Verortung im Koordinatensystem klar erkennen lassen und so unmittelbar die Raumvorstellung ansprechen. Die Bandbreite der Aufgaben reicht von ganz leicht bis recht schwierig.

Mehrere Aufgaben wurden (adaptiert) dem Lehrwerk **Raumgeometrie** (Pillwein, Asperl, Wischounig; Verlag ÖBV; approbiert für „Darstellende Geometrie“ und „Angewandte computergestützte Geometrie“) entnommen, wo sie mit Methoden des CAD gelöst werden.

Inhaltsverzeichnis

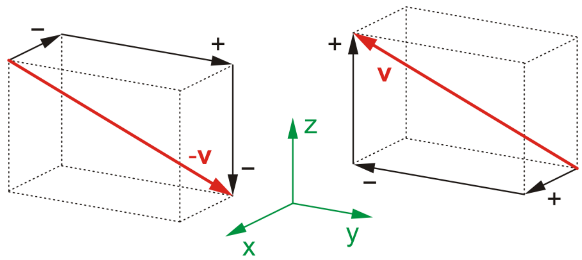
Grundlagen

Vektoren

Ein **Vektor v** wird durch einen Pfeil festgelegt. Alle anderen Pfeile, die **parallel**, **gleich lang** und **gleich orientiert** sind, legen denselben Vektor fest. Ein Vektor besteht also aus unendlich vielen Pfeilen.

Ändert man die Orientierung der Pfeile eines Vektors **v**, erhält man den zu **v** entgegengesetzten Vektor **-v**.

Zu jedem Pfeil gehört ein Quader, dessen Kanten parallel zu den Koordinatenachsen sind. Die Längen der Kanten sind die Beträge der **Pfeilkoordinaten**. Bewegt man sich vom Pfeilanfang entlang eines **Koordinatenwegs** (er besteht aus drei Kanten) zur Pfeilspitze, so erhalten die Pfeilkoordinaten ein **Vorzeichen**. Das Bild zeigt jeweils den Koordinatenweg xyz für entgegengesetzt orientierte Pfeile.



Da alle Pfeile eines Vektors **v** dieselben Koordinaten haben, bezeichnet man sie als **Vektorkoordinaten** und schreibt (in Spaltenform oder Zeilenform):

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x\,/\,y\,/\,z)$$

Wenn **v** die Koordinaten (x/y/z) hat, so hat **-v** die Koordinaten (-x/-y/-z).

Zwei Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ sind genau dann gleich, wenn ihre Koordinaten gleich sind.

Betrag eines Vektors, Einheitsvektor

Der **Betrag |v|** eines Vektors **v** ist die Länge seiner Pfeile. Die Berechnung des Betrags erfolgt mit dem Satz von Pythagoras. Ein Vektor **v** mit **|v|** = 1 wird **Einheitsvektor** genannt.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

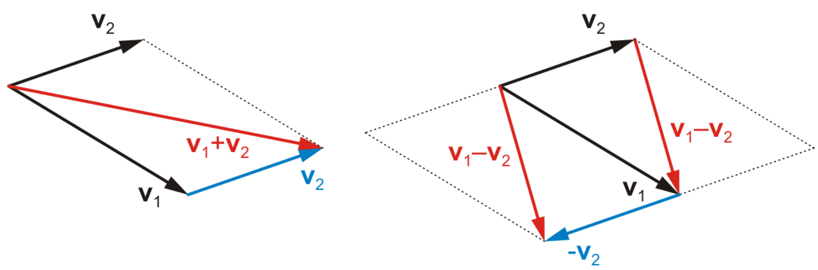
Rechnen mit Vektoren

Ein Vektor hat eine geometrische Definition und eine Koordinatendarstellung. Bei den Rechenoperationen ist das genauso. Diese „Parallelität von Geometrie und Arithmetik“ ermöglicht den erfolgreichen Einsatz der Vektorrechnung in der Analytischen Geometrie.

Addition und Subtraktion

Die Skizzen definieren die Addition und die Subtraktion zweier Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ aus geometrischer Sicht.

Die Subtraktion $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ kann als Addition $\mathbf{v}_1 + (-\mathbf{v}_2)$ aufgefasst werden.



Der geometrischen Definition entspricht die Addition bzw. Subtraktion der Koordinaten von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$:

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = (x_1 + x_2\,/\,y_1 + y_2\,/\,z_1 + z_2) \qquad \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = (x_1 - x_2\,/\,y_1 - y_2\,/\,z_1 - z_2)$$

Die Addition zweier entgegengesetzter Vektoren **v** und **-v** führt auf den **Nullvektor o** = (0/0/0). Er hat keine Richtung und keine Orientierung.

Die Addition zweier gleich langer Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ergibt einen Summenvektor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, der den Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ halbiert. Der Differenzvektor $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ist hier orthogonal zum Summenvektor $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Die Addition ist kommutativ und assoziativ, die Subtraktion natürlich nicht.

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \qquad\qquad \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3$$

Multiplikation mit einem Skalar

Wenn sich zwei Vektoren nur in ihrer Länge oder Orientierung unterscheiden (ihre Pfeile also parallel sind), nennt man sie **kollinear** oder **parallel**. Man kann den einen Vektor durch Multiplizieren mit einer geeigneten Zahl in den anderen Vektor überführen.

Das Produkt $a \cdot \mathbf{v}$ eines Vektors $\mathbf{v}$ mit einem Skalar a (einer reellen Zahl) ist geometrisch wie folgt definiert:

Richtung: Der Vektor $a \cdot \mathbf{v}$ ist parallel zum Vektor $\mathbf{v}$

Länge: Der Vektor $a \cdot \mathbf{v}$ ist $|a|$-mal so lang wie der Vektor $\mathbf{v}$

Orientierung: Der Vektor $a \cdot \mathbf{v}$ hat für $a > 0$ dieselbe Orientierung wie der Vektor $\mathbf{v}$,
für $a < 0$ die entgegengesetzte Orientierung

Der geometrischen Definition entspricht die Multiplikation der Koordinaten des Vektors $\mathbf{v}$ mit dem Skalar a:

$$a \cdot \mathbf{v} = (a \cdot x \,/\, a \cdot y \,/\, a \cdot z)$$

Für $a = -1$ ergibt sich der zu $\mathbf{v}$ entgegengesetzte Vektor $-\mathbf{v}$, für $a = 0$ der Nullvektor $\mathbf{o}$.

Multipliziert man zwei oder mehr Vektoren mit Skalaren und addiert die Produkte, so bezeichnet man den Vektor $\mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2 + \ldots + a_n \cdot \mathbf{v}_n$ als **Linearkombination** der Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Für die Multiplikation mit einem Skalar und die Addition bzw. Subtraktion gelten folgende Rechenregeln:

$$a \cdot (\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2) = a \cdot \mathbf{v}_1 \pm a \cdot \mathbf{v}_2 \qquad\qquad (a_1 \pm a_2) \cdot \mathbf{v} = a_1 \cdot \mathbf{v} \pm a_2 \cdot \mathbf{v}$$

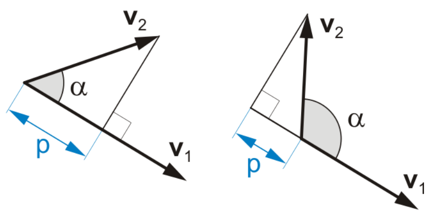
$$a \cdot (a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2) = (a \cdot a_1) \cdot \mathbf{v}_1 + (a \cdot a_2) \cdot \mathbf{v}_2$$

Skalares Produkt

Das skalare Produkt $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ zweier Vektoren ist geometrisch durch

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \cos\alpha$$

definiert, wobei α der Winkel zwischen $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ist ($0° \le \alpha \le 180°$).



Bezeichnet man die Länge der Projektion des Vektors $\mathbf{v}_2$ auf den Vektor $\mathbf{v}_1$ mit p, so gilt:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \pm|\mathbf{v}_1| \cdot p$$

Für spitze Winkel ($0° \le \alpha < 90°$) ist das skalare Produkt positiv, für stumpfe Winkel ($90° < \alpha \le 180°$) ist das skalare Produkt negativ. Für $\alpha = 90°$ ist das skalare Produkt 0.

Multipliziert man einen Vektor $\mathbf{v}$ mit sich selbst, so erhält man seinen quadrierten Betrag: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$

Wenn beide Vektoren die Länge 1 haben, so gilt: $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \cos\alpha$

Für die Berechnung des skalaren Produkts mit Hilfe von Koordinaten gilt:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

Auf der geometrischen Definition des skalaren Produkts und seiner einfachen Berechnung mit Koordinaten beruhen viele Anwendungen der Vektorrechnung. Die Koordinatenformel folgt aus dem Kosinussatz.

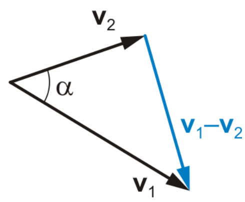
$$|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 = |\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - 2 \cdot |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \cos\alpha$$

$$\Rightarrow$$

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(|\mathbf{v}_1|^2 + |\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 \cdot y_1 \cdot y_2 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2)$$



Für das skalare Produkt, die Multiplikation mit einem Skalar und die Addition bzw. Subtraktion gelten folgende Rechenregeln:

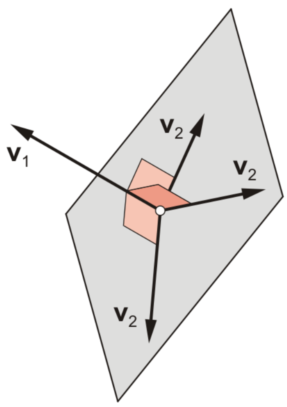
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \qquad \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v}_2) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 \pm \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2$$

$$(a_1 \cdot \mathbf{v}_1) \cdot (a_2 \cdot \mathbf{v}_2) = (a_1 \cdot a_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \qquad \mathbf{v} \cdot (a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2) = a_1 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1) + a_2 \cdot (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2)$$

Das skalare Produkt kann nicht distributiv sein, da der Term $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3$ sinnlos ist. Wenn man Klammern setzt, haben die Malpunkte verschiedene Bedeutungen. Die Ergebnisse sind offensichtlich verschieden.

$$\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3) \neq (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3$$

Die **Orthogonalität** spielt in der Geometrie eine zentrale Rolle. Zwei orthogonale Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ werden als **Normalvektoren** bezeichnet. Wenn ein Vektor $\mathbf{v}_1$ gegeben ist, dann sind alle Normalvektoren $\mathbf{v}_2$ zu einer Ebene parallel, die orthogonal zu $\mathbf{v}_1$ ist. Ändert man die Länge oder die Orientierung zweier Normalvektoren, so bleiben sie Normalvektoren.



Das rechnerische Kriterium für die Orthogonalität zweier Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ist das Verschwinden des skalaren Produkts:

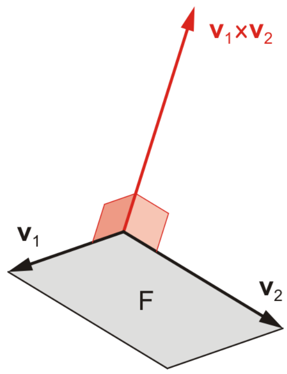
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \perp \mathbf{v}_2$$

Um einen beliebigen Normalvektor $\mathbf{v}_2 = (x/y/z)$ eines gegebenen Vektors $\mathbf{v}_1 = (3/-4/5)$ zu ermitteln, muss man die Gleichung $3x - 4y + 5z = 0$ lösen. Zwei Koordinaten von $\mathbf{v}_2$ können also frei gewählt werden. Man kann auch zwei Bedingungen an $\mathbf{v}_2$ stellen, wie etwa „parallel zu xy-Ebene" und „Länge ist 2". Man erhält in diesem Fall die Normalvektoren $\mathbf{v}_2 = (1{,}6/1{,}2/0)$ und $-\mathbf{v}_2$.

Die aus der analytischen Geometrie der Ebene bekannte Kippregel zum Ermitteln von Normalvektoren (Koordinaten vertauschen und ein Vorzeichen ändern) lässt sich in gewissem Sinn in den Raum übertragen: Die Vektoren $(-y_1/x_1/0)$, $(-z_1/0/x_1)$, $(0/-z_1/y_1)$ sind jene Normalvektoren des Vektors $\mathbf{v}_1 = (x_1/y_1/z_1)$, die zu einer Koordinatenebene parallel sind.

Gibt man zwei Vektoren vor, etwa $\mathbf{v}_1 = (3/-4/5)$ und $\mathbf{v}_2 = (6/7/-2)$, so muss ein gemeinsamer Normalvektor $\mathbf{v}_3 = (x/y/z)$ zwei Gleichungen erfüllen: $3x - 4y + 5z = 0$ und $6x + 7y - 2z = 0$. Hier kann nur mehr eine Koordinate frei gewählt werden. Wählt man $z = t$ und löst das Gleichungssystem, erhält man alle gemeinsamen Normalvektoren $\mathbf{v}_3 = (-0{,}6t/0{,}8t/t)$ von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$. Sie haben die gleiche Richtung, sind also parallel zu einer Geraden. Diese Überlegungen leiten zu einem weiteren Produkt zweier Vektoren über.

Vektorielles Produkt



Das vektorielle Produkt $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ zweier Vektoren ist ein Vektor, der geometrisch wie folgt definiert ist:

Richtung: Der Vektor $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ ist ein Normalvektor von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$

Länge: Der Betrag $|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$ entspricht dem Flächeninhalt F des von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ festgelegten Parallelogramms

Orientierung: Die Vektoren $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem

Hinweis: Ein Rechtssystem kann mit den ersten drei Fingern der rechten Hand gebildet werden.

Wenn keiner der beiden Vektoren der Nullvektor ist, so gilt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{o} \Leftrightarrow \mathbf{v}_1 \text{ und } \mathbf{v}_2 \text{ sind kollinear}$$

Wenn die beiden Vektoren orthogonale Einheitsvektoren sind, so hat auch der Produktvektor die Länge 1. Mit diesen drei Vektoren kann ein lokales Koordinatensystem definiert werden, in dem diese Vektoren die Koordinaten (1/0/0), (0/1/0) und (0/0/1) haben.

Für die Berechnung des vektoriellen Produkts mit Hilfe von Koordinaten gilt:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ z_1 & z_2 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \cdot z_2 - y_2 \cdot z_1 \\ -(x_1 \cdot z_2 - x_2 \cdot z_1) \\ x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \end{pmatrix}$$

Die Herleitung der Formel ist rechnerisch aufwändig. Sie beruht auf der Lösung des Gleichungssystems [$x_1 \cdot x + y_1 \cdot y + z_1 \cdot z = 0$, $x_2 \cdot x + y_2 \cdot y + z_2 \cdot z = 0$], die alle gemeinsamen Normalvektoren $\mathbf{v} = (x/y/z)$ von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ liefert. Unter diesen Normalvektoren wird jener ausgesucht, dessen Betrag gleich F ist und der mit $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ ein Rechtssystem bildet.

Für das vektorielle Produkt, die Multiplikation mit einem Skalar und die Addition bzw. Subtraktion gelten folgende Rechenregeln:

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1) \qquad \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \pm \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \pm \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$$

$$(a_1 \cdot \mathbf{v}_1) \times (a_2 \cdot \mathbf{v}_2) = (a_1 \cdot a_2) \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \qquad \mathbf{v} \times (a_1 \cdot \mathbf{v}_1 + a_2 \cdot \mathbf{v}_2) = a_1 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1) + a_2 \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_2)$$

Das vektorielle Produkt ist nicht assoziativ, wie das Gegenbeispiel $\mathbf{v}_1 = (1/0/0)$, $\mathbf{v}_2 = (0/1/0)$, $\mathbf{v}_3 = (0/1/0)$ erkennen lässt.

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \neq (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3$$

Da der Vektor $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3)$ orthogonal zu $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ ist, liegt er in der von $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ aufgespannten Ebene und kann daher als Linearkombination von $\mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$ dargestellt werden. Die entsprechende Formel ist als **Entwicklungssatz von Graßmann** bekannt.

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) = a \cdot \mathbf{v}_2 - b \cdot \mathbf{v}_3 \text{ mit } a = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \text{ und } b = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

Punkte und Vektoren

Ortsvektoren

Der Pfeil vom Ursprung O zu einem Punkt P(x/y/z) legt den **Ortsvektor P** von P fest. Er hat dieselben Koordinaten wie der Punkt P.

Eigentlich ist jeder Vektor ein Ortsvektor, da jeder Vektor aus unendlich vielen Pfeilen besteht und einer davon im Ursprung angehängt ist. Wenn also ein Vektor **v** die Koordinaten **v** = (2/3/4) hat, so kann er als Ortsvektor des Punktes P(2/3/4) aufgefasst werden.

Da ein Punkt P und sein Ortsvektor **P** dieselben Koordinaten haben, werden sie gerne identifiziert: P = **P**

Verbindungsvektoren, Anhängen eines Vektors

Der Pfeil von einem Punkt P zu einem Punkt Q legt den **Verbindungsvektor** $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$ von P und Q fest. Addiert man diesen Vektor zum Ortsvektor P, so erhält man den Ortsvektor Q. Daraus ergibt sich:

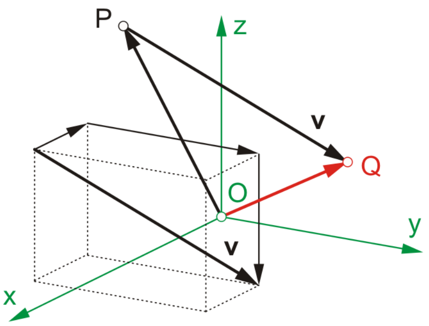
$$\overrightarrow{PQ} = Q - P$$

Einen Vektor **v** an einen Punkt P anhängen bedeutet, jenen Punkt Q zu berechnen, für den $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$ gilt:

$$Q = P + \mathbf{v}$$

Analog kann ein k-faches des Vektors **v** (also der Vektor k·**v**) an P angehängt werden. Ebenso kann der Vektor **v** vor dem Anhängen auf eine gewünschte Länge s gebracht werden.

$$Q = P + k \cdot \mathbf{v} \qquad\qquad Q = P + \frac{s}{|\mathbf{v}|} \cdot \mathbf{v}$$

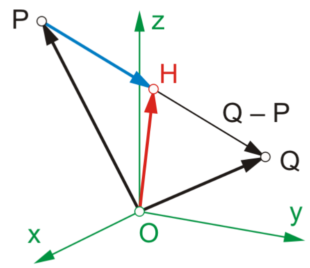


Halbieren und Teilen einer Strecke

Um den **Halbierungspunkt** H einer Strecke PQ zu berechnen, wird der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ halbiert und an P angehängt:

$$H = P + \frac{1}{2} \cdot (Q - P) = P + \frac{1}{2} \cdot Q - \frac{1}{2} \cdot P = \frac{1}{2} \cdot (P + Q)$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot (P + Q)$$



Um den **Teilungspunkt** T einer Strecke PQ mit PT:QT = 3:8 zu berechnen, wird der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ mit 3/11 multipliziert und an P angehängt:

$$T = P + \frac{3}{11} \cdot (Q - P) = P + \frac{3}{11} \cdot Q - \frac{3}{11} \cdot P = \frac{8}{11} \cdot P + \frac{3}{11} \cdot Q$$

Allgemein erhält man für PT:QT = u:v bzw. für PT:QT = p:(1–p) die folgenden Formeln:

$$T = \frac{v}{u + v} \cdot P + \frac{u}{u + v} \cdot Q \qquad\qquad T = (1 - p) \cdot P + p \cdot Q$$

Man kann also den Halbierungspunkt H als arithmetisches Mittel der Punkte P und Q deuten, den Teilungspunkt T als gewichtetes Mittel.

Messen

Länge einer Strecke

Die Länge einer Strecke PQ ist der Betrag des Vektors $\mathbf{v} = \overrightarrow{PQ}$.

Größe eines Winkels

Ein Winkel α = <QPR wird von den Vektoren $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{PQ}$ und $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{PR}$ eingeschlossen. Er kann durch Umformen des skalaren Produkts von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ berechnet werden:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2|}$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Ein Dreieck PQR wird von den Vektoren $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{PQ}$ und $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{PR}$ festgelegt. Der Flächeninhalt F des Dreiecks ergibt sich unmittelbar aus der geometrischen Definition des vektoriellen Produkts von $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$:

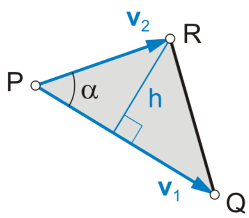
$$F = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|$$

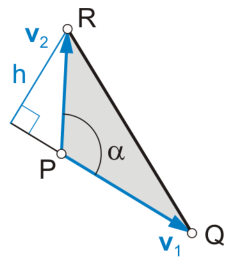
Alternativ kann der Flächeninhalt auch mit dem skalaren Produkt berechnet werden:

$$2 \cdot F = |\mathbf{v}_1| \cdot h = |\mathbf{v}_1| \cdot |\mathbf{v}_2| \cdot \sin\alpha$$

$$4 \cdot F^2 = |\mathbf{v}_1|^2 \cdot |\mathbf{v}_2|^2 \cdot \sin^2\alpha = |\mathbf{v}_1|^2 \cdot |\mathbf{v}_2|^2 \cdot (1 - \cos^2\alpha) =$$
$$= |\mathbf{v}_1|^2 \cdot |\mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1|^2 \cdot |\mathbf{v}_2|^2 \cdot \cos^2\alpha = \mathbf{v}_1{}^2 \cdot \mathbf{v}_2{}^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2$$

$$F = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\mathbf{v}_1{}^2 \cdot \mathbf{v}_2{}^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}$$





Dass der Ausdruck unter der Wurzel nicht 0 ist, mag auf den ersten Blick verwirren ☺

Rauminhalt eines Tetraeders

Ein Tetraeder PQRS wird durch die Vektoren $\mathbf{v}_1 = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{v}_2 = \overrightarrow{PR}$ und $\mathbf{v}_3 = \overrightarrow{PS}$ festgelegt. Das Volumen V kann mit Hilfe des vektoriellen und skalaren Produkts berechnet werden.

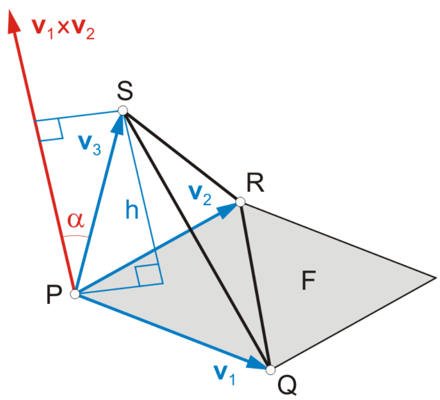
Die Skizze illustriert die geometrische Interpretation des skalaren Produkts von $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ und $\mathbf{v}_3$:

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2| \cdot |\mathbf{v}_3| \cdot \cos\alpha = F \cdot (\pm h)$$

Die Vorzeichen zeigen an, ob der Winkel α spitz oder stumpf ist.

Die übliche Volumenformel für Pyramiden („Grundfläche mal Höhe durch 3“) zieht nach sich, dass $F \cdot h = 6 \cdot V$ ist. Daher gilt:

$$V = \frac{1}{6} \cdot |(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3|$$

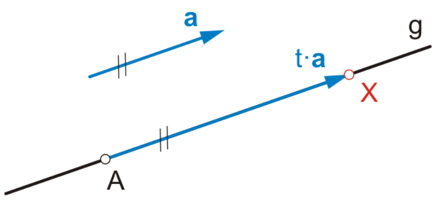


Geraden und Ebenen

Parameterdarstellung einer Geraden

Wenn eine Gerade g durch einen Punkt A und einen Richtungsvektor **a** festgelegt ist, so kann jeder Punkt X von g mit Hilfe eines Parameters $t \in \mathbb{R}$ wie folgt beschrieben werden:

$$X = A + t \cdot \mathbf{a}$$



Hinweis: Die Formulierungen „ein Vektor ist ein Richtungsvektor von g", „ein Vektor ist parallel zu g" und „ein Vektor liegt auf g" sind gleichbedeutend.

Für X(x/y/z), A(x_A/y_A/z_A) und **a** = (a_1/a_2/a_3) ergibt sich die Koordinatenform der Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x &= x_A + t \cdot a_1 \\ y &= y_A + t \cdot a_2 \\ z &= z_A + t \cdot a_3 \end{aligned}$$

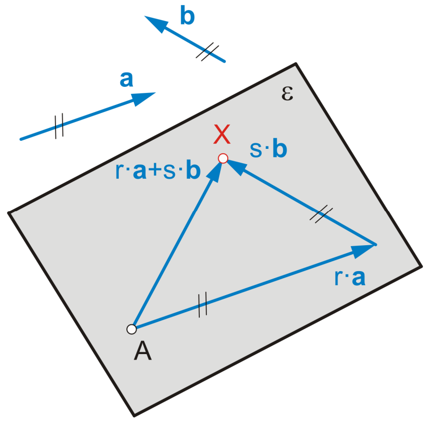
Um Punkte von g zu berechnen, wählt man beliebige t-Werte und setzt sie in die Parameterdarstellung ein.

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt P(x_P/y_P/z_P) auf g liegt, ist zu überprüfen, ob es einen t-Wert gibt, für den die drei Gleichungen der Koordinatenform wahre Aussagen sind.

Parameterdarstellung einer Ebene

Wenn eine Ebene ε durch einen Punkt A und zwei nicht kollineare und zu ε parallele Vektoren **a** und **b** festgelegt ist, so kann jeder Punkt X von ε mit Hilfe zweier Parameter $r, s \in \mathbb{R}$ wie folgt beschrieben werden:

$$X = A + r \cdot \mathbf{a} + s \cdot \mathbf{b}$$



Hinweis: Die Formulierungen „ein Vektor ist parallel zu ε" und „ein Vektor liegt in ε" sind gleichbedeutend.

Für X(x/y/z), A(x_A/y_A/z_A) und **a** = (a_1/a_2/a_3), **b** = (b_1/b_2/b_3) ergibt sich die Koordinatenform dieser Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{aligned} x &= x_A + r \cdot a_1 + s \cdot b_1 \\ y &= y_A + r \cdot a_2 + s \cdot b_2 \\ z &= z_A + r \cdot a_3 + s \cdot b_3 \end{aligned}$$

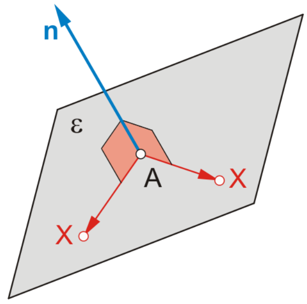
Um Punkte von ε zu berechnen, wählt man beliebige r-Werte und s-Werte und setzt sie in die Parameterdarstellung ein.

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt P(x_P/y_P/z_P) in ε liegt, ist zu überprüfen, ob es einen r-Wert und einen s-Wert gibt, für den die drei Gleichungen der Koordinatenform wahre Aussagen sind.

Das Arbeiten mit Parameterdarstellungen von Ebenen kann also mühsam sein, wie schon die Überprüfung zeigt, ob ein Punkt in einer Ebene liegt. Auch die Überprüfung, ob zwei durch Parameterdarstellungen festgelegte Ebenen gleich sind, erfordert einigen Rechenaufwand.

Eleganter ist das Beschreiben von Ebenen durch Gleichungen, das dem Beschreiben von Geraden in der zweidimensionalen analytischen Geometrie entspricht.

Gleichung einer Ebene



Wenn eine Ebene ε durch einen Punkt A und einen Normalvektor **n** festgelegt ist, so liegt ein Punkt X genau dann in ε, wenn die Vektoren $\overrightarrow{AX}$ und **n** orthogonal sind, also wenn gilt:

$$\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AX}=\mathbf{n}\cdot(X-A)=\mathbf{n}\cdot X-\mathbf{n}\cdot A=0$$

Dies führt zu folgender Gleichung der Ebene ε:

$$\mathbf{n}\cdot X=\mathbf{n}\cdot A$$

Für X(x/y/z), A(x_A/y_A/z_A) und **n** = (a/b/c) ergibt sich die Koordinatenform der Gleichung:

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_A\\y_A\\z_A\end{pmatrix}\quad\text{oder}\quad a\cdot x+b\cdot y+c\cdot z=d \text{ mit } d=a\cdot x_A+b\cdot y_A+c\cdot z_A$$

Um Punkte von ε zu berechnen, kann man zwei Koordinaten frei wählen und die dritte Koordinate aus der Gleichung berechnen.

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt P(x_P/y_P/z_P) in ε liegt, setzt man ihn in die Gleichung ein.

Die Umrechnung einer Parameterdarstellung einer Ebene in eine Gleichung kann durch Eliminieren der Parameter erfolgen. Besser ist jedoch, einen Normalvektor der Ebene mit Hilfe des vektoriellen Produkts der beiden Vektoren aus der Parameterdarstellung zu berechnen.

Die Umrechnung einer Gleichung einer Ebene in eine Parameterdarstellung kann mit Hilfe von drei beliebigen Punkten der Ebene erfolgen. Zu beachten ist jedoch, dass sie ein Dreieck bilden müssen, dass also zwei ihrer Verbindungsvektoren nicht kollinear sind. Einfacher ist, einen Punkt und zwei der drei Vektoren (-b/a/0), (-c/0/a), (0/-c/b) zu verwenden. Sie sind zum Normalvektor **n** = (a/b/c) der Ebene orthogonal und liegen daher in der Ebene.

Parallele, schneidende und windschiefe Lage

Die Begriffe beziehen sich nicht auf Strecken oder ebene Flächen, sondern auf ihre unbegrenzten „Verlängerungen“, also auf Geraden und Ebenen. So können zwei ebene Flächen nicht schneidend sein (keinen gemeinsamen Punkt haben), obwohl ihre Trägerebenen schneidend sind. Der Begriff „windschief“ bedeutet „weder parallel noch schneidend“ und kann nur auf zwei Geraden zutreffen.

Gerade – Gerade

Zwei Geraden g_1 und g_2 können parallel, schneidend oder windschief sein.

$$g_1: X=A_1+r\cdot\mathbf{a}_1 \qquad\qquad g_2: X=A_2+s\cdot\mathbf{a}_2$$

Parallele Lage liegt vor, wenn die Richtungsvektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ kollinear sind (also $\mathbf{a}_2 = k\cdot\mathbf{a}_1$). Wenn außerdem der Verbindungsvektor $\overrightarrow{A_1A_2}$ zu $\mathbf{a}_1$ kollinear ist, so sind g_1 und g_2 identisch.

Wenn $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ nicht kollinear sind, so erhält man durch Gleichsetzen der beiden Parameterdarstellungen

$$A_1+r\cdot\mathbf{a}_1=A_2+s\cdot\mathbf{a}_2$$

drei Gleichungen in r und s, wenn man die Koordinaten dieser Vektorgleichung getrennt anschreibt. Dieses Gleichungssystem ist in der Regel unlösbar (widersprüchlich); g_1 und g_2 sind in diesem Fall windschief.

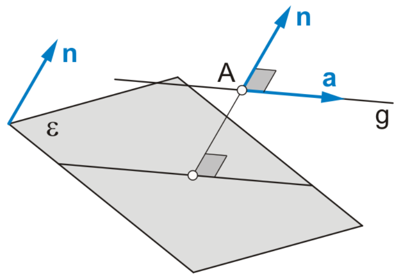
Wenn das Gleichungssystem lösbar ist (Lösung [r_0,s_0]), so sind g_1 und g_2 schneidend; der Schnittpunkt S ergibt sich durch Einsetzen von r_0 bzw. s_0 in die Parameterdarstellung von g_1 bzw. g_2.

Gerade – Ebene

Eine Gerade g und eine Ebene ε können parallel oder scheidend sein. Zur Untersuchung der gegenseitigen Lage ist es zweckmäßig, die Ebene durch eine Gleichung zu erfassen.

$$g: X = A + t \cdot \mathbf{a} \qquad\qquad \varepsilon: \mathbf{n} \cdot X = d$$

Wenn der Richtungsvektor **a** von g orthogonal zum Normalvektor **n** von ε ist (also $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$), so ist g parallel zu ε. Wenn außerdem A in ε liegt, so liegt g in ε.



Wenn **a** und **n** nicht orthogonal sind, haben g und ε genau einen gemeinsamen Punkt S. Durch Einsetzen der Parameterdarstellung von g in die Gleichung von ε erhält man eine lineare Gleichung in t. Der Schnittpunkt S ergibt sich durch Einsetzen der Lösung t_0 in die Parameterdarstellung von g.

Ebene – Ebene

Zwei Ebenen ε_1 und ε_2 können parallel oder schneidend sein. Zur Untersuchung der gegenseitigen Lage ist es zweckmäßig, beide Ebenen durch Gleichungen zu erfassen.

$$\varepsilon_1: \mathbf{n}_1 \cdot X = d_1 \qquad\qquad \varepsilon_2: \mathbf{n}_2 \cdot X = d_2$$

Parallele Lage liegt vor, wenn die Normalvektoren $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ kollinear sind (also $\mathbf{n}_2 = k \cdot \mathbf{n}_1$). Wenn außerdem ein beliebiger Punkt von ε_2 in ε_1 liegt, so sind die Ebenen identisch.

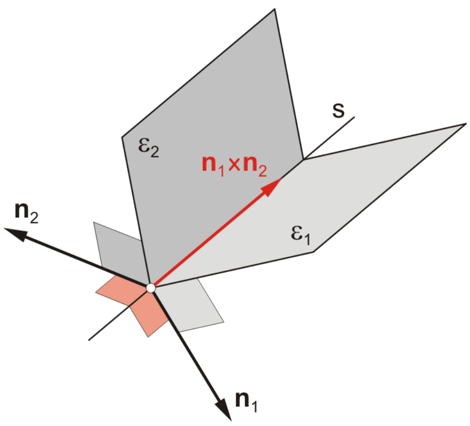
Wenn $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ nicht kollinear sind, liegen alle gemeinsamen Punkte von ε_1 und ε_2 auf einer Geraden s. Für eine Parameterdarstellung von s benötigt man zwei gemeinsame Punkte von ε_1 und ε_2. Man erhält sie etwa als Schnittpunkte von beliebigen Geraden der einen Ebene mit der anderen Ebene. Sie können auch als Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y + c_1 \cdot z &= d_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y + c_2 \cdot z &= d_2 \end{aligned}$$

ermittelt werden, wobei eine der drei Koordinaten jeweils frei wählbar ist.

Ein Richtungsvektor von s kann auch mit folgender Überlegung ermittelt werden:

Da s in ε_1 liegt, sind s und $\mathbf{n}_1$ orthogonal. Ebenso sind s und $\mathbf{n}_2$ orthogonal. Daher ist der Produktvektor $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ ein Richtungsvektor von s.



Orthogonale Lage

Der Begriff bezieht sich auf Geraden und Ebenen, kann aber auf Strecken und ebene Flächen übertragen werden. So haben etwa eine Strecke und eine ebene Fläche orthogonale Lage, wenn die Trägergerade und die Trägerebene orthogonale Lage haben.

Gerade – Gerade

Zwei Geraden g_1 und g_2 sind orthogonal (schneidend oder windschief), wenn ihre Richtungsvektoren $\mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2$ orthogonal sind. Die Überprüfung der orthogonalen Lage erfolgt mit dem skalaren Produkt:

$$\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$$

Gerade – Ebene

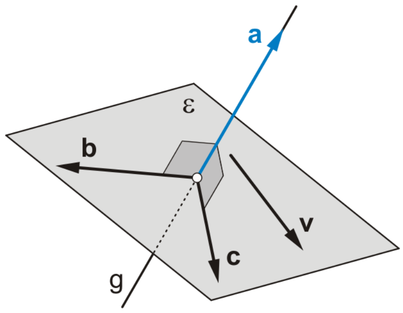
Eine Gerade g und eine Ebene ε sind orthogonal, wenn es einen Vektor **a** gibt, der sowohl Richtungsvektor von g als auch Normalvektor von ε ist. Die Überprüfung der orthogonalen Lage erfolgt mit dem skalaren oder dem vektoriellen Produkt:

- Überprüfe, ob ein Richtungsvektor **a** von g orthogonal zu zwei Vektoren **b** und **c** ist, die in ε liegen und nicht kollinear sind.

  $$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 \text{ und } \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = 0$$

- Überprüfe, ob ein Richtungsvektor **a** von g kollinear ist zum Produktvektor $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ der oben genannten Vektoren **b** und **c**.

  $$\mathbf{b} \times \mathbf{c} \,||\, \mathbf{a}$$



Wenn eine Gerade g und eine Ebene ε orthogonal sind, dann ist jeder Richtungsvektor **a** von g orthogonal zu jedem in ε liegenden Vektor **v**.

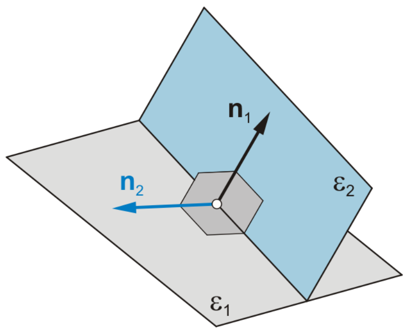
Ebene – Ebene

Zwei Ebenen ε_1 und ε_2 sind orthogonal, wenn ihre Normalvektoren $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ orthogonal sind. Die Überprüfung der orthogonalen Lage erfolgt mit dem skalaren Produkt:

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$$

Wenn zwei Ebenen ε_1 und ε_2 orthogonal sind, dann ist jeder Normalvektor $\mathbf{n}_1$ von ε_1 parallel zu ε_2 und jeder Normalvektor $\mathbf{n}_2$ von ε_2 parallel zu ε_1.

Wenn ein Normalvektor $\mathbf{n}_1$ einer Ebene ε_1 zu einer Ebene ε_2 parallel ist, dann sind die beiden Ebenen orthogonal.



Zu jeder Ebene ε [$a{\cdot}x + b{\cdot}y + c{\cdot}z = d$] mit allgemeiner Lage im Koordinatensystem ($a{\cdot}b{\cdot}c \neq 0$) gibt es drei aus ihrer Gleichung abgeleitete Ebenen, die durch den Ursprung gehen und eine Koordinatenachse enthalten: $b{\cdot}x - a{\cdot}y = 0$, $c{\cdot}x - a{\cdot}z = 0$, $c{\cdot}y - b{\cdot}z = 0$. Sie sind offensichtlich orthogonal zur Ebene ε.

Aufgaben

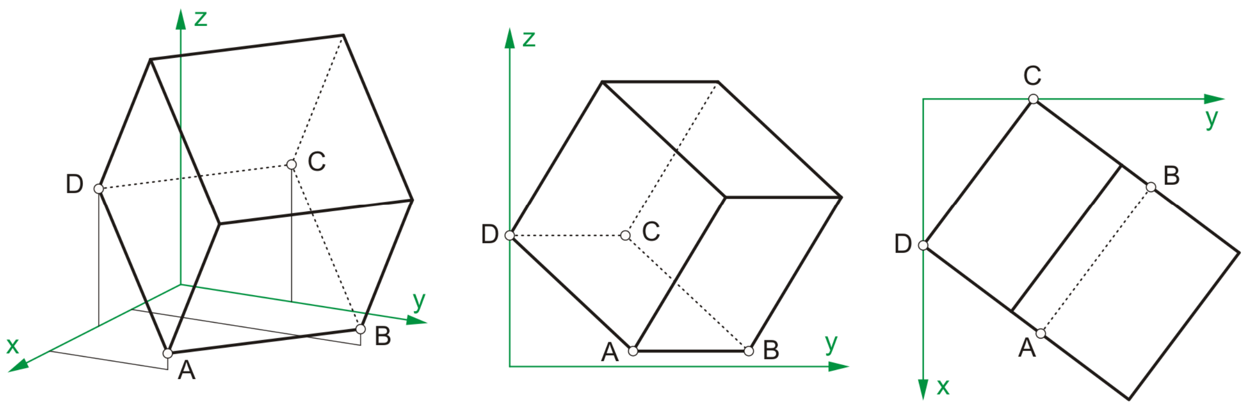
Die folgenden Aufgaben können nicht mit Formeln „erschlagen" werden, sondern erfordern **Raumdenken** (Zusammenwirken aus Raumvorstellung und logischem Denken). Die benötigten Methoden und Werkzeuge zum Lösen der Aufgaben sind im vorhergehenden Abschnitt **Grundlagen** zusammengefasst.

Die Suche nach einem guten Lösungsweg hat viel mit **Kreativität** zu tun. Strukturen und Zusammenhänge müssen erkannt und in Beziehung zu den vorhandenen Werkzeugen gesetzt werden. Wenn ein Werkzeug nicht zur Verfügung steht, muss man sich um einen „work around" bemühen.

Viele Wege führen zum Ziel. Auch Umwege können lehrreich sein.

Die Aufgaben werden anhand von **Bildern** gestellt. Sie geben die räumliche Anordnung korrekt wieder und unterstützen dadurch die Raumvorstellung. Den Bildern liegen die Gesetze der **Parallelprojektion** zugrunde. Dies hat den Vorteil, dass parallele Raumstrecken auf parallele Bildstrecken abgebildet werden; die Bilder sind also „parallelentreu". Außerdem bleibt das Verhältnis der Längen paralleler Raumstrecken erhalten. Die Länge einer Strecke und die Größe eines Winkels bleiben hingegen in der Regel nicht erhalten. Da oft auch die Lösungen abgebildet sind, ist eine visuelle Kontrolle von Zwischenergebnissen möglich.

Neben **3D-Ansichten**, welche die Raumvorstellung unmittelbar unterstützen, werden auch die **Ansicht von oben** (Grundriss, Projektion entgegen der z-Achse) und die **Ansicht von vorne** (Aufriss, Projektion entgegen der x-Achse) verwendet. Bei den 3D-Ansichten (linkes Bild) werden auch Koordinatenwege dargestellt, um die räumliche Verortung zu vereinfachen. Bei den Ansichten von vorne (mittleres Bild) und von oben (rechtes Bild) wird auf Koordinatenwege verzichtet; die x-Koordinaten bzw. die z-Koordinaten erscheinen hier als Punkte.



Wenn in einem Angabebild keine Koordinatenachsen eingezeichnet sind, muss man selbst ein geeignetes Koordinatensystem wählen und die Koordinaten „ablesen".

Die Rechnungen können im Kopf oder mit einem einfachen Taschenrechner durchgeführt werden. Die Angaben sind so gewählt, dass im Rechengang und bei den Ergebnissen möglichst nur „schöne Zahlen" (ganze Zahlen, einfache Dezimal- bzw. Bruchzahlen) vorkommen. Dies ist zwar unrealistisch, erspart aber exzessives Eintippen oder die Verwendung von CAS. Um die Zahlen klein zu halten, sollten Vektoren, bei denen es nur auf die Richtung ankommt, immer „gekürzt" werden.

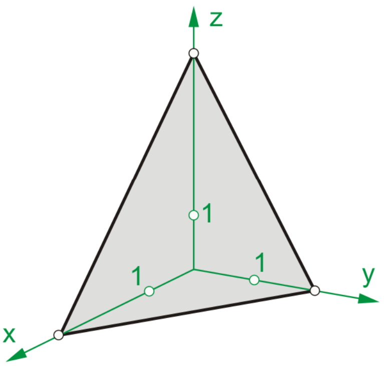
Alle Aufgaben sind in Teilaufgaben gegliedert, die unterschiedliche Inhalte ansprechen und unterschiedliche Handlungen erfordern. Die Kennzeichnung D markiert Aufgaben, die durch bloßes Nachdenken oder mit einer kurzen Rechnung gelöst werden können. Die Kennzeichnung + weist auf höhere Komplexität oder höhere Schwierigkeit hin.

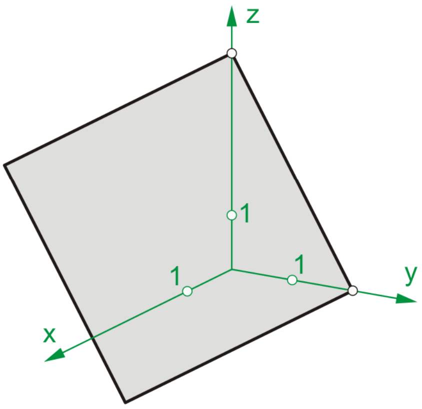
Lage im Koordinatensystem

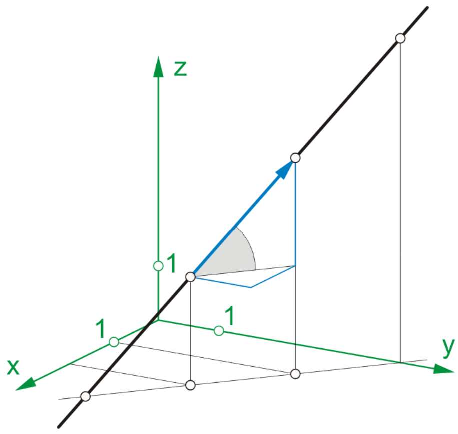
Die Aufgaben in diesem Abschnitt betreffen die Lage von Geraden und Ebenen im Koordinatensystem. Für sie gibt es ausnahmsweise keine Angabebilder, da die Lage anhand von selbst gemachten Skizzen veranschaulicht und untersucht werden soll. Die Bilder der Koordinatenachsen können beliebig skizziert werden. Auch die Skalierungspunkte können beliebig und voneinander unabhängig platziert werden.

Um Gerade und Ebenen im Raum zu verorten, sind Schnittpunkte und Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen zweckmäßig. Die Bilder zeigen dies für die Ebenen $4x + 6y + 3z = 12$ und $2y + z = 4$ sowie für die Gerade X = (2/2/2) + t·(-1/1/2).

Die Schnittpunkte der Geraden mit der xy-Ebene und der yz-Ebene können mit Hilfe ihrer Projektion auf die xy-Ebene leicht ergänzt werden (rechtes Bild). Die **Steigung** des Vektors bzw. der orientierten Geraden wird analog zur analytischen Geometrie der Ebene als Tangens des Neigungswinkels definiert.







Aufgabe 1

Skizziere die Geraden im Koordinatensystem und kreuze die zutreffenden Aussagen an.

	parallel	schneidend	windschief
g [X = (1/0/0) + t·(0/1/1)]; h [X = (0/1/0) + r·(1/1/0)]			
g [X = (1/2/2) + t·(-1/-2/-2)]; h [X = (1/2/0) + r·(0,5/1/0)]			
g [x = 1 – t, y = -1 + 2t, z = t]; h [x = -r, y = 1 + r, z = 1]			
g [x = 1 + t, y = 2 – t, z = -0,5t]; h [x = -2r, y = 2r, z = -1 + r]			

Aufgabe 2

Visualisiere die Ebenen im Koordinatensystem mit Hilfe von Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen. Notiere die zu den Aussagen passenden Buchstaben. Es kann sein, dass Buchstaben gar nicht oder mehrfach vorkommen.

A	$6x + 4y + 5z = 6$
B	$6x – 3y + 2z = 0$
C	X = (1/1/0) + u·(1/0/0) + v·(0/-1,5/1,5)
D	X = (1/1/1) + u·(1/1/1) + v·(0/0/1)

Die Ebene ist parallel zur x-Achse.	
Die Ebene schneidet alle Koordinatenachsen.	
Die Ebene geht durch den Ursprung.	
Die Ebene ist orthogonal zu einer Koordinatenebene.	

Aufgabe 3

Gegeben ist die Gerade g [A(2/3/2), B(-2/6/6)].

a) Skizziere die Gerade im Koordinatensystem.

b) Zeichne den Schnittpunkt S von g mit der yz-Ebene ein.

c) Zeichne den Schnittpunkt T von g mit der xy-Ebene ein. Schätze bzw. überlege die Koordinaten von T anhand der Skizze und überprüfe das Ergebnis durch eine Rechnung.

d) Berechne die Steigung der von A nach B orientierten Geraden g.

Aufgabe 4

Gegeben ist das Dreieck PQR [P(2/0/6), Q(0/6/2), R(6/2/0)].

a) Skizziere das Dreieck im Koordinatensystem.

b) Zeichne den Schnittpunkt S der Geraden PQ mit der xy-Ebene ein. Schätze bzw. überlege die Koordinaten von S anhand der Skizze und überprüfe das Ergebnis durch eine Rechnung.

c) Gib einen Richtungsvektor der Schnittgeraden der Ebene PQR mit der xy-Ebene an (Kopfrechnung).

d) Skizziere jene auf dem Dreieck PQR liegende Gerade, die durch Q geht und parallel zur xy-Ebene liegt. Sie schneidet die Seite PR im Punkt T. Schätze bzw. überlege die Koordinaten von T anhand der Skizze und überprüfe das Ergebnis durch eine Rechnung.

e) Die Schnittpunkte der Ebene PQR mit den Koordinatenachsen bilden ein Dreieck XYZ. Skizziere dieses Dreieck (ohne zu rechnen). Berechne dann die Punkte X, Y und Z.

Aufgabe 5

Die Ebene ε [$4x + 6y + 3z = 12$] ist durch eine Gleichung festgelegt, die Ebene φ [$X = (0/1/0) + u\cdot(3/0/4)$, $X = (0/0/-2) + v\cdot(3/0/4)$] durch zwei parallele Geraden.

a) Ermittle eine Parameterdarstellung für die Ebene ε und eine Gleichung für die Ebene φ.

b) Visualisiere die Ebenen im Koordinatensystem mit Hilfe von Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen.

c) Zeichne die Schnittgerade s der beiden Ebenen ein. Schätze die Koordinaten der Schnittpunkte von s mit den Koordinatenebenen anhand der Skizze und überprüfe die Schätzung durch eine Rechnung.

Aufgabe 6

Die durch drei Punkte festgelegte Ebene ε [A(1/10/-12), B(2/5/0), C(3/-5/24)] und die durch eine Parameterdarstellung festgelegte Ebene φ [$X = (-3/8/13) + u\cdot(6/-5/-10) + v\cdot(0/1/0)$] haben spezielle Lagen im Koordinatensystem.

a) Ermittle Gleichungen für die Ebenen ε und φ.

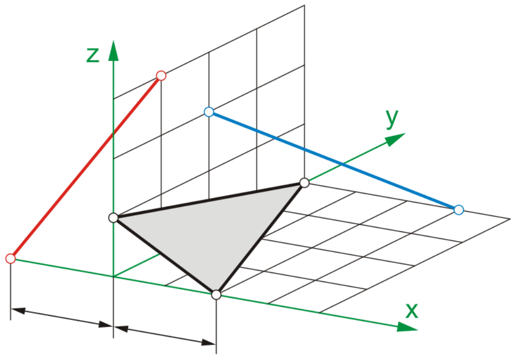
b) Visualisiere die Ebenen im Koordinatensystem mit Hilfe von Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen.

c) Zeichne die Schnittgerade s der beiden Ebenen ein. Überlege die Koordinaten der Schnittpunkte von s mit den Koordinatenebenen anhand der Skizze und überprüfe die Überlegung durch eine Rechnung.

Lageaufgaben

Hier geht es um die gegenseitige Lage von Geraden und Ebenen (also um parallel, schneidend, windschief und orthogonal) sowie um die Berechnung von Schnittpunkten und Schnittgeraden.

Aufgabe 7



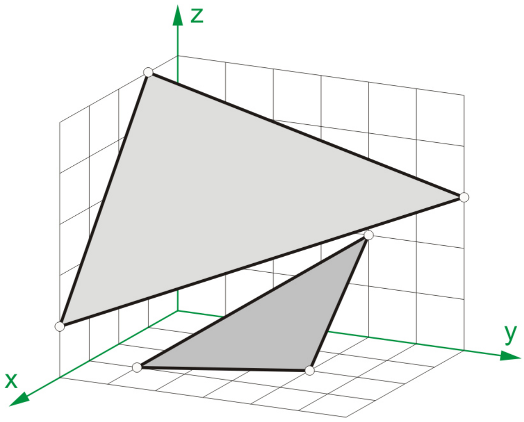
Der in der Skizze dargestellte Raster ist quadratisch.

a) Untersuche, ob die blaue Strecke parallel zum grauen Dreieck ist.

b) Untersuche, ob die rote Strecke orthogonal zum grauen Dreieck ist.

c) Untersuche, ob die Trägergeraden der blauen und der roten Strecke orthogonal bzw. schneidend sind.

Aufgabe 8

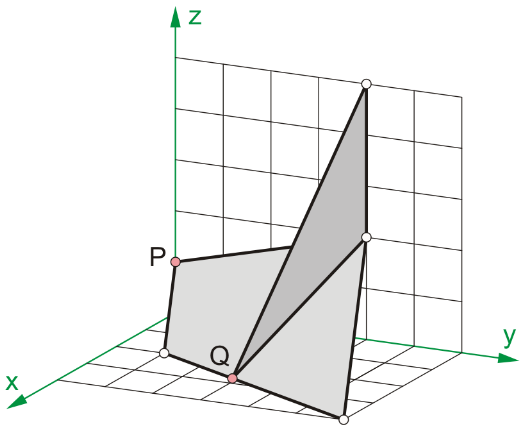


Der in der Skizze dargestellte Raster ist quadratisch.

a) Zeige, dass die beiden Dreiecke nicht parallel sind.

b)[+] Beim höchsten Eckpunkt des hellgrauen Dreiecks soll die z-Koordinate so geändert werden, dass die beiden Dreiecke danach parallel sind. Untersuche, ob das möglich ist.

Aufgabe 9



Der in der Skizze dargestellte Raster ist quadratisch. Die Punkte P und Q können nicht aus dem Raster abgelesen werden.

a) Der Eckpunkt P des ebenen Vierecks liegt auf der z-Achse. Berechne die z-Koordinate von P.

b)[D] Das Dreieck und das Viereck haben orthogonale Lage. Gib einen Normalvektor des Dreiecks an (ohne zu rechnen).

c) Berechne den Eckpunkt Q des Dreiecks.

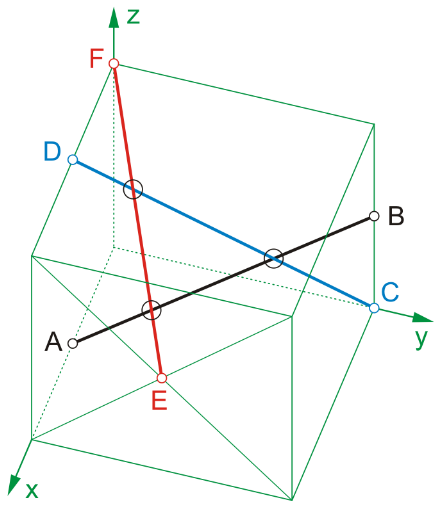
Aufgabe 10

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 15. Die Punkte A, B, D sind Halbierungspunkte von Würfelkanten.

a) Zwei windschiefe Geraden können in einem Bild einen scheinbaren Schnittpunkt haben. Zeige, dass einer der eingeringelten Punkte ein scheinbarer Schnittpunkt ist.

b) Berechne die beiden tatsächlich vorhandenen Schnittpunkte.

c)[D] Wenn zwei Geraden schneidend sind, dann haben sie eine gemeinsame Trägerebene. Beschreibe die Lage dieser Trägerebene für jeden der beiden tatsächlich vorhandenen Schnittpunkte (mit Bezug zum Würfel).



Aufgabe 11

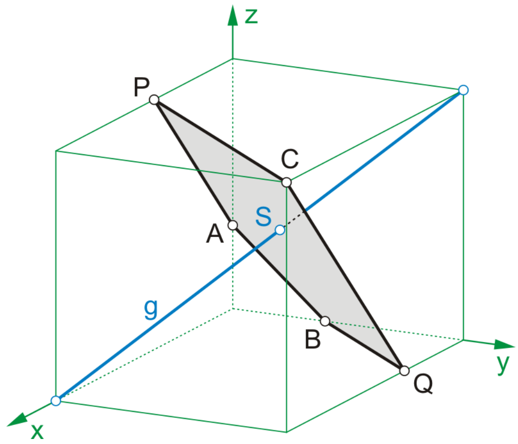
Ein Quader ist mit einer Ebene ABC [A(0/0/4), B(0/4,8/0), C(18/12/12)] zu schneiden.

a)[D] Begründe (ohne zu rechnen), dass das Schnittfünfeck parallele Seiten hat.

b) Berechne die beiden restlichen Eckpunkte P und Q des Schnittfünfecks.

c) Untersuche, ob die Gerade g und die Ebene ABC orthogonale Lage haben.

d) Berechne den Schnittpunkt S der Geraden g und der Ebene ABC.



Aufgabe 12

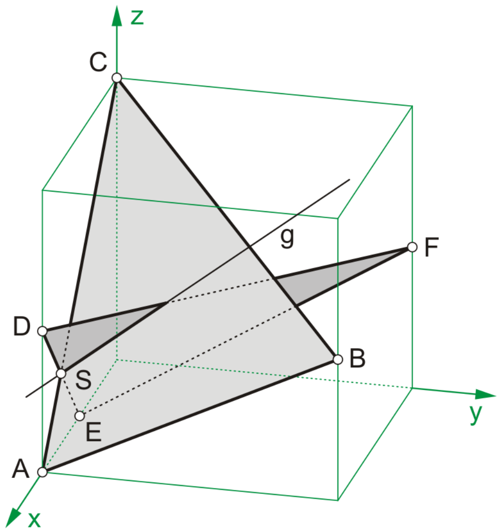
Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 4. Die Punkte B, D, E, F sind Halbierungspunkte von Würfelkanten.

a)[D] Berechne den Schnittpunkt S.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g der Ebenen ABC und DEF.

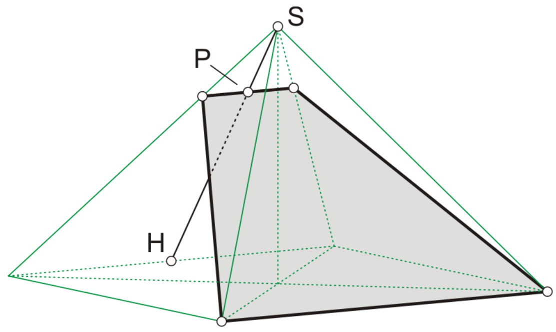
c) Untersuche, ob die Gerade g eine Würfelkante trifft.

d) Untersuche, ob die Dreiecke orthogonale Lage haben.



Aufgabe 13

Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit der Basiskantenlänge 60 und der Höhe 40. Der Punkt P teilt die Seitenflächenhöhe HS im Verhältnis HP:SP = 18:7.

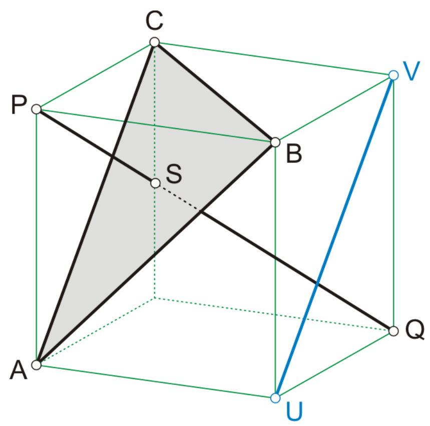


a) Untersuche, ob das graue Trapez orthogonal zum Seitendreieck durch HS ist.

b)[D] Untersuche (ohne zu rechnen), ob das graue Trapez orthogonal zum linken Seitendreieck ist.

Aufgabe 14

Gegeben ist ein Würfel.



a) Untersuche, ob die Raumdiagonale PQ orthogonal zum Dreieck ABC ist.

b) Untersuche, ob der Schnittpunkt S die Raumdiagonale PQ drittelt.

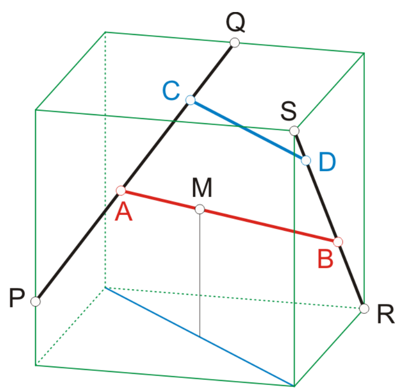
c) Untersuche, ob die Flächendiagonale UV orthogonal zur Raumdiagonale PQ ist.

d)[D] Löse die Aufgaben a) und c) ohne zu rechnen.

e)[+] Löse die Aufgabe b) ohne Vektorrechnung (etwa mit Hilfe des Rechtecks AQVP).

Aufgabe 15

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 6. Die Punkte P und Q teilen Würfelkanten in den Verhältnissen 1:3 und 1:1. Die Strecke AB geht durch den Würfelmittelpunkt M, die Strecke CD ist parallel zur eingezeichneten Basisdiagonalen.

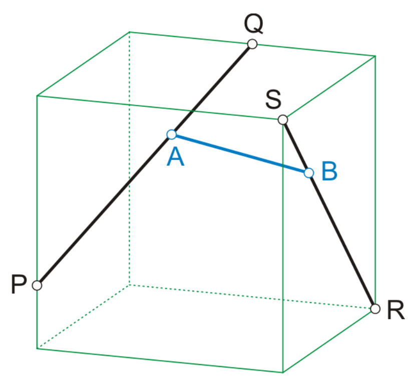


a) Ermittle die Position des Punktes B. Drücke dazu das Verhältnis RB:SB mit ganzen Zahlen aus.

b) Ermittle die Position des Punktes C. Drücke dazu das Verhältnis PC:QC mit ganzen Zahlen aus.

Aufgabe 16[+]

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 40. Die Punkte P und Q teilen Würfelkanten in den Verhältnissen 1:3 und 1:1. Die Strecke AB ist waagrecht (parallel zur Basisfläche des Würfels) und orthogonal zu PQ.



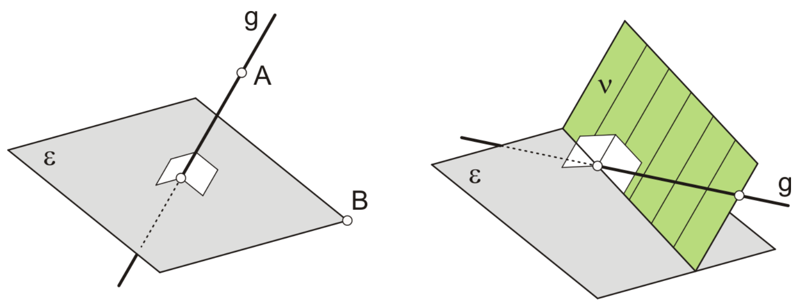
a) Ermittle die Positionen der Punkte A und B. Drücke dazu die Verhältnisse PA:QA und RB:SB mit ganzen Zahlen aus.

b)[D] Begründe (ohne zu rechnen), dass AB und RS nicht orthogonal sind.

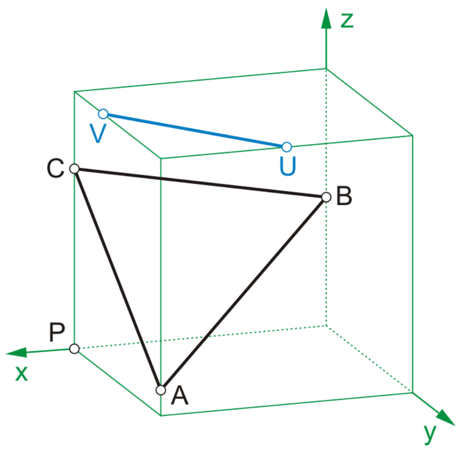
Normale und Normalebenen

Wenn eine Gerade g und eine Ebene ε orthogonale Lage haben, dann bezeichnet man g als **Normale** von ε und ε als **Normalebene** von g. Eine Normale g von ε wird durch einen zusätzlichen Punkt A festgelegt. Eine Normalebene ε von g wird durch einen zusätzlichen Punkt B festgelegt.

Wenn zwei Ebenen ε und ν orthogonale Lage haben, dann bezeichnet man ν als **Normalebene** von ε und umgekehrt. Eine Normalebene ν von ε wird durch eine zusätzliche Gerade g festgelegt, die zu ε nicht orthogonal ist. Wenn g zu ε orthogonal ist, gibt es unendlich viele durch g gehende Normalebenen von ε.



Aufgabe 17

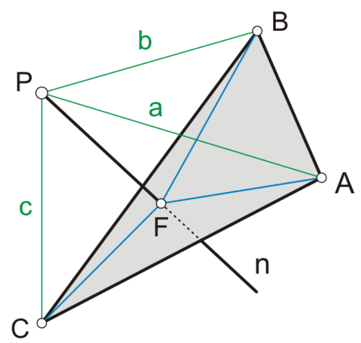


Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 30. Die Punkte A, B und C teilen Würfelkanten in den Verhältnissen 1:9, 1:1 und 7:3. Die Punkte U und V teilen Würfelkanten in den Verhältnissen 1:1 und 1:2.

a) Spiegle den Punkt P an der Ebene ABC.

b) Untersuche, ob der gespiegelte Punkt auf der Strecke UV liegt.

Aufgabe 18



Von einem Punkt P gehen drei paarweise orthogonale Strecken mit den Längen a = 20, b = 15 und c = 12 aus. Die Gerade n ist die durch P gehende Normale der Ebene ABC.

a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem und berechne den Fußpunkt F.

b) Zeige, dass F der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist.

Bemerkung: Die Aussage b) gilt für beliebige Streckenlängen a, b, c.

Aufgabe 19

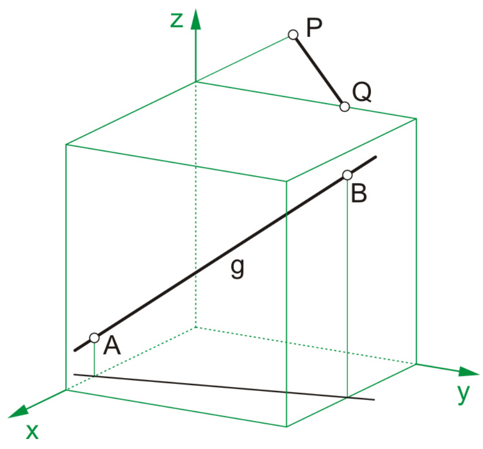
Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 16. Die Gerade g [A(12,5/0/2,5), B(8,5/16/z)] hat die Steigung $k = 3/\sqrt{17} \approx 0{,}73$. Die Verlängerung der Strecke PQ [P(-12/0/16), Q(0/y/16)] schneidet die Gerade g.

a) Berechne den Punkt B.

b) Berechne den Punkt Q.

c) Spiegle den Punkt P an der Geraden g.

d) Gib die Richtung der an g gespiegelten Strecke PQ durch einen Einheitsvektor an, ohne den Punkt Q zu spiegeln.



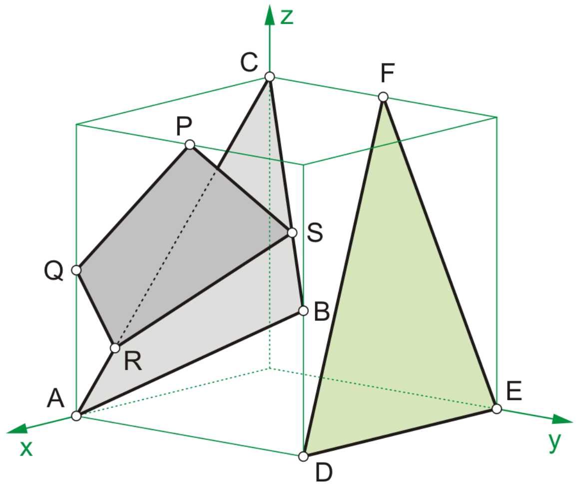
Aufgabe 20

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 3. Die Punkte B, F, P, Q sind Halbierungspunkte von Würfelkanten.

a) Untersuche, ob die Ebenen ABC und DEF Normalebenen sind.

b) Das Viereck PQRS liegt in jener Normalebene von ABC, die durch die Strecke PQ geht. Berechne die Eckpunkte R und S.

c) Berechne einen Richtungsvektor von RS mit Hilfe von Normalvektoren der Ebenen ABC und PQRS.

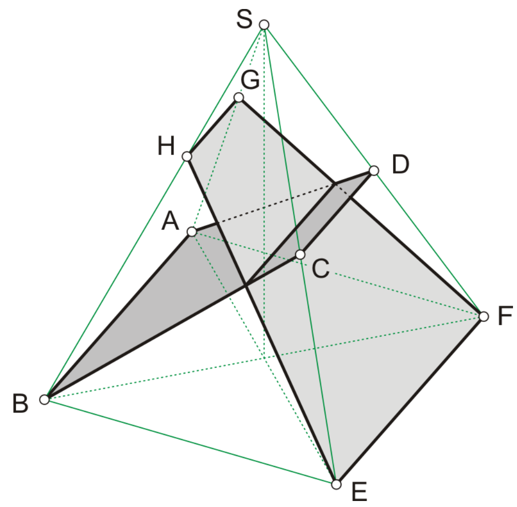


Aufgabe 21

Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit der Basiskantenlänge 4 und der Höhe 5. Die Punkte C und D sind Halbierungspunkte von Seitenkanten. Die Vierecke ABCD und EFGH liegen in Normalebenen.

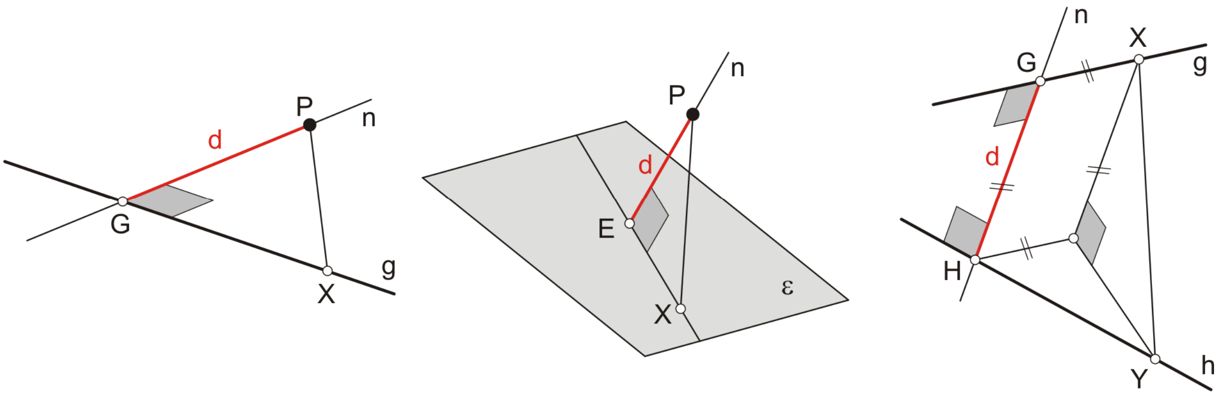
a) Gib die Positionen der Eckpunkte G und H auf den Seitenkanten durch ganzzahlige Verhältnisse an.

b) Die Schnittstrecke der beiden Vierecke ist parallel zur Basisebene. Berechne ihre Höhe über der Basisebene.

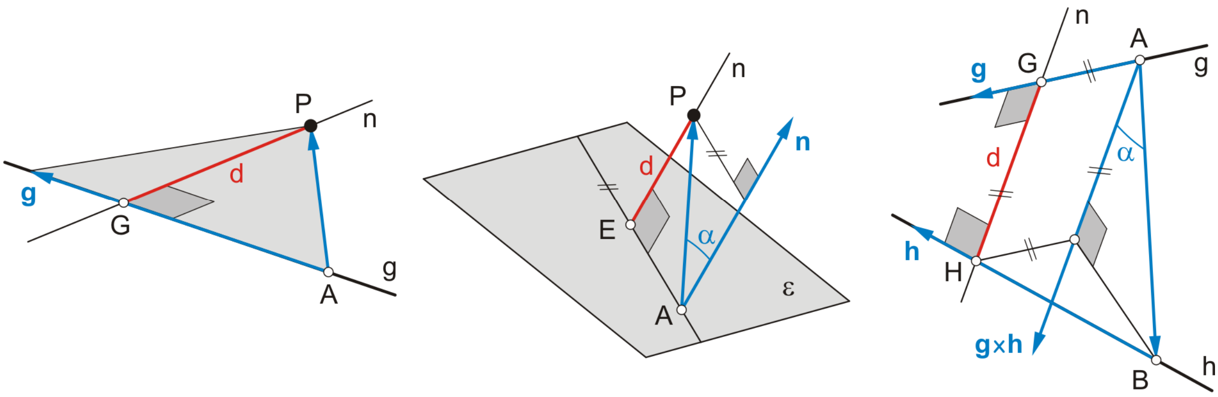


Abstandsaufgaben

Die Bilder veranschaulichen die Abstände „Punkt – Gerade“, „Punkt – Ebene“ und „Gerade – Gerade“. Alle Abstände werden auf Normalen gemessen; sie sind also **Normalabstände**. Sie sind auch die **kürzesten Abstände**, wie die rechtwinkligen Dreiecke in den Skizzen erkennen lassen.



Formeln für die Abstände „Punkt – Gerade“, „Punkt – Ebene“ und „Gerade – Gerade“ können mit Hilfe des skalaren und des vektoriellen Produkts hergeleitet werden.



Punkt P – Gerade g
A ist ein beliebiger Punkt auf g, **g** ein beliebiger Richtungsvektor von g. Da der Betrag von $\mathbf{g}\times\overrightarrow{AP}$ gleich dem doppelten Flächeninhalt des von g und $\overrightarrow{AP}$ aufgespannten Dreiecks ist, gilt

$$d=\frac{\left|\mathbf{g}\times\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\mathbf{g}\right|}$$

Punkt P – Ebene ε
A ist ein beliebiger Punkt von ε, **n** ein beliebiger Normalvektor von ε. Wegen $\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AP}=\left|\mathbf{n}\right|\cdot AP\cdot\cos\alpha$ und $AP\cdot\cos\alpha=+d$ (α spitz) bzw. $AP\cdot\cos\alpha=-d$ (α stumpf), gilt

$$d=\left|\frac{\mathbf{n}\cdot\overrightarrow{AP}}{\left|\mathbf{n}\right|}\right|$$

Gerade g – Gerade h

A und B sind beliebige Punkte von g und h, **g** und **h** sind beliebige Richtungsvektoren von g und h. Wegen $(\mathbf{g}\times\mathbf{h})\cdot\overrightarrow{AB}=\left|\mathbf{g}\times\mathbf{h}\right|\cdot AB\cdot\cos\alpha$ und $AB\cdot\cos\alpha=+d$ (α spitz) bzw. $AB\cdot\cos\alpha=-d$ (α stumpf), gilt

$$d=\left|\frac{(\mathbf{g}\times\mathbf{h})\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\mathbf{g}\times\mathbf{h}\right|}\right|$$

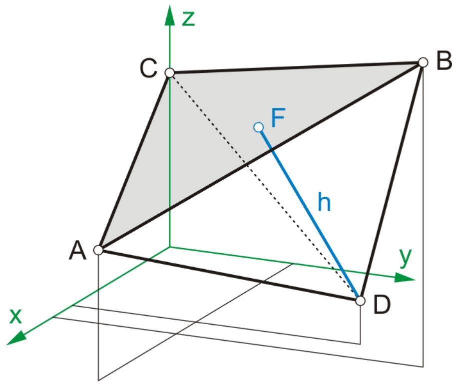
Die Fußpunkte G und H beim Abstand „Gerade g – Gerade h“ können mit dem skalaren Produkt berechnet werden: G und H mit Parameterdarstellungen von g und h ausdrücken (G = A + u·**g**, H = B + v·**h**), Parameter u und v durch Lösen des Gleichungssystems $\overrightarrow{GH} \cdot \mathbf{g} = 0$ und $\overrightarrow{GH} \cdot \mathbf{h} = 0$ berechnen.

Die Fußpunkte bei den Abständen „Punkt P – Gerade g“ bzw. „Punkt P – Ebene ε“ können mit Hilfe einer Normalebene bzw. einer Normalen berechnet werden. Analog zum Abstand „Gerade g – Gerade h“ kann aber auch das skalare Produkt herangezogen werden:

„Punkt P – Gerade g“: G mit Parameterdarstellung von g ausdrücken (G = A + t·**g**) und Parameter t durch Lösen der Gleichung $\overrightarrow{GP} \cdot \mathbf{g} = 0$ berechnen.

„Punkt P – Ebene ε“: E mit Parameterdarstellung von ε ausdrücken (E = A + r·$\mathbf{e}_1$ + s·$\mathbf{e}_2$), Parameter r und s durch Lösen des Gleichungssystems $\overrightarrow{EP} \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ und $\overrightarrow{EP} \cdot \mathbf{e}_2 = 0$ berechnen.

Aufgabe 22



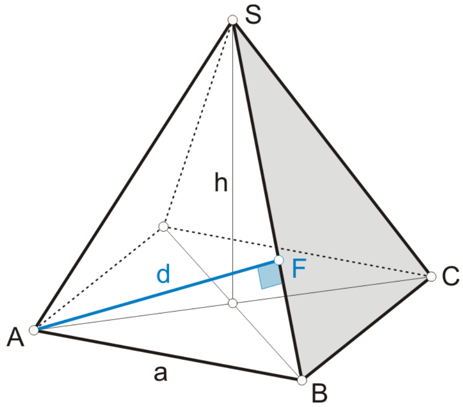
Gegeben ist ein Tetraeder ABCD [A(10/3/3), B(6/9/7), C(0/0/4), D(5/7/1)].

a) Berechne die Höhe h mit der Abstandsformel.

b) Berechne die Höhe h mit Hilfe des Tetraedervolumens.

c) Berechne die Höhe h mit Hilfe des Höhenfußpunktes F.

Aufgabe 23



Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide (a = h = 6).

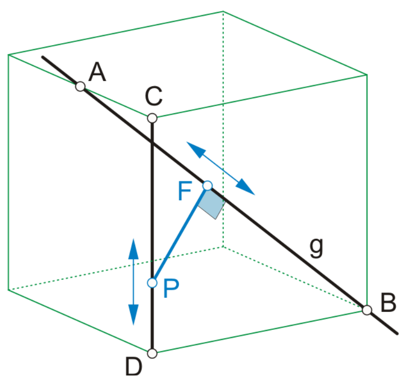
a) Berechne den Abstand d mit der Abstandsformel.

b) Berechne den Abstand d mit Hilfe eines Flächeninhalts.

c) Untersuche, ob der Fußpunkt F die Kante BS drittelt.

d)[D] Begründe, dass der Abstand von A zur Ebene des Seitendreiecks BCS kleiner als d ist, ohne den Abstand zu berechnen.

Aufgabe 24[+]



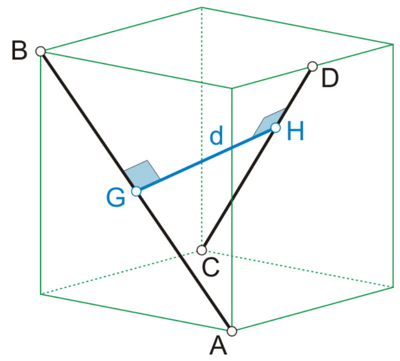
Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 10. Der Punkt A halbiert eine Würfelkante.

a) Zeige, dass es genau einen Punkt P auf der Würfelkante CD gibt, für den der Abstand zur Geraden g gleich 5 ist.

b) Ermittle die Position des zugehörigen Fußpunktes F. Drücke dazu das Verhältnis AF:BF mit ganzen Zahlen aus.

Aufgabe 25

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 6. Der Punkt D halbiert eine Würfelkante.



a) Berechne den Abstand d mit der Abstandsformel.

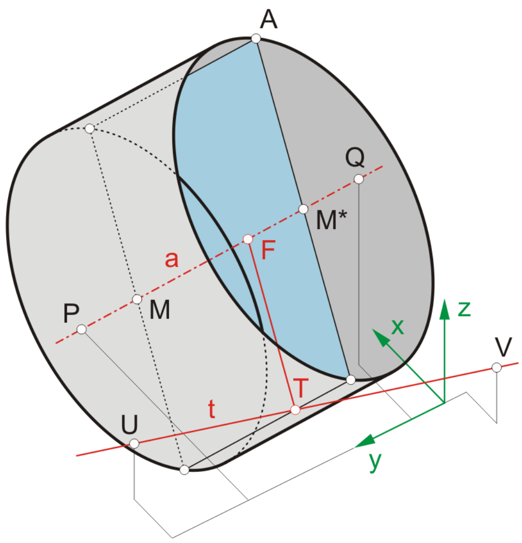
b) Berechne den Abstand d mit Hilfe der Fußpunkte G und H.

c) Berechne die Steigung des Vektors $\overrightarrow{GH}$.

d)[D] Begründe (ohne zu rechnen): $\left|\overrightarrow{GC} \times \overrightarrow{GD}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| \cdot d$

Aufgabe 26[+]

Ein Drehzylindermantel mit der Achse a [P(22/18/0), Q(7/3/20)] berührt die Tangente t [U(5/25/6), V(-4/-2/6)].

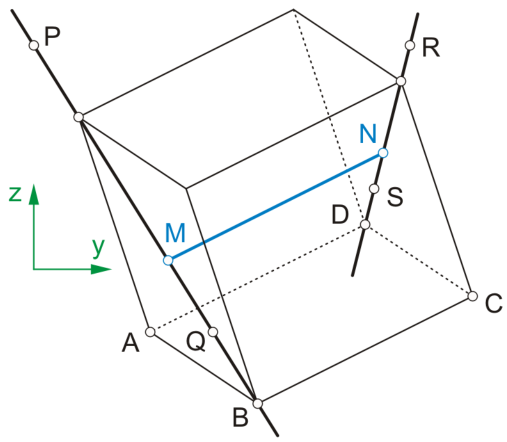


a) Berechne den Berührpunkt T von t und den Radius des Drehzylinders.

b) Der Mittelpunkt M des Basiskreises teilt die Strecke PQ im Verhältnis 1:4. Der Berührpunkt T teilt die durch T gehende Mantelstrecke im Verhältnis 2:1. Berechne den Eckpunkt A des durch T gehenden Achsenschnitts.

Aufgabe 27[+]

Ein Würfel ist durch die beiden windschief-orthogonalen Trägergeraden PQ [P(0/0/25), Q(-12/20/-7)] und RS [R(-28/42/25), S(8/38/9)] zweier Flächendiagonalen festgelegt.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

a) Überprüfe, dass die Angabe zulässig ist.

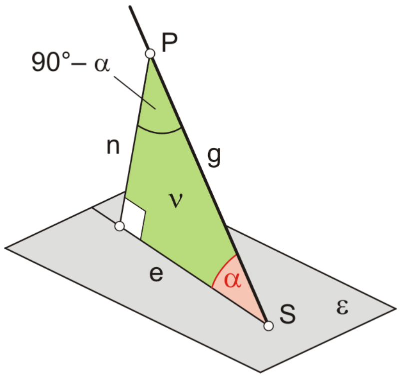
b) Berechne die Mittelpunkte M und N der entsprechenden Begrenzungsflächen des Würfels.

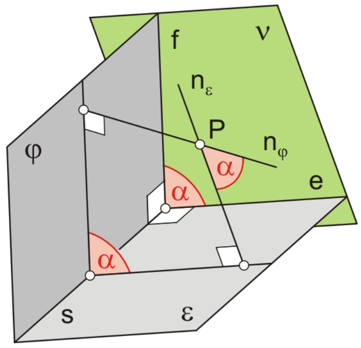
c) Berechne die Eckpunkte des Quadrats ABCD.

Winkelaufgaben

Der Winkel „Gerade – Gerade“ (schneidend oder windschief) wird als Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden gemessen. Je nach Orientierung ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren spitz oder stumpf (oder 90° bei orthogonalen Richtungsvektoren). Die beiden Winkel sind supplementär. Es ist üblich, den spitzen Winkel anzugeben.

Die Bilder veranschaulichen die Winkel „Gerade – Ebene“ und „Ebene – Ebene“. Der Winkel α wird jeweils in einer **Normalebene** ν gemessen.





Gerade g – Ebene ε

Der Winkelschenkel e liegt auf der Schnittgeraden von ε mit der durch g gehenden Normalebene ν von ε. Die Berechnung von e kann entfallen, da der leicht zu berechnende Winkel zwischen n und g komplementär zum Winkel α ist. Wenn die Berechnung des Winkels zwischen einem Normalvektor **n** von ε und einem Richtungsvektor **g** von g einen stumpfen Winkel ω ergibt, so gilt: $90° - \alpha + \omega = 180°$, also $\alpha = \omega - 90°$.

Ebene ε – Ebene φ

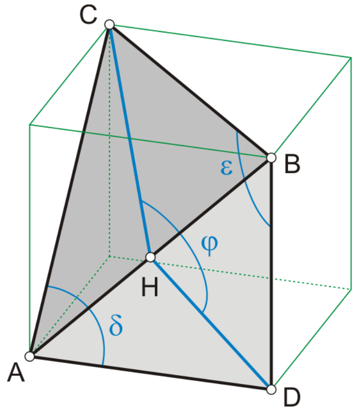
Die Winkelschenkel e und f liegen auf den Schnittgeraden der Ebenen ε und φ mit einer beliebigen Normalebene ν der Schnittgeraden s von ε und φ. Auch hier kann die Berechnung entfallen. Die Skizze zeigt, dass der Winkel α zwischen ε und φ gleich bzw. supplementär zum Winkel zwischen den Normalen n_ε und n_φ ist. Es ist üblich, den spitzen Winkel anzugeben.

Der spitze Winkel einer Geraden bzw. einer Ebene zur xy-Ebene wird als **Neigungswinkel** bezeichnet.

Um den Winkel zweier Ebenen zu messen, darf man nicht zwei beliebige Winkelschenkel verwenden, die von einem Punkt der Schnittgeraden s ausgehen. Die Winkelschenkel müssen orthogonal zu s sein.

Beachte auch, dass die Übereinkunft, den spitzen Winkel anzugeben, nur bei unbegrenzten Ebenen sinnvoll ist. Wenn man ein Heft um 120° aufschlägt, dann schließen die beiden Rechtecke 120° ein, und nicht 60°.

Aufgabe 28



Gegeben ist ein Würfel. Der Punkt H halbiert die Diagonale AB.

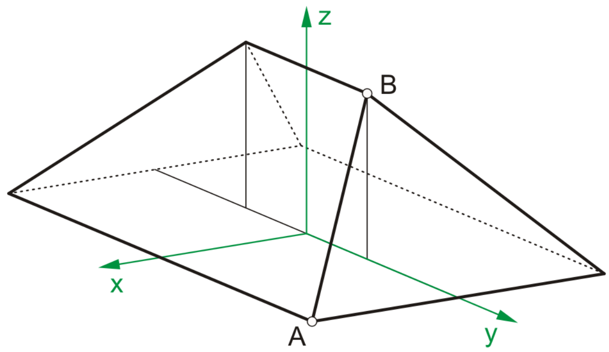
a)D Ermittle die Winkel ε und δ (ohne zu rechnen).

b) Berechne den Winkel φ.

c)D Begründe (ohne zu rechnen), dass φ jener Winkel ist, den die beiden grauen Dreiecke einschließen.

Aufgabe 29

Das Walmdach hat zwei Symmetrieebenen. Die Seiten des Basisrechtecks sind 10 m und 6 m lang. Alle Dachflächen haben den Neigungswinkel 45°.



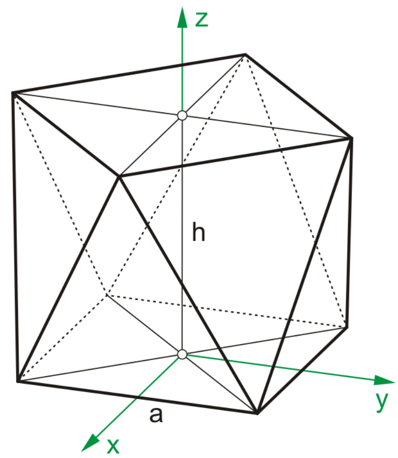
a) Berechne den Neigungswinkel der Kante AB.

b) Berechne den Winkel, den die von der Kante AB ausgehenden Dachflächen einschließen.

c)+ Berechne den Rauminhalt zwischen dem Basisrechteck und den Dachflächen.

Aufgabe 30+

Das Antiprisma wird von acht Dreiecken und zwei gleich großen Quadraten begrenzt. Das obere Quadrat ist um 45° verdreht. Die Basiskantenlänge a und die Höhe h sind gleich.



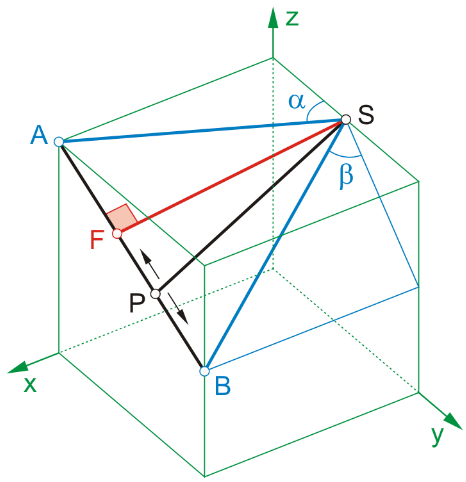
a) Berechne den Winkel zwischen einem Quadrat und einem Dreieck, die entlang einer Kante zusammenhängen.

b) Berechne den Winkel zwischen zwei Dreiecken, die entlang einer Kante zusammenhängen.

c) Ermittle eine Formel für den Rauminhalt des Antiprismas in Abhängigkeit von a.

Aufgabe 31

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 2. Die Punkte S und B sind Halbierungspunkte von Würfelkanten.



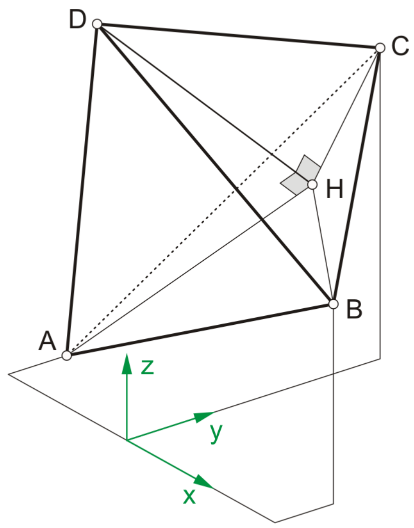
a) Die Strecken SA und SB schließen mit der yz-Ebene die Winkel α und β ein. Berechne α und β mit und ohne Vektoren.

b) Berechne den Winkel, den die Strecke SF mit der yz-Ebene einschließt.

c)+ Der Winkel α ist größer als 60°, der Winkel β ist kleiner als 60°. Daher muss es (mindestens) einen Punkt P auf der Strecke AB geben, für den der Winkel der Strecke SP zur yz-Ebene gleich 60° ist. Berechne alle Punkte P, für die das zutrifft.

Aufgabe 32

Über dem Dreieck ABC [A(-8/3/0), B(10/3/9), C(0/13/14)] ist ein Tetraeder der Höhe 12 zu errichten. Der Höhenfußpunkt ist der Höhenschnittpunkt H(2/8/10) des Dreiecks.



a) Überprüfe, dass H der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ist.

b)**D** Ermittle den Winkel zwischen den Seitenkanten CD und AB.

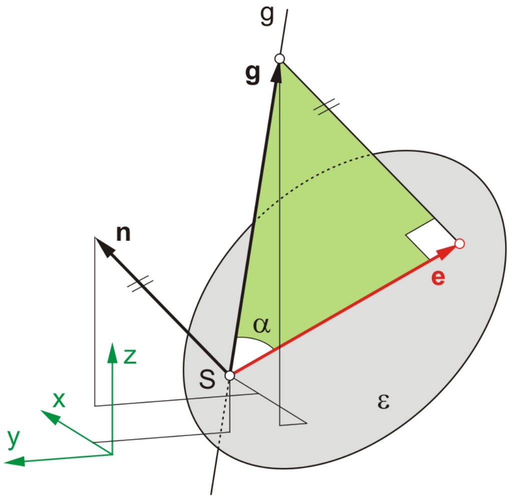
c) Berechne den Eckpunkt D.

d) Berechne den Winkel, den die Seitenkante CD mit dem Seitendreieck ABD einschließt.

Bemerkung: Errichtet man die Höhe eines Tetraeders über dem Höhenschnittpunkt des Basisdreiecks, so spricht man von einem **Orthotetraeder**. Für solche Tetraeder sind gegenüberliegende Seitenkanten stets orthogonal. Die Orthotetraeder sind auch die einzigen Tetraeder, deren vier Körperhöhen sich in einem Punkt schneiden. Die Treffnormalen gegenüberliegender Kanten (Trägergeraden der kürzesten Abstände) gehen auch durch diesen Punkt.

Aufgabe 33

Eine Ebene ε und eine Gerade g gehen durch einen Punkt S(2/-5/2), wobei ε durch einen Normalvektor **n** = (-3/6/6) und g durch einen Richtungsvektor **g** = (-8/1/13) festgelegt sind.



a) Der Vektor **e** entsteht durch Projektion des Vektors **g** auf die Ebene ε. Berechne **e** und den Winkel α, den g und ε einschließen.

b)**+** Berechne **e** mit Hilfe einer Linearkombination von **g** und **n** unter Verwendung des skalaren Produkts.

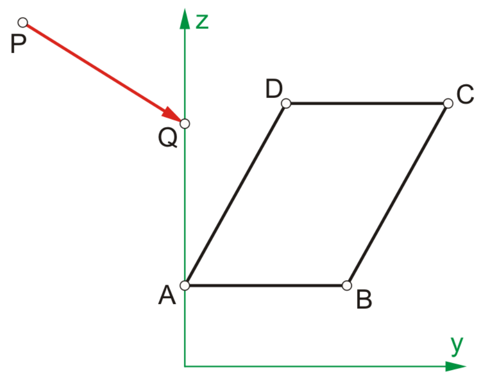
c)**+** Leite analog zu b) eine allgemeine Formel her, mit der man **e** aus **g** und **n** berechnen kann (also ohne Verwendung der gegebenen Koordinaten).

d)**D** Begründe (ohne zu rechnen), dass die Vektoren $\mathbf{n}\times(\mathbf{n}\times\mathbf{g})$ und **e** parallel sind.

Aufgabe 34

Bei Solarzellen ist die Energieausbeute proportional zum Sinus des Winkels zwischen der Solarzelle und den Sonnenstrahlen.

Eine rechteckige Solarzelle ABCD [A(5|0|4), B(0|8|4), C(x|13|13)] und eine Lichtrichtung PQ [P(6|-8|17), Q(8|0|12)] sind gegeben.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

a) Berechne die Eckpunkte C und D der Solarzelle.

b) Berechne den Neigungswinkel der Solarzelle.

c) Berechne den Neigungswinkel der Lichtrichtung.

d) Berechne, wie viel Prozent der maximalen Energieausbeute bei der gegebenen Lichtrichtung erreicht werden.

Pyramiden und Quader

Bei diesen Aufgaben sind Pyramiden und Quader unter vorgegebenen Bedingungen in das Koordinatensystem einzupassen. Dazu müssen geometrische Eigenschaften beachtet werden, wie etwa:

- Bei einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS liegen die Spitze S und der Basismittelpunkt M in den Normalebenen der Basiskanten durch den jeweiligen Halbierungspunkt H.
- Bei einem geraden quadratischen Prisma ABCDEFGH ist die Basisdiagonale AC orthogonal zur Verbindungsebene der Seitenkanten BF und DH.

Aufgabe 35

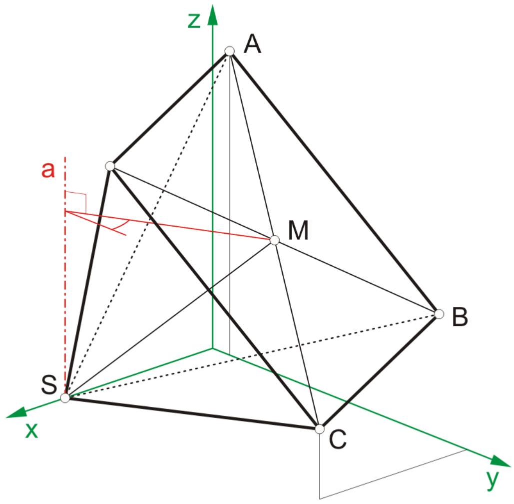
Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man die Basiseckpunkte A(0/1/13) und C(8/15/3). Die Spitze S liegt auf der x-Achse.

a) Berechne S und den Eckpunkt B des Basisquadrats.

b) Berechne den Winkel, den die Seitendreiecke mit dem Basisquadrat einschließen.

c)[D] Das Basisquadrat hat eine spezielle Lage im Koordinatensystem. Begründe, warum die Basisdiagonalen wegen dieser Lage den gleichen Neigungswinkel haben.

d)[+] Die Pyramide soll um die lotrechte Achse a so gedreht werden, dass SM nach der Drehung parallel zur yz-Ebene liegt. Berechne den Drehwinkel und die neue Lage von M.



Aufgabe 36

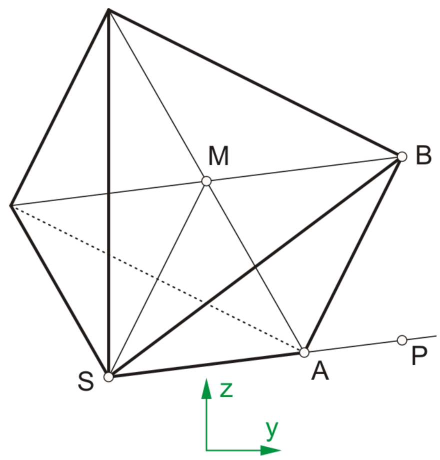
Von einer geraden quadratischen Pyramide kennt man die Spitze S(0/-4/3) und den Basismittelpunkt M(-8/0/11); die Trägergerade der Seitenkante SA verläuft durch den Punkt P(-19,5/8/4,5).

a) Berechne die Eckpunkte A und B des Basisquadrats.

b) Ermittle das Verhältnis von Basiskantenlänge und Höhe.

c)[D] Überprüfe, ob gegenüberliegende Seitendreiecke einen Winkel von 60° einschließen, ohne den Winkel zu berechnen.

d)[D] Die rechts zu sehende Ansicht der Pyramide entsteht durch Normalprojektion auf die yz-Ebene. Bei Normalprojektionen werden Quadrate in der Regel als Parallelogramme abgebildet, nur ausnahmsweise als Rechtecke. Überprüfe, ob hier eine solche Ausnahme vorliegt.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

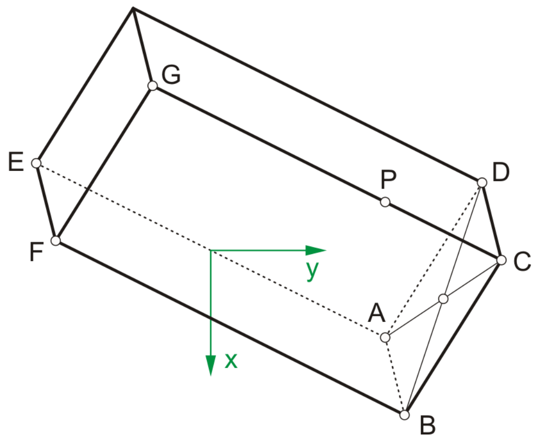
Aufgabe 37

Von einem geraden quadratischen Prisma sind die Seitenkante AE [A(4,5/9/-3), E(-4,5/-9/3)] und ein Punkt P(-2,5/9/11) der gegenüberliegenden Seitenkante CG bekannt.

a) Berechne die Eckpunkte C und G.

b) Berechne die Eckpunkte D und F.

c) Berechne den von den Dreiecken BDA und BDG eingeschlossenen Winkel, ohne Normalvektoren ihrer Trägerebenen zu verwenden.



Ansicht von oben (Blick entgegen der z-Achse)

Aufgabe 38⁺

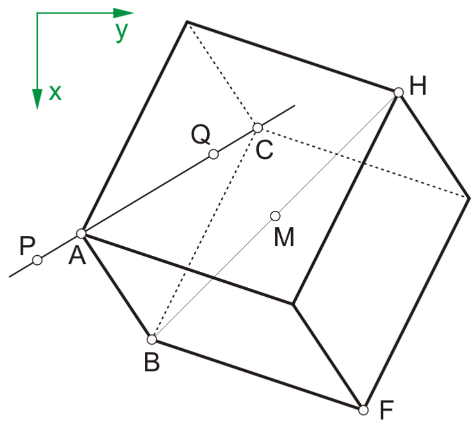
Von einem Würfel kennt man den Mittelpunkt M(23/27/14) und die Trägergerade PQ [P(28/0/32), Q(16/20/0)] der Flächendiagonale AC.

a) Überprüfe, dass der Würfel die Kantenlänge 28 hat.

b) Berechne die Eckpunkte A und C.

c) Berechne die Eckpunkte B und F.

d)[D] Die Eckpunkte A, C, F, H legen ein Tetraeder fest. Gib das Tetraedervolumen als Bruchteil des Würfelvolumens an (ohne Vektorrechnung).



Ansicht von oben (Blick entgegen der z-Achse)

Aufgabe 39

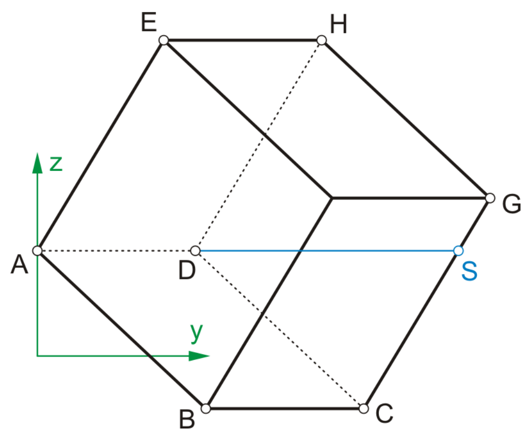
Von einem Würfel ist die Kante AE [A(0/0/10), E(9/12/30)] gegeben. Vier Kanten des Würfels sollen waagrecht sein (parallel zur xy-Ebene).

a) Berechne die Eckpunkte B, D und G.

b) Die Strecke DS liegt in der Seitenfläche DCGH und ist waagrecht. Berechne den Punkt S.

c)[D] Die waagrechte Ebene durch die Kante AD schneidet aus dem Würfel ein Viereck aus. Begründe (ohne zu rechnen), dass ein Rechteck vorliegt.

d)[D] Die waagrechte Ebene durch die Kante AD teilt den Würfel. Gib das Verhältnis der beiden Rauminhalte so einfach wie möglich an.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

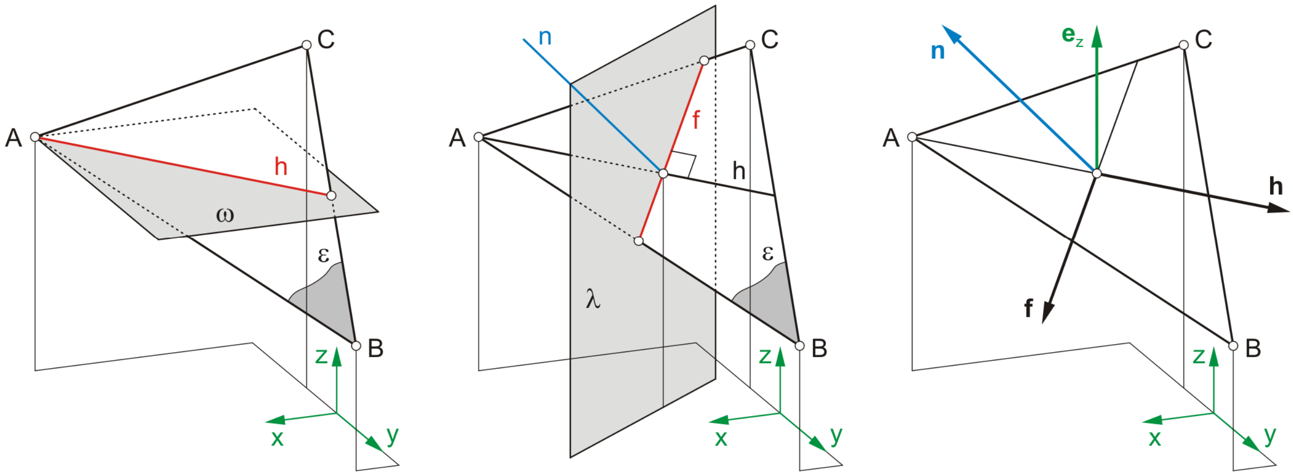
Hauptgeraden und Fallgeraden

Diese Begriffe beziehen sich auf eine Ebene ε. Die **Hauptgeraden** sind waagrecht (parallel zur xy-Ebene) und sind gewissermaßen die Höhenschichtlinien von ε. Die **Fallgeraden** sind die „steilsten“ Geraden von ε; sie haben den größten Neigungswinkel (Winkel zur xy-Ebene) aller in ε liegenden Geraden und sind orthogonal zu den Hauptgeraden.

Hauptgeraden und Fallgeraden können als Schnittgeraden ermittelt werden:

- Schneidet man die Ebene ε mit einer Ebene ω, die parallel zur xy-Ebene ist, so erhält man eine Hauptgerade h (linkes Bild).

- Schneidet man die Ebene ε mit einer Ebene λ, die orthogonal zu einer Hauptgeraden h von ε ist, so erhält man eine Fallgerade f (mittleres Bild). Die Ebene λ ist parallel zur z-Achse und parallel zu jeder Normalen n von ε, sie ist also eine lotrechte Normalebene von ε.



Richtungsvektoren von Haupt- und Fallgeraden können mit dem vektoriellen Produkt berechnet werden (rechtes Bild). Aus den Orthogonalitäten $h \perp z$ und $h \perp n$ sowie $f \perp h$ und $f \perp n$ folgt (unter Verwendung des Einheitsvektors $\mathbf{e}_z = (0/0/1)$ der z-Achse):

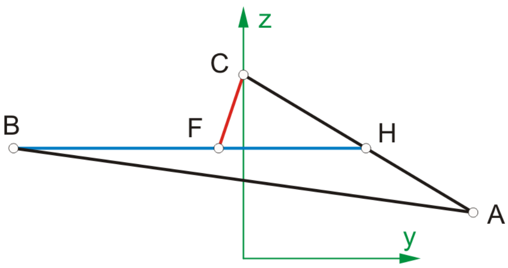
$$\mathbf{h} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{n} \qquad\qquad \mathbf{f} = \mathbf{h} \times \mathbf{n}$$

Wenn ε durch eine Gleichung $a\cdot x + b\cdot y + c\cdot z = d$ festgelegt ist, dann hat die Schnittgerade mit der xy-Ebene die Gleichung $a\cdot x + b\cdot y = d$. Ihr Richtungsvektor $\mathbf{h} = (-b/a/0)$ ist parallel zu den Hauptgeraden h von ε. Die Ebene λ ist orthogonal zu $\mathbf{h}$ und wird daher durch die Gleichung $-b\cdot x + a\cdot y = e$ festgelegt. Die Schnittgerade f von λ und ε ist parallel zum vektoriellen Produkt der Normalvektoren von λ und ε; also gilt:

$$\mathbf{h} = (-b/a/0) \qquad\qquad \mathbf{f} = (-b/a/0) \times (a/b/c) = (ac \;/\; bc \;/\; -a^2 - b^2)$$

Aufgabe 40

In einem Bergwerk führen von einem Punkt A(5|5|1) aus zwei Stollen zu den Punkten B(1|-5|2,2) und C(0|0|4). Von B aus soll ein waagrechter Gang gegraben werden, der AC im Punkt H trifft. Von C aus soll ein möglichst kurzer Gang zu BH gegraben werden; er trifft BH im Punkt F.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

a) Die Nordrichtung ist durch (-1/0/0) festgelegt, die Ostrichtung durch (0/1/0). Ermittle die Himmelsrichtung des Ganges BH.

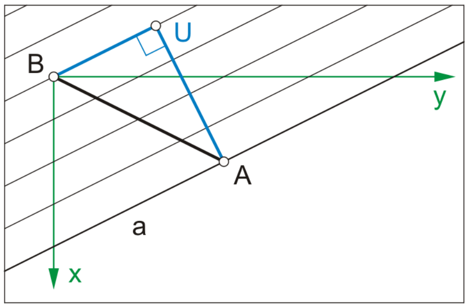
b) Gib die Steigung des Ganges FC in Prozent an.

Aufgabe 41

Eine waagrechte Ebene (z = 0) geht längs der Kante a in eine Geländefläche über, die durch 2x + y + 6z = 120 modelliert wird. Der direkte Weg von A(30/60/0) nach B soll mit dem Umweg über U verglichen werden.

a) Berechne die Neigungswinkel der Wege AB und AU.

b) Der direkte Weg von A nach B soll mit dem Umweg über U verglichen werden. Gib die Wegverlängerung in Prozent an.



Ansicht von oben (Blick entgegen der z-Achse)

Aufgabe 42

Ein auf der xy-Ebene stehender Drehkegel mit der Spitze S(-2,6/8,2/10) berührt die Ebene τ [6x + 8y – 5z = 0] entlang der Mantellinie SB.

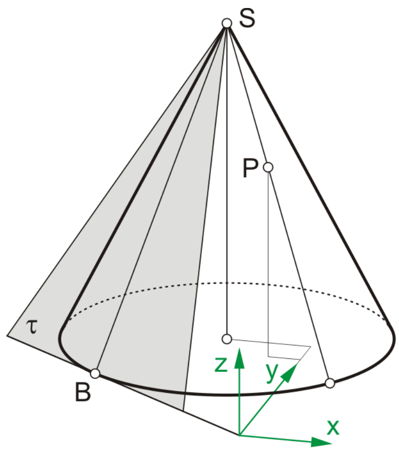
a)[D] Begründe, dass SB auf einer Fallgeraden von τ liegt.

b) Berechne den Punkt B.

c) Berechne den Öffnungswinkel des Drehkegels.

d) Überprüfe, dass der Punkt P(-1/7/6) auf dem Kegelmantel liegt.

e) Ermittle eine Gleichung der Tangentialebene im Punkt P.



Aufgabe 43[+]

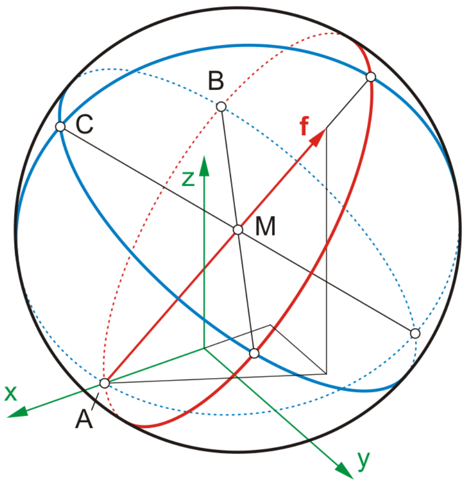
Eine Kugel (r = 85) wird von drei paarweise orthogonalen Ebenen geschnitten. Die Schnittkreise sind färbig eingezeichnet. Der vom Punkt A(45/0/0) ausgehende Vektor **f** = (-75/40/z) liegt auf einer Fallgeraden der Ebene des roten Kreises und hat die Steigung k = 4/3.

a) Berechne den Kugelmittelpunkt M.

b)[D] Begründe, dass die Tangente des roten Kreises im Punkt A in der xy-Ebene liegt.

c) Berechne die Schnittpunkte B und C.

d)[D] Gib die Steigung des Vektors $\overrightarrow{MC}$ an (Kopfrechnung).



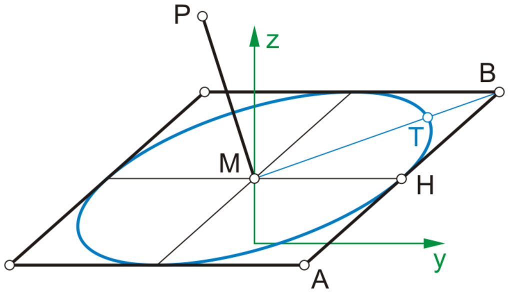
Aufgabe 44

Ein Quadrat (s = 170) mit dem Mittelpunkt M liegt in einer Normalebene der Strecke MP [M(0/0/30), P(32/-24/105)]. Zwei Quadratseiten liegen auf Hauptgeraden.

a) Berechne den Halbierungspunkt H der Seite AB und den Eckpunkt A.

b)[D] Der Inkreis des Quadrats schneidet die Strecke MB im Punkt T. Berechne, um wieviel Prozent die Strecke MB verkürzt werden muss, um die Strecke MT zu erhalten.

c)[+] Projiziert man den Kreis in z-Richtung auf die xy-Ebene (Ansicht von oben), so ist die Verkürzung der Kreisdurchmesser verschieden. Das Bild des Kreises ist eine Ellipse. Berechne ihre Halbachsenlängen a und b.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

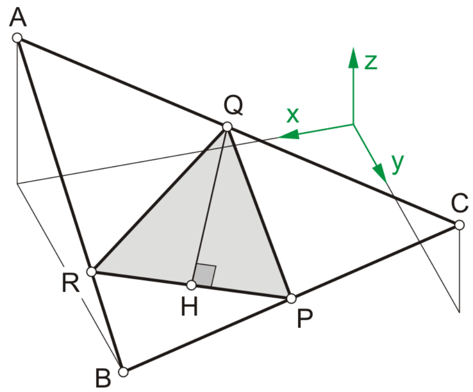
Aufgabe 45

Dem Dreieck ABC [A(20/0/10), B(20/20/0), C(0/20/6)] ist ein gleichschenkliges Dreieck PQR einzuschreiben. Der Eckpunkt P halbiert die Seite BC, die Seite PR liegt auf einer Hauptgeraden.

a) Berechne die Eckpunkte des Dreiecks PQR.

b)[D] Das Dreieck PQR wird in z-Richtung auf die xy-Ebene projiziert. Untersuche, ob das projizierte Dreieck $P_1Q_1R_1$ ebenfalls gleichschenklig ist.

c)[D] Untersuche, ob der Neigungswinkel des Dreiecks ABC und der Neigungswinkel der Strecke HQ gleich sind.

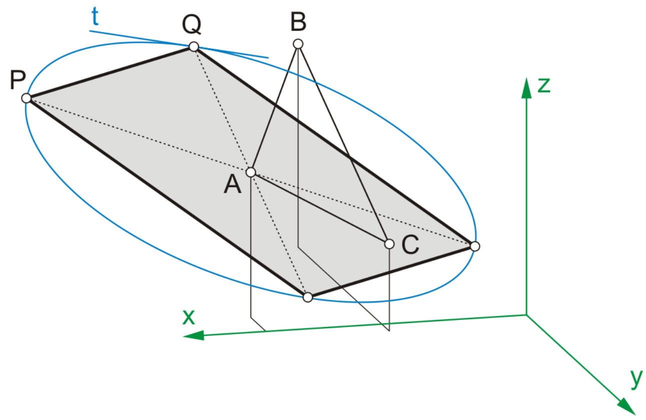


Aufgabe 46[+]

Eine Ebene ε ist durch ein Dreieck ABC [A(9|-2|5), B(5|-11|7), C(5|1|3)] festgelegt. In dieser Ebene liegt ein Rechteck (Seitenlängen 9 und 13), dessen längere Seiten auf Fallgeraden liegen.

a) Berechne die Eckpunkte P und Q.

b) Berechne einen Richtungsvektor der Tangente t des Umkreises im Eckpunkt Q.

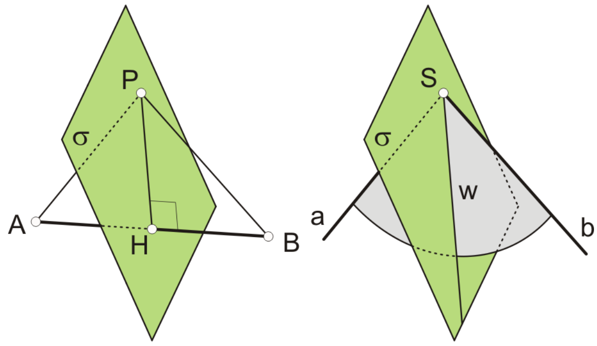


Symmetrieebenen

Die **Symmetrieebene** einer **Strecke** AB ist die Normalebene σ von AB durch den Halbierungspunkt H (linkes Bild). Jeder Punkt P von σ hat von A und B jeweils den gleichen Abstand.

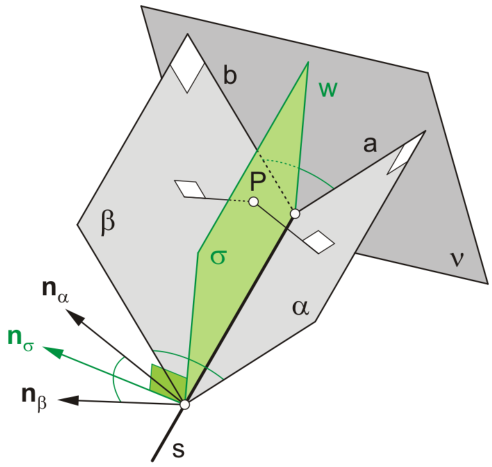
Die Symmetrieebene einer Strecke ist gewissermaßen die Übertragung der Streckensymmetrale in den Raum. Analog kann die Winkelsymmetrale übertragen werden:

Die **Symmetrieebene** eines **Winkels** <ab ist die Normal-ebene σ der Ebene ab, die durch die Winkelsymmetrale w geht (rechtes Bild). Jeder Punkt von σ hat von a und b jeweils den gleichen Abstand.



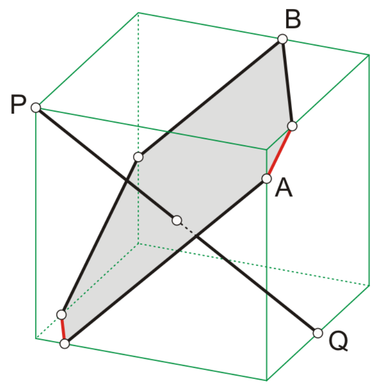
Eine weitere Übertragung der Winkelsymmetrale in den Raum ist die **Symmetrieebene** eines **räumlichen Winkels** <$\alpha\beta$; sie halbiert den von den Halbebenen α und β festgelegten räumlichen Winkel.

Schneidet man die Halbebenen α und β sowie die Symmetrieebene σ mit einer beliebigen Normalebene ν der gemeinsamen Schnittgeraden s, so halbiert die Schnittgerade w den Winkel zwischen den Schenkeln a und b. Daher kann σ als Verbindungsebene von s und w ermittelt werden. Einfacher ist es jedoch, zwei gleich lange (und richtig orientierte) Normalvektoren von α und β zu addieren. Der Summenvektor halbiert den Winkel zwischen den Normalvektoren und ist orthogonal zu σ. Jeder Punkt P von σ hat von α und β jeweils den gleichen Abstand.



Aufgabe 47

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 8. Der Punkt Q ist ein Halbierungspunkt einer Würfelkante. Die Symmetrieebene der Strecke PQ schneidet aus dem Würfel ein Sechseck aus.



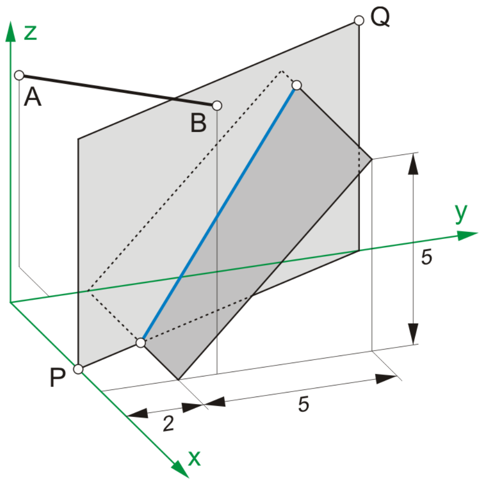
a) Beschreibe die Positionen der Eckpunkte A und B auf den Würfelkanten durch möglichst einfache Verhältnisse.

b)^{D} Begründe (ohne zu rechnen), dass die Verlängerungen der beiden rot hervorgehobenen Seiten des Schnittsechsecks einander auf der Verlängerung einer Würfelkante schneiden.

c)^{D} Beschreibe eine Eigenschaft, die das Schnittsechseck mit einem regelmäßigen Sechseck gemeinsam hat.

d)^{D} Begründe (ohne zu rechnen), dass ein regelmäßiges Schnittsechseck entsteht, wenn man für PQ eine Raumdiagonale des Würfels verwendet.

Aufgabe 48



Gegeben ist die Strecke AB [A(-2/1/5), B(6/3/7)]. Das hellgraue Rechteck hat die Eckpunkte P(4,5/0/0) und Q(0/9/6). Die Lage des dunkelgrauen Rechtecks ist dem Angabebild zu entnehmen.

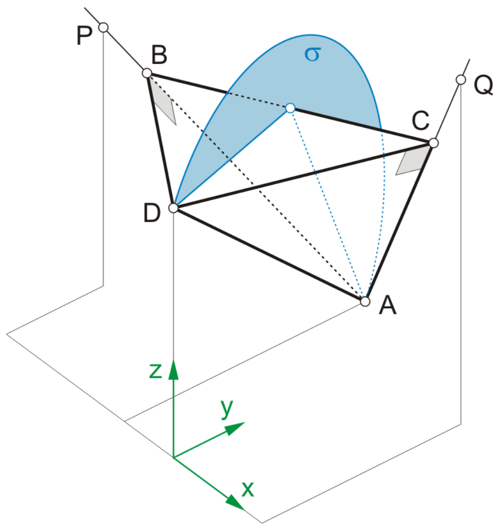
a) Berechne die Endpunkte der blauen Schnittstrecke.

b) Berechne die Steigung der blauen Schnittstrecke.

c) Zeige, dass die blaue Schnittstrecke in der Symmetrieebene der Strecke AB liegt.

d)[+] Aus c) folgt, dass für jeden Punkt X der blauen Schnittstrecke das Dreieck ABX gleichschenklig ist. Ermittle das Dreieck mit dem kleinsten Flächeninhalt.

Aufgabe 49[+]



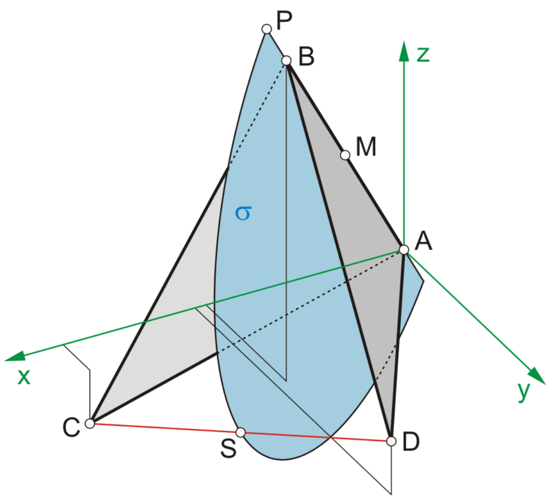
Das Tetraeder ABCD ist symmetrisch zur Ebene σ. Es wird von zwei gleichschenkligen und zwei rechtwinkligen Dreiecken begrenzt. Die Verlängerungen der von A(-50/201/0) ausgehenden Seitenkanten AB und AC gehen durch die Punkte P(-170/81/210) und Q(90/166/280). Der Eckpunkt D liegt auf der z-Achse.

a) Ermittle eine Parameterdarstellung der Ebene σ.

b) Berechne den Eckpunkt D.

c) Berechne die Eckpunkte B und C.

Aufgabe 50[+]



Die Dreiecke ABC [A(0/0/0), B(36/27/60), C(62/9/-10)] und ABD [A, B, D(38/66/10)] legen zwei Halbebenen fest.

a) Ermittle eine Gleichung der Symmetrieebene σ der beiden Halbebenen.

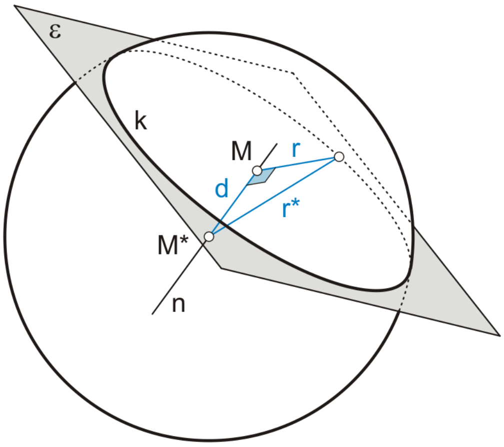
b) Die Symmetrieebene ist durch einen Halbkreis dargestellt, dessen Mittelpunkt M die Strecke AB halbiert. Berechne den höchsten Punkt P des Halbkreises.

c)[D] Ermittle auch den tiefsten Punkt des Halbkreises.

d)[D] Untersuche, ob der Punkt C durch Spiegeln an σ in den Punkt D übergeht.

Kreise und Kugeln

Ein **Kreis** k ist durch seinen Mittelpunkt M, seinen Radius r und seine Ebene ε festgelegt.



Errichtet man in M die Normale n von ε und trägt von M aus einen beliebigen Abstand d auf, so hat der Punkt M* von allen Punkten von k den Abstand

$$r^* = \sqrt{r^2 + d^2}$$

Daher liegt k auf einer **Kugel** mit dem Mittelpunkt M* und dem Radius r*.

Umgekehrt ist jeder ebene Schnitt einer Kugel ein Kreis. Der Mittelpunkt M des Kreises ist der Fußpunkt der aus den Mittelpunkt M* der Kugel auf die Schnittebene ε errichteten Normalen n.

Wenn ein Kreis durch Punkte und Tangenten festgelegt ist, so ist zu beachten:

- Der Mittelpunkt M liegt in der Symmetrieebene von je zwei Kreispunkten und in der Normalebene von jeder Tangente durch den Berührpunkt.
- Die Tangentenstrecken, die man von einem Punkt an einen Kreis legen kann, sind gleich lang.

Wenn eine Kugel durch Punkte, Tangenten und Tangentialebenen festgelegt ist, so ist zu beachten:

- Der Mittelpunkt M* liegt in der Symmetrieebene von je zwei Kugelpunkten, in der Normalebene von jeder Tangente durch den Berührpunkt und auf der Normalen von jeder Tangentialebene durch den Berührpunkt.
- Die Tangentenstrecken, die man von einem Punkt an eine Kugel legen kann, sind gleich lang.
- Die Symmetrieebene der beiden von einer Geraden ausgehenden Tangentialhalbebenen geht durch den Kugelmittelpunkt.

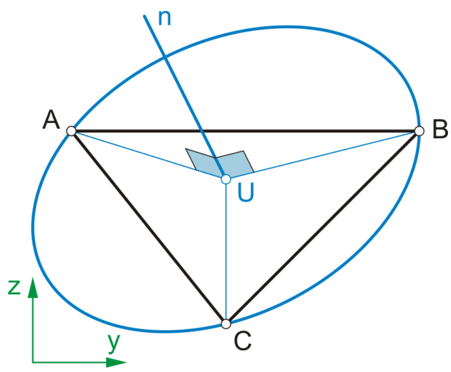
Aufgabe 51

Gegeben ist ein Dreieck ABC [A(1/2/12), B(10/20/12), C(15/10/2)].

a) Die Normale n der Ebene ABC durch den Umkreismittelpunkt U des Dreiecks kann als Schnittgerade von zwei Symmetrieebenen ermittelt werden. Gib eine Parameterdarstellung von n an.

b)[D] Begründe, warum man den Umkreismittelpunkt U nicht als Schnittpunkt von drei Symmetrieebenen berechnen kann.

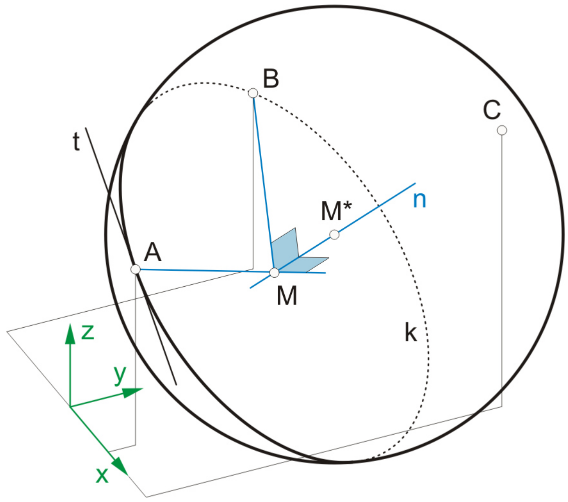
c) Berechne den Umkreismittelpunkt U.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

Aufgabe 52

Eine Kugel wird durch die Punkte A(3/1/7), B(-5/9/7), C(6/13/11) und eine Tangente t [X = A + u·(-33/1/24)] im Punkt A festgelegt.



a) Der Schnittkreis k der Kugel mit der Ebene AtB geht durch A, B und berührt t in A. Ermittle eine Parameterdarstellung der Geraden n, die durch die Mittelpunkte M und M* des Kreises und der Kugel geht.

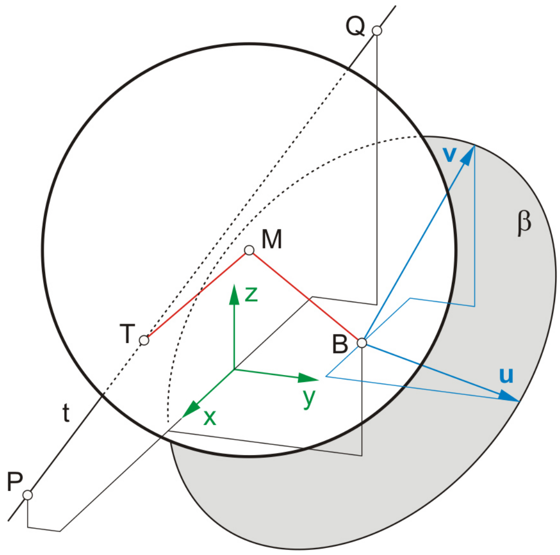
b) Berechne den Mittelpunkt M des Kreises.

c) Berechne den Mittelpunkt M* der Kugel.

d) Berechne den Winkel, den die Tangentialebenen in A und B einschließen.

Aufgabe 53⁺

Die Tangentialebene β dieser Kugel ist durch ihren Berührpunkt B(11/12/7) sowie die Vektoren **u** = (6/12/0) und **v** = (-8/4/10) festgelegt. Die Gerade PQ [P(29/-2/2), Q(-13/4/17)] ist eine Tangente dieser Kugel.



a) Berechne den Berührpunkt T von PQ und den Mittelpunkt M der Kugel.

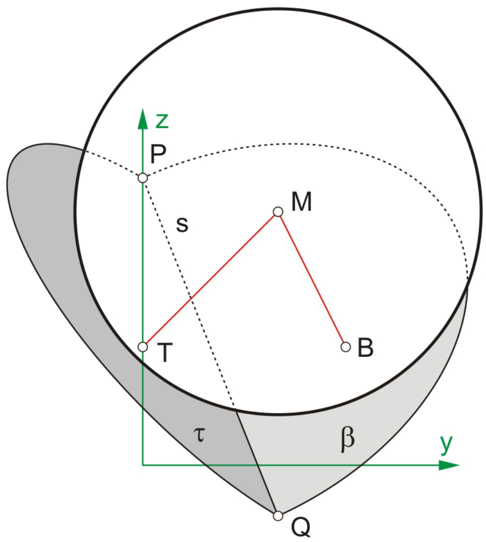
b) Berechne den Winkel zwischen der Tangente PQ und der Tangentialebene β.

c)[D] Die zur Festlegung von β verwendeten Vektoren **u** und **v** sind gleich lang und haben eine spezielle Lage in der Ebene β. Beschreibe diese Lage.

d)[D] Die Tangentialebene β ist durch eine Kreisfläche mit dem Mittelpunkt B und dem Radius |**u**| dargestellt. Berechne den tiefsten Punkt der Kreisfläche.

Aufgabe 54⁺

Von einer Kugel kennt man die beiden Tangentialebenen β [2x – y + 2z = 24] und τ [x + 2y + 2z = 29] sowie den Berührpunkt T(15/0/7) von τ. Der Mittelpunkt M der Kugel liegt oberhalb von τ.



Ansicht von vorne (Blick entgegen der x-Achse)

a) Ermittle eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden s von β und τ.

b) Berechne den Mittelpunkt M der Kugel.

c) Berechne den Berührpunkt B von β.

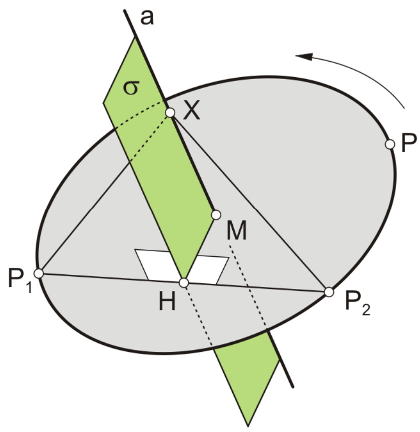
d) Die Tangentialebenen sind durch zwei Halbkreisflächen ($r = 2 \cdot \sqrt{65}$) dargestellt. Berechne die Punkte P und Q.

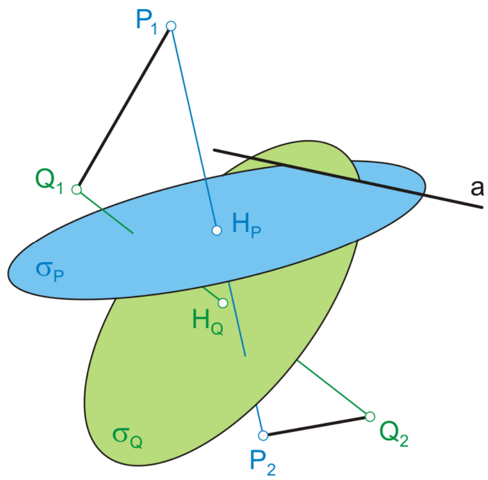
e)[D] Ermittle den Winkel zwischen den Geraden PQ und TB.

Drehung

In diesem Abschnitt geht es nicht um die Ermittlung der Endlage eines Objekts, wenn die Anfangslage, die Drehachse und der Drehwinkel gegeben sind (dazu würde man orthogonale Matrizen benötigen), sondern um die Ermittlung von Bahnkreisen, Drehachsen und Drehwinkeln.

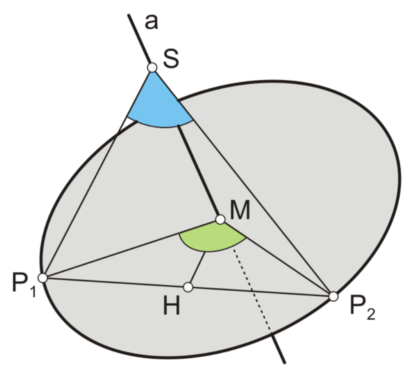
Die **Bahnkurve** eines Punktes P bei der Drehung um eine Achse a ist ein **Kreis** (linkes Bild). Seine Ebene ist orthogonal zu a, sein Mittelpunkt M liegt auf a. Zwei Drehlagen P_1 und P_2 von P haben von jedem auf a liegenden Punkt X jeweils denselben Abstand. Daher liegt a in der Symmetrieebene σ der Sehne P_1P_2 und ist orthogonal zu P_1P_2.





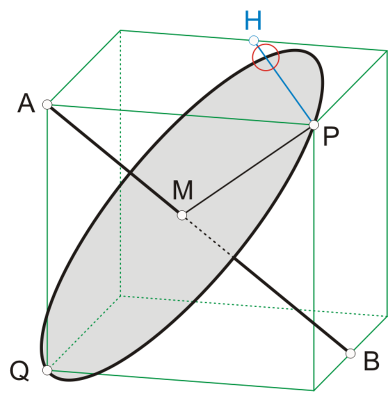
Zwei gleichlange Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 mit windschiefen Trägergeraden können stets durch eine Drehung ineinander übergeführt werden. Da die Achse a der Drehung in den beiden Symmetrieebenen σ_P und σ_Q der Sehnen P_1P_2 und Q_1Q_2 liegt, ist sie die Schnittgerade von σ_P und σ_Q (rechtes Bild).

Beachte, dass der Drehwinkel in der Ebene eines Drehkreises zu messen ist. Die Strecke SP_1 wird durch die Drehung zwar in die Strecke SP_2 übergeführt, der Winkel $<P_1SP_2$ ist aber kleiner als der Drehwinkel $<P_1MP_2$.



Aufgabe 55

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 9. Die Punkte B und H sind Halbierungspunkte von Würfelkanten. Der Punkt P rotiert um die Achse AB. Sein Bahnkreis hat den Mittelpunkt M.



a) Gib das Verhältnis MA:MB möglichst einfach an.

b) Zeige, dass der Würfeleckpunkt Q auf dem Kreis liegt.

c)D Untersuche, ob Q der tiefste Punkt des Kreises ist.

d)D Untersuche, ob der Kreis die Strecke PH zweimal schneidet.

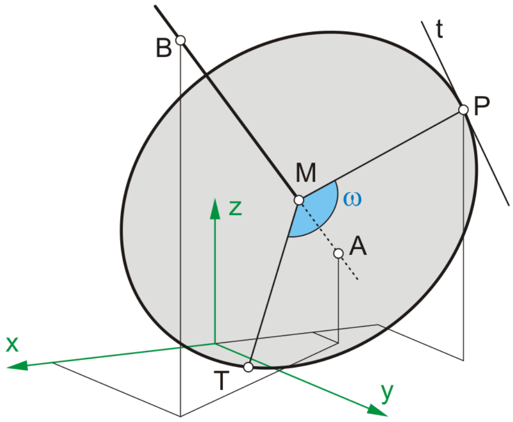
Aufgabe 56

Der Punkt P(-10/10/14) rotiert um die Gerade AB [A(-6/3/5), B(10/15/21)] und durchläuft dabei einen Kreis.

a) Berechne den Mittelpunkt und den Radius des Kreises.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung der Tangente t in P.

c)$^{+}$ Der Punkt T ist der tiefste Punkt des Kreises. Berechne den Drehwinkel ω = <PMT und die Höhe von T über der xy-Ebene.

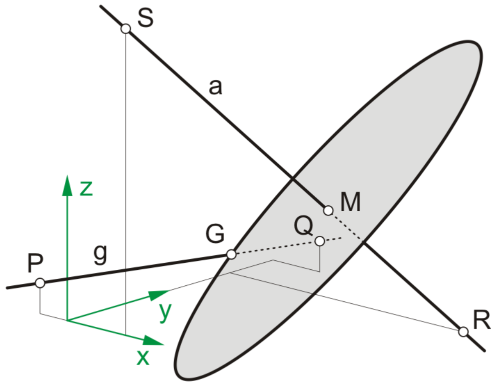


Aufgabe 57

Die Gerade g [P(-7/0/6), Q(12/57/6)] rotiert um die Achse a [R(60/45/0), S(15/0/60)]. Dabei durchläuft jeder Punkt von g einen Kreis. Der Punkt G durchläuft den kleinsten Kreis.

a) Berechne den Punkt G sowie den Mittelpunkt M und den Radius dieses Kreises.

b)^{D} Berechne jenen Punkt P* von g, der einen gleich großen Kreis wie der Punkt P durchläuft.



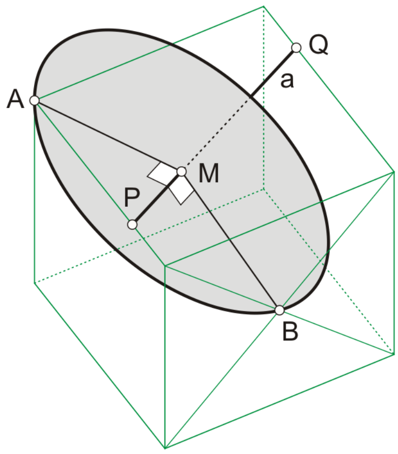
Aufgabe 58

Der Eckpunkt A eines Würfels (Kantenlänge 10) soll durch eine Drehung in den Seitenflächenmittelpunkt B verlagert werden, wobei die Achse a in der Deckfläche des Würfels liegen soll. Der Bahnkreis liegt also in einer lotrechten Ebene.

a)^{D} Untersuche (ohne zu rechnen), ob die Achse a durch den Mittelpunkt der Deckfläche des Würfels geht.

b) Beschreibe die Positionen der Punkte P und Q auf den Würfelkanten durch möglichst einfache Verhältnisse.

c) Beschreibe die Position des Bahnkreismittelpunktes M auf der Strecke PQ durch ein möglichst einfaches Verhältnis.



Aufgabe 59

Die Dreiecke OA_1B_1 [$A_1(56/0/17)$, $B_1(56/0/62)$] und OA_2B_2 [$A_2(-20/55/0)$, $B_2(16/82/0)$] sind kongruent. Sie können durch eine Drehung um eine Achse a zur Deckung gebracht werden.

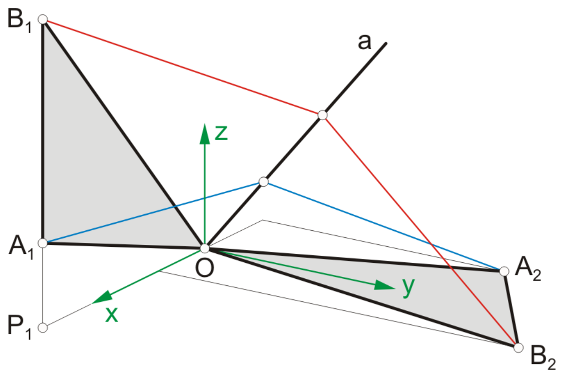
a) Überprüfe, dass die Angabe zulässig ist.

b) Ermittle eine Parameterdarstellung der Achse a.

c) Berechne den kleineren der beiden Drehwinkel.

d) Berechne die Drehlage P_2 des Punktes P_1.

e)**D** Begründe (ohne zu rechnen), dass die Winkel der Achse a zur y-Achse und z-Achse gleich groß sind.



Aufgabe 60+

Gegeben ist ein Würfel mit der Kantenlänge 33. Die Punkte Q_1 und Q_2 sind Halbierungspunkte von Würfelkanten. Die Strecken P_1Q_1 und P_2Q_2 sind gleich lang und können daher durch eine Drehung um eine Achse a zur Deckung gebracht werden.

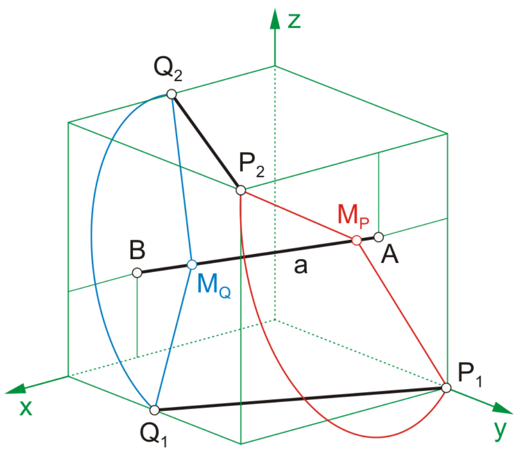
a) Ermittle eine Parameterdarstellung der Achse a.

b)**D** Begründe (ohne zu rechnen), dass die Achse a durch den Mittelpunkt des Würfels geht.

c) Berechne die Punkte A und B.

d) Berechne die Mittelpunkte M_P und M_Q der Drehkreisbögen.

e) Überprüfe, dass die Winkel $<P_1M_PP_2$ und $<Q_1M_QQ_2$ gleich groß sind.



Aufgabe 61+

Das Ausfahren des Fahrgestells eines Flugzeugs kann durch Drehen um eine im Flugzeugrumpf untergebrachte Achse a erfolgen. Die durch M_1A_1 [$M_1(0/0/8)$, $A_1(0/0/11)$] festgelegte Ausgangslage eines Rads und die durch M_2A_2 [$M_2(18/12/2)$, $A_2(18/9/2)$] festgelegte Endlage sind gegeben.

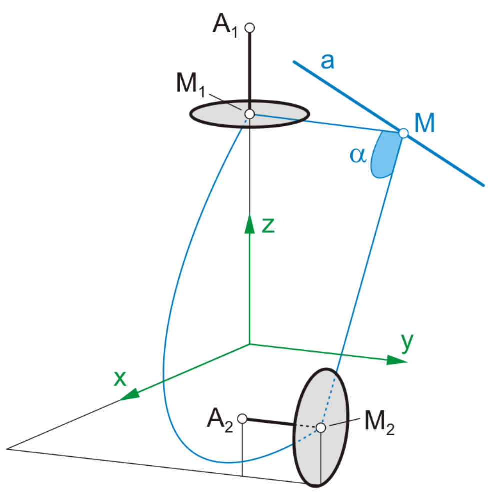
a) Ermittle eine Parameterdarstellung der Achse a.

b) Berechne den Mittelpunkt M des Bahnkreisbogens, der die Radmittelpunkte M_1 und M_2 verbindet.

c) Berechne einen Richtungsvektor der Tangente des Bahnkreisbogens in M_2.

d) Berechne den Drehwinkel α.

e) Berechne den Halbierungspunkt des Bahnkreisbogens.



Reflexion

Für die (idealisierte) Reflexion eines Lichtstrahls an einer Spiegelebene gilt, dass der Einfallswinkel und der Ausfallswinkel gleich groß sind.

Präziser muss gesagt werden, dass die Ebene, die den einfallenden und ausfallenden Lichtstrahl verbindet, eine **Normalebene** der Spiegelebene σ ist. Daraus folgt, dass die **Winkelsymmetrale** w zwischen dem einfallenden und ausfallenden Lichtstrahl eine **Normale** von σ ist.

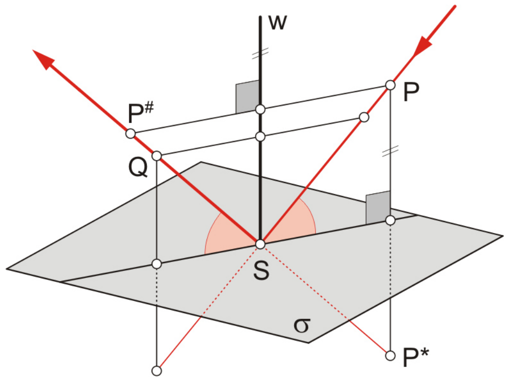
Die Reflexion hängt mit der **Spiegelung** an einer **Ebene** bzw. an einer **Geraden** zusammen:

- Spiegelt man einen Punkt P des einfallenden Lichtstrahls an der Spiegelebene σ, so liegt der gespiegelte Punkt P* auf der Verlängerung des ausfallenden Lichtstrahls.

- Spiegelt man P an der Flächennormalen w im Auftreffpunkt S, so liegt der gespiegelte Punkt $P^{\#}$ auf dem ausfallenden Lichtstrahl.

Analoge Aussagen gelten für die Punkte des ausfallenden Lichtstrahls.

Um den Auftreffpunkt S eines von P ausgehenden und nach Q reflektierten Lichtstrahls zu ermitteln, schneidet man die Gerade P*Q mit der Spiegelebene.



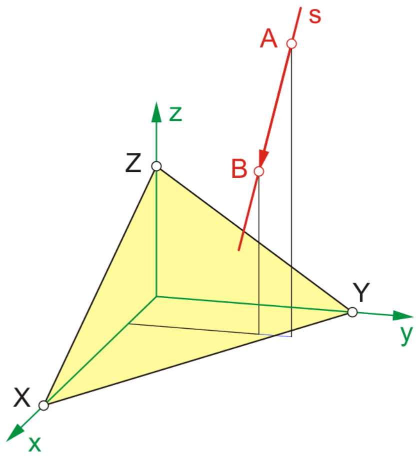
Aufgabe 62

Der Lichtstrahl s [A(3/5/9), B(3/4/5)] wird an der Ebene XYZ [X(12/0/0), Y(0/6/0), Z(0/0/4)] reflektiert.

a) Berechne den Einfallswinkel.

b) Berechne einen Richtungsvektor des ausfallenden Lichtstrahls durch Spiegeln von s an der Ebene XYZ.

c) Berechne einen Richtungsvektor des ausfallenden Lichtstrahls durch Spiegeln von s an der Flächennormalen im Auftreffpunkt von s.



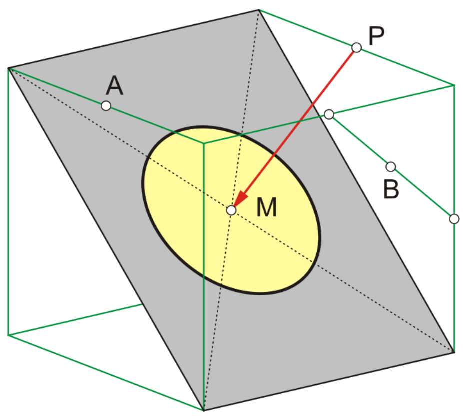
Aufgabe 63

Ein kreisförmiger Spiegel (Radius 3) liegt in einer Diagonalebene eines Würfels (Kantenlänge 10). Alle eingeringelten Punkte sind Halbierungspunkte.

a) Untersuche, ob der Punkt B zu sehen ist, wenn man vom Punkt A aus auf den Spiegel blickt.

b) Untersuche, ob man sich selbst sieht, wenn man vom Punkt B aus auf den Spiegel blickt.

c)[D] Untersuche (ohne zu rechnen), ob der Lichtstrahl PM nach der Reflexion eine Würfelkante trifft.



Aufgabe 64

Das Bild zeigt jenen Bereich eines in der yz-Ebene liegenden Rechtecks, der vom Eckpunkt A(0/-8/10) aus im rechteckigen Spiegel PQRS [P(5/-2/0), Q(3/2/0), R(x/3,4/3,5), S] zu sehen ist.

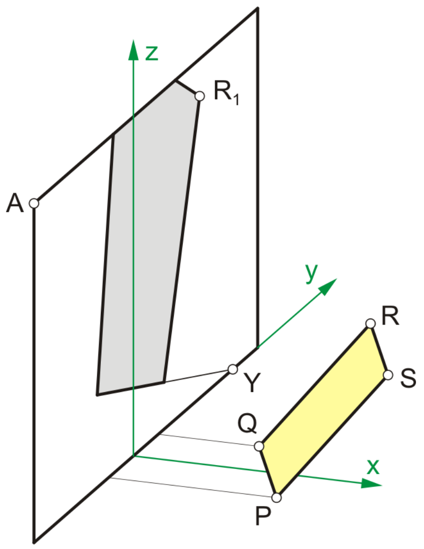
a) Berechne die Eckpunkte R und S des Spiegels.

b) Gib die Steigung des Spiegels in Prozent an.

c) Berechne den Eckpunkt R_1.

d)[D] Berechne den Schnittpunkt Y (Kopfrechnung).

e)[D] Begründe, dass man den Punkt A nicht sehen kann, wenn man vom Punkt B(0/8/5) aus auf den Spiegel blickt.



Aufgabe 65+

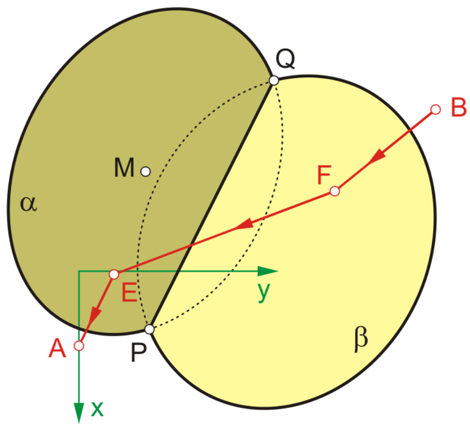
Zwei kreisförmige Spiegel α und β haben die Schnittkante PQ [P(1,4/1,7/2,4), Q(-4,6/4,7/2,4)]. Ihre Ebenen werden durch die Normalvektoren $\mathbf{n}_\alpha = (2/4/5)$ und $\mathbf{n}_\beta = (3/6/-10)$ festgelegt.

a) Überprüfe, dass die Angabe zulässig ist.

b) Der Mittelpunkt M von α hat von PQ den Abstand 2,4. Berechne den Mittelpunkt M.

c) Ein vom Punkt B(-3,9/8,6/6,4) ausgehender Lichtstrahl trifft nach Reflexion in den Punkten F und E den Punkt A(1,8/0/5,4). Berechne den Einheitsvektor des Vektors $\overrightarrow{FE}$.

d)[D] Der von B nach A gehende Lichtstrahl BFEA liegt nicht in einer Ebene. Für zwei andere Punkte $B_1(0/y/12)$ und $A_1(-4,3/0/10)$ soll dies jedoch der Fall sein. Berechne den Punkt B_1.



Ansicht von oben (Blick entgegen der z-Achse)

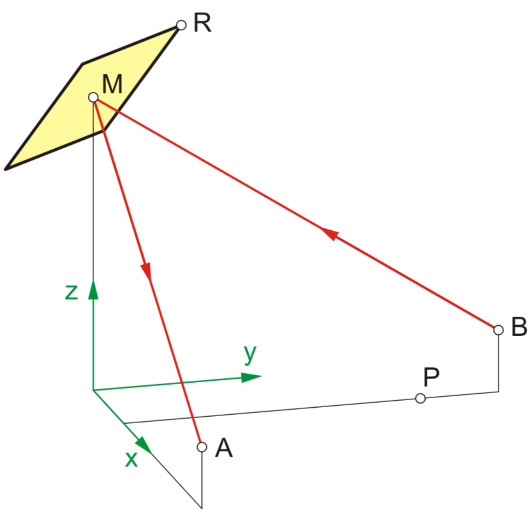
Aufgabe 66+

Von einem Punkt A(250/0/40) aus soll durch einen Blick auf einen quadratischen Spiegel (Seitenlänge 100) die nicht direkt einsehbare Umgebung eines Punktes B(70/240/40) beobachtet werden. Der Spiegel ist mit seinem Mittelpunkt so im Punkt M(0/0/190) zu befestigen, dass B von A aus genau in M zu sehen ist, und dass zwei Kanten des Spiegels waagrecht sind.

a) Ermittle eine Gleichung der Spiegelebene.

b) Untersuche, ob der Punkt P(70/190/0) vom Punkt A aus im Spiegel zu sehen ist.

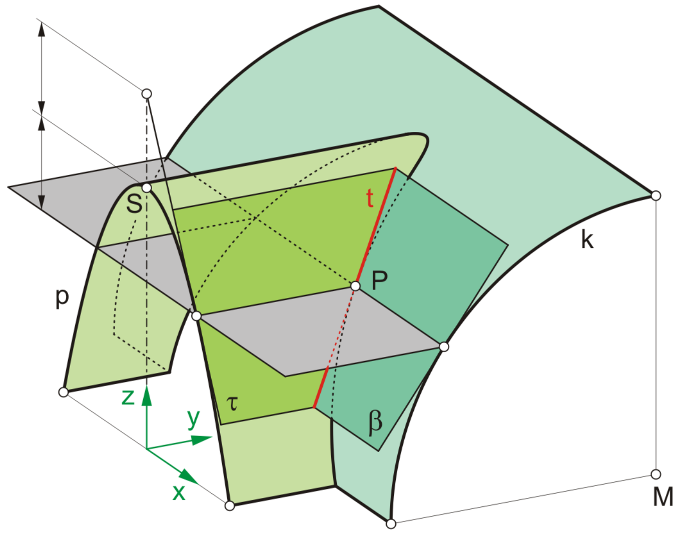
c) Berechne den Eckpunkt R des Spiegels.



Schluss•

Aufgabe 67⁺

Rechts ist die Verschneidung zweier Zylinderflächen zu sehen. Die Basiskurve p ist ein zur z-Achse symmetrischer Parabelbogen (Breite 240, Höhe 187,5) mit dem Scheitel S. Die Basiskurve k ist ein Viertelkreis (Radius 200) mit dem Mittelpunkt M(200/280/0). Das graue Rechteck liegt in der Ebene z = 120.

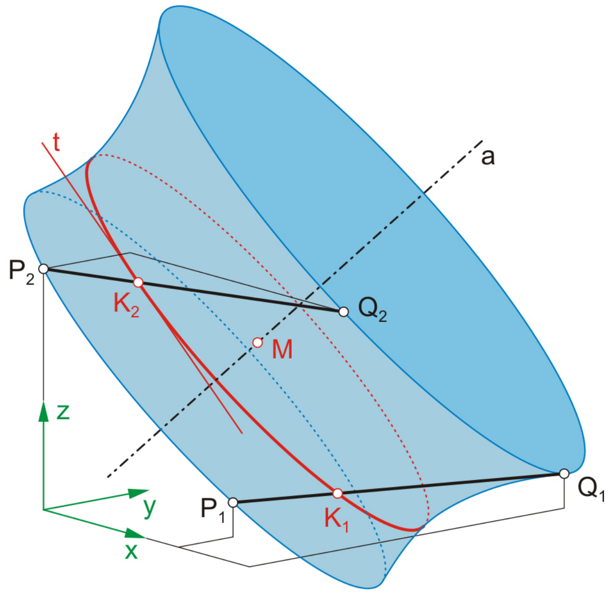


a) Berechne den Punkt P der Schnittkurve der beiden Zylinderflächen.

b) Die Tangente t der Schnittkurve im Punkt P liegt in den Tangentialebenen τ und β. Ermittle eine Parameterdarstellung von t.

Aufgabe 68⁺

Wenn eine Strecke PQ um eine windschiefe Achse a rotiert, so überstreicht sie eine Zone eines einschaligen Drehhyperboloids. Die Drehlagen P_1Q_1 [P_1(36/12/6), Q_1(55/69/6)] und P_2Q_2 [P_2(0/0/42), Q_2(57/19/42)] sind gegeben.



a) Ermittle eine Parameterdarstellung von a.

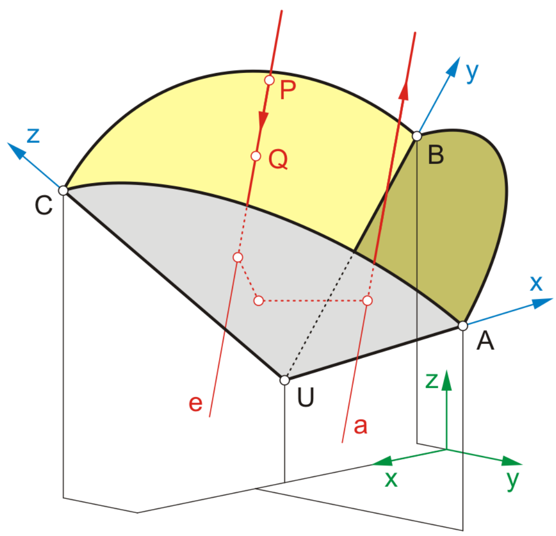
b) Der Kehlkreis (rot) des Hyperboloids ist der Bahnkreis mit dem kleinsten Radius. Berechne den Mittelpunkt M und die Punkte K_1, K_2.

c) Ermittle eine Parameterdarstellung der Kehlkreistangente t im Punkt K_2.

d)^D Untersuche (ohne zu rechnen), ob der Winkel zwischen P_2Q_2 und der Kehlkreisebene gleich dem Winkel zwischen P_2Q_2 und t ist.

Aufgabe 69⁺

Eine Raumecke besteht aus drei paarweise orthogonalen Ebenen. Sie wird hier von Viertelkreisen begrenzt.



a) Begründe mit Hilfe des blauen Koordinatensystems, dass die Trägergeraden e und a des einfallenden und ausfallenden Lichtstrahls symmetrisch zum Ursprung U liegen und daher parallel sind.

b) Die Raumecke ist durch U(22/0/10), A(26/28/20), B(0/-4/30), C(42/-10/30) festgelegt. Überprüfe, dass die Angabe zulässig ist.

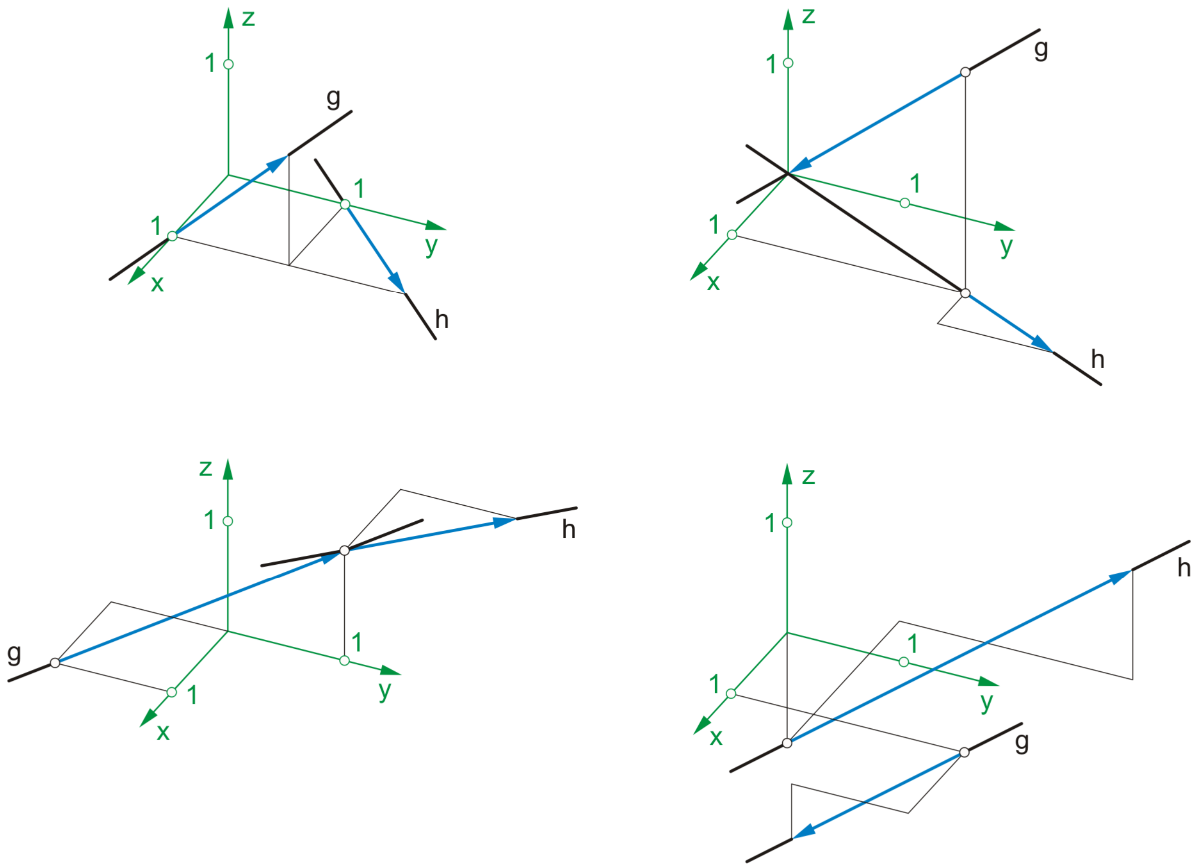
c) Der einfallende Lichtstrahl ist durch P(40,8/16,6/44,5) und Q(38/12/36) festgelegt. Berechne den letzten Auftreffpunkt vor dem Austritt aus der Raumecke.

Lösungen und Hinweise

In diesem Abschnitt werden alle Lösungen angegeben und viele Lösungswege stichwortartig beschrieben. Ob diese Lösungswege die einfachsten sind, ist subjektiv: Einfach ist, was man verstanden hat. Viele Wege führen zum Ziel.

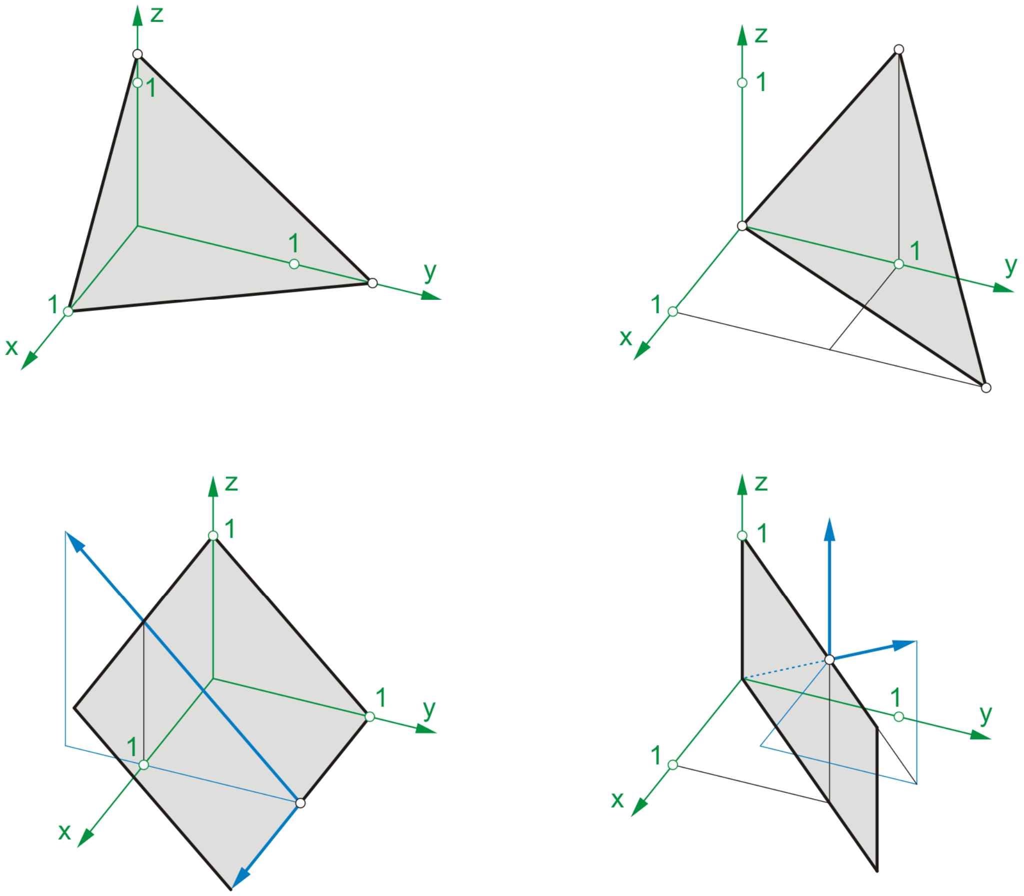
Vor allem bei den mit [D] gekennzeichneten Teilaufgaben sind Begründungen angegeben. Sie sind im Gegensatz zu den nur skizzierten Lösungswegen ausführlich formuliert.

Aufgabe 1



1: windschief 2: schneidend 3: schneidend 4: parallel

Aufgabe 2



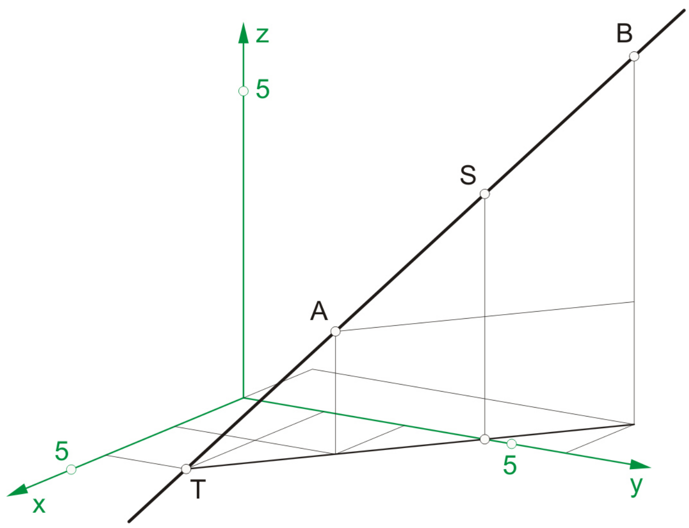
1: C 2: A, B, D 3: B, D 4: C, D

Aufgabe 3

c) T(4/1,5/0)

ähnliche Dreiecke bzw. Strahlensatz für Überlegung der Koordinaten von T

d) k = 0,8



Aufgabe 4

b) S(-1/9/0)

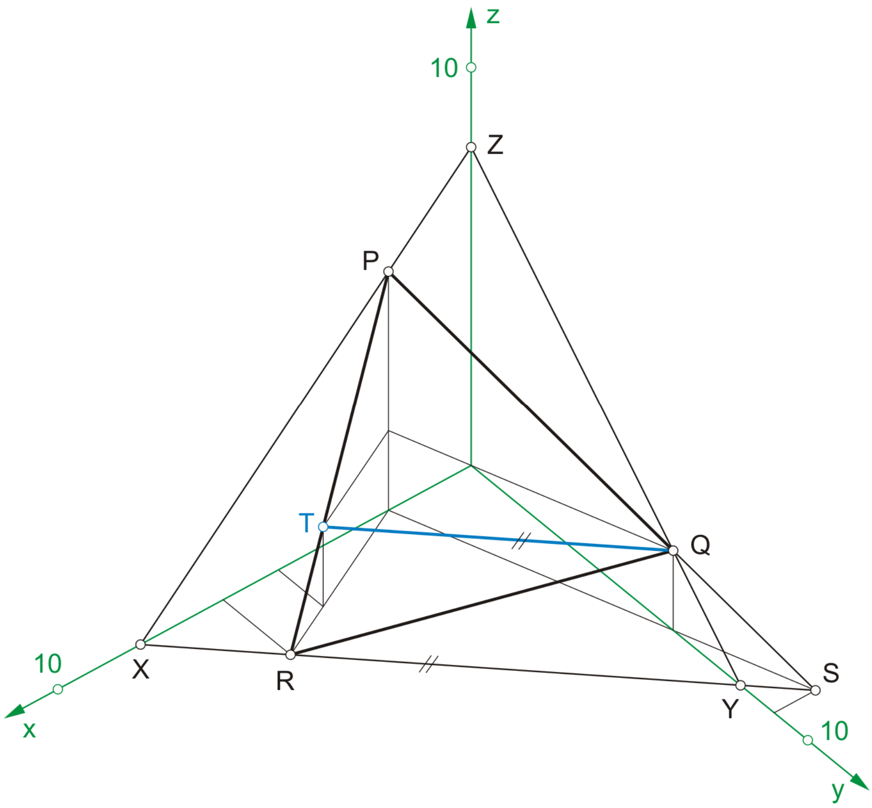
ähnliche Dreiecke bzw. Strahlensatz für Überlegung der Koordinaten von S

c) $\overrightarrow{RS}$ = (-7/7/0)

d) T($\frac{14}{3}$ / $\frac{4}{3}$ / 2)

ähnliche Dreiecke bzw. Strahlensatz für Überlegung der Koordinaten von T

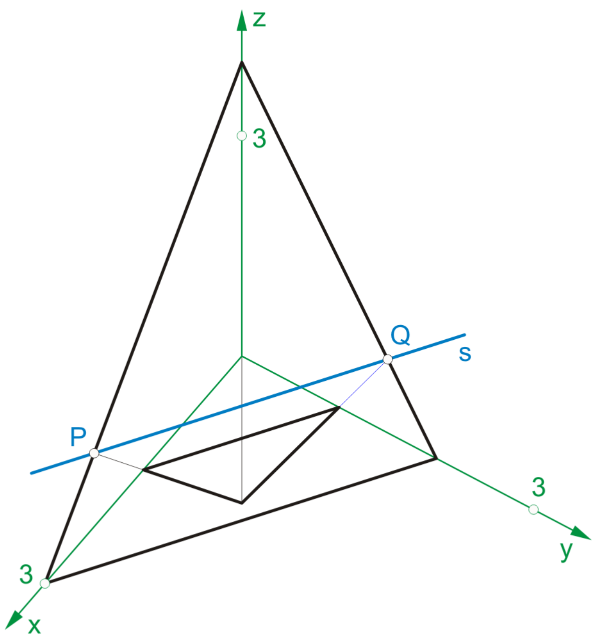
e) X(8/0/0), Y(0/8/0), Z(0/0/8)



Aufgabe 5

a) ε [X = (0/0/4) + u·(3/0/-4) + v·(0/1/-2)],
φ [4x + 6y – 3z = 6]

c) P($\frac{9}{4}$ / 0 / 1), Q(0 / $\frac{3}{2}$ / 1)

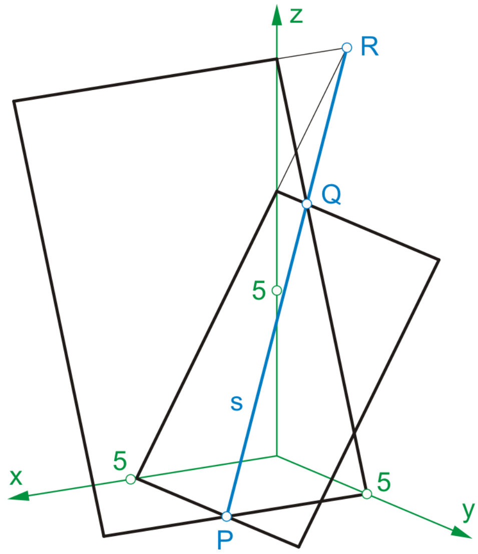


Aufgabe 6

a) ε [12y + 5z = 60], φ [5x + 3z = 24]

c) $P(4{,}8\,/\,5\,/\,0)$, $Q(0\,/\,\frac{5}{3}\,/\,8)$, $R(-2{,}4\,/\,0\,/\,12)$

ähnliche Dreiecke bzw. Strahlensatz für Überlegung der Koordinaten von Q und R



Aufgabe 7

a) ja

Richtungsvektor der blauen Strecke und Normalvektor des Dreiecks orthogonal

b) nein

Richtungsvektor der roten Strecke und Normalvektor des Dreiecks nicht parallel

c) nein, nein

Richtungsvektoren nicht orthogonal, Gleichungssystem zur Berechnung des Schnittpunktes widersprüchlich

Aufgabe 8

a) Normalvektoren der Dreiecke nicht parallel

b)+ ja, $\Delta z = -1$

Die Änderung ist möglich, da die dem höchsten Eckpunkt gegenüberliegende Seite des hellgrauen Dreiecks parallel zum dunkelgrauen Dreieck ist.

Aufgabe 9

a) z = 1

P(0/0/z) in Gleichung der Vierecksebene [5x – 2y + 8z = 8] einsetzen

b)D (2/5/0)

Da das Dreieck parallel zur z-Achse und orthogonal zum Viereck ist, ist die in der xy-Ebene liegende Seite des Vierecks orthogonal zum Dreieck. Die Koordinaten des Normalvektors können abgelesen werden.

c) Q(2,759/2,897/0)

untere Seite des Vierecks mit Dreiecksebene schneiden

Aufgabe 10

a) AB, FE windschief

b) (2,5/10/5), (6/3/12)

c)[D] AB, CD: Die Ebene verbindet die lotrechte Kante durch B mit der lotrechten Strecke AD.
CD, EF: Die Ebene ist die durch DF gehende Diagonalebene des Würfels.

Aufgabe 11

a)[D] Die Seiten AP und QC sowie BQ und PC sind parallel, da sie auf Schnittgeraden der Fünfecksebene mit parallelen Begrenzungsflächen des Quaders liegen.

b) P(8/0/12), Q(6/12/0)

P(x/0/12) und Q(x/12/0) in Ebenengleichung [6x – 5y – 6z = -24] einsetzen

c) nein

Richtungsvektor von g nicht orthogonal zu $\overrightarrow{AB}$

d) S(8,1/6,6/6,6)

Aufgabe 12

a)[D] S(3/0/1)

S ist Halbierungspunkt von DE

b) g [X = S + t·(-1/4/3)]

für weiteren Punkt auf g etwa BC mit Ebene DEF schneiden, ergibt (2,4/2,4/2,8)

c) ja

g mit einzig möglicher Würfelkante schneiden, ergibt (2/4/4)

d) nein

Normalvektoren nicht parallel

Hinweis: Die orthogonale Lage der Strecken AC und ED reicht für die orthogonale Lage der Ebenen nicht aus.

Aufgabe 13

a) ja

$\overrightarrow{HS}$ parallel zu Normalvektor der Trapezebene

b)[D] nein

Alle durch die Spitze S gehenden und zum Trapez orthogonalen Ebenen gehen durch SP.

Aufgabe 14

a), b), c) jeweils ja

d)[D] Da die Tetraeder ABCP und ABCQ jeweils gleich lange Seitenkanten haben, gehen ihre Höhen durch das Zentrum des gleichseitigen Dreiecks ABC.

Die Raumdiagonale PQ liegt in der durch die Würfelkante PB gehenden Diagonalebene des Würfels. Da die Flächendiagonale UV orthogonal zu dieser Ebene ist, sind PQ und UV (windschief) orthogonal.

e)[+] Rechteck AQVP skizzieren, P und Q verbinden, A und Halbierungspunkt von PV verbinden, ähnliche Dreiecke beachten

Aufgabe 15

a) 3:5

RS mit Ebene PQM schneiden

b) 7:2

Richtungsvektor der Basisdiagonalen in R anhängen, Verbindungsebene mit RS ermitteln, mit PQ schneiden

Aufgabe 16[+]

a) PA:QA = 5:3, RB:SB = 23:9

A und B mit Parameterdarstellungen von PQ und RS ansetzen, „waagrecht" und „orthogonal" durch Gleichungen beschreiben, unbekannte Parameter von A und B berechnen

b)[D] Alle waagrechten Geraden, die zur Flächendiagonalen RS orthogonal sind und RS schneiden, sind parallel zur Würfelkante durch Q.

Aufgabe 17

a) P*(24/18/30)

Normale der Ebene ABC durch P mit Ebene schneiden, ergibt S(27/9/15), P an S spiegeln

b) ja

Aufgabe 18

a) F(3,6/4,8/-6) (Ursprung P und Koordinatenachsen x, y, z durch A, B, C)

b) Orthogonalitäten $\overrightarrow{FC} \perp \overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{FA} \perp \overrightarrow{BC}$ überprüfen

Aufgabe 19

a) B(8,5/16/14,5)

z-Koordinate von B mit Steigungsdreieck ermitteln

b) Q(0/10,8/16)

Schnittpunkt T der Geraden PQ und g liegt in Ebene z = 16, ergibt T(8/18/16)

c) P*(32/20/4)

Normalebene von g durch P mit g schneiden, ergibt S(10/10/10), P an S spiegeln

d) (-0,892/-0,074/0,446)

Einheitsvektor von P*T berechnen

Aufgabe 20

a) ja

Normalvektoren von ABC und DEF orthogonal

b) R(2,4/0/0,6), S(2/2/2)

Normalebene mit $\overrightarrow{PQ}$ und Normalvektor von ABC festlegen, mit CA und CB schneiden

c) (-2/10/7)

Produktvektor von Normalvektoren der beiden Ebenen berechnen

Aufgabe 21

a) 24:13

Ebene EFGH mit $\overrightarrow{EF}$ und Normalvektor von ABCD festlegen, mit Seitenkante SA (oder SB) schneiden, $t \cdot \overrightarrow{AS} = \overrightarrow{AG}$, Verhältnis AG:SG = t:(1 – t) vereinfachen

b) $z \approx 1,967$

FG und AD schneiden

Aufgabe 22

a) h = 4,583

b) Tetraedervolumen und Flächeninhalt des Dreiecks ABC mit Vektorformeln berechnen, dann „Volumen ist Grundfläche mal Höhe durch 3" verwenden

c) F(6/5/5)

Aufgabe 23

a) d = 5,477

b) Flächeninhalt des Dreiecks ABS mit Vektorformel berechnen, dann „Flächeninhalt ist Grundlinie mal Höhe durch 2" verwenden

c) ja

F mit Parameterdarstellung von BS ansetzen, Orthogonalität von $\overrightarrow{BS}$ und $\overrightarrow{AF}$ mit Gleichung ausdrücken, unbekannten Parameter von F berechnen

d)[D] Da die Geraden AF und BC nicht orthogonal sind, ist AF nicht orthogonal zur Ebene BCS, und daher ist d größer als der Abstand von A zur Ebene BCS.

Aufgabe 24[+]

a) P und F mit Parameterdarstellungen von CD und AB ansetzen, Orthogonalität von $\overrightarrow{PF}$ und $\overrightarrow{AB}$ sowie Abstand von P und F durch Gleichungen ausdrücken, unbekannte Parameter von P und F berechnen, zweite Lösung für P außerhalb der Strecke CD (P ist Halbierungspunkt von CD)

b) AF:BF = 1:2

Aufgabe 25

a) d = 4,243

b) G und H mit Parameterdarstellungen von AB und CD ansetzen, Orthogonalität von $\overrightarrow{GH}$ zu $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ durch Gleichungen ausdrücken, unbekannte Parameter von G und H berechnen

c) k ≈ 0,243

d)D Die Gleichung ergibt sich, wenn man den Flächeninhalt des Dreiecks GCD auf zwei Arten berechnet: mit dem Produktvektor und mit „Grundlinie mal Höhe durch 2".

Aufgabe 26+

a) T(1/13/6), F(13/9/12), r = 14

Fußpunkte T und F des kürzesten Abstands von t und a berechnen

b) M(19/15/4), M*(10/6/16), A(22/2/22)

F teilt Achsenstrecke MM* im selben Verhältnis wie T die Mantelstrecke

Aufgabe 27+

a) Orthogonalität von PQ und RS überprüfen

b) M(-9/15/1), N(-1/39/13)

Fußpunkte M und N des kürzesten Abstands von PQ und RS berechnen

c) A(9/13/-7), B(-15/25/-15), C(-7/49/-3), D(17/37/5)

halbe Flächendiagonale von M auf PQ und von N auf RS nach unten auftragen, ergibt B und D
$\overrightarrow{MN}$ an B anhängen und entgegengesetzten Vektor an D anhängen, ergibt C und A

Aufgabe 28

a)D $\varepsilon = \delta = 90°$

Begründung für ε: Die Kante BD und die obere Begrenzungsfläche des Würfels sind orthogonal.
Begründung für δ: analog

b) $\varphi = 125{,}26°$

c)D Die Winkelschenkel HC und HD sind orthogonal zur Schnittstrecke AB, da sie Höhen in einem gleichseitigen bzw. gleichschenkligen Dreieck sind.

Aufgabe 29

a) 35,26°

b) 120°

Winkel mit Normalvektoren der beiden Ebenen berechnen (Winkel ist stumpf)

c)+ 72 m^3

Körper als Vereinigung eines dreiseitigen Prismas mit zwei rechteckigen Pyramiden auffassen, oder als Differenz eines dreiseitigen Prismas und zwei dreiseitigen Pyramiden

Aufgabe 30+

a) 101,70°

Winkelschenkel: Halbierungspunkt einer Quadratseite mit Mittelpunkt des Quadrats und gegenüberliegendem Eckpunkt des Dreiecks verbinden

b) 129,56°

Winkel mit Normalvektoren der beiden Ebenen berechnen (Winkel ist stumpf)

c) $V = a^3/3 \cdot \left(2+\sqrt{2}\right)$

Körper als Differenz eines achtseitigen Prismas und acht dreiseitigen Pyramiden auffassen

Aufgabe 31

a) α = 63,43°, β = 54,74°

b) F(2/0,8/1,6), Winkel 77,40°

F mit Parameterdarstellung von AB ansetzen, Orthogonalität von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{SF}$ durch Gleichung ausdrücken, unbekannten Parameter von F berechnen
Winkel zwischen $\overrightarrow{SF}$ = (2/-0,2/-0,4) und (0/-0,2/-0,4) messen

c)+ P(2/1,752/1,124)

P mit Parameterdarstellung von AB ansetzen, Winkelbedingung durch Gleichung ausdrücken, unbekannte Parameter von P berechnen, zweite Lösung außerhalb der Strecke AB

Aufgabe 32

a) zu überprüfen: Punkt H in Ebene ABC, Orthogonalitäten CH $\perp$ AB und AH $\perp$ BC

b)D 90°

Wegen AB $\perp$ HD und AB $\perp$ HC ist die Gerade AB eine Normale der Ebene HCD. Daher ist AB orthogonal zu allen in der Ebene HCD liegenden Geraden, also auch orthogonal zu CD.

c) D(-2/0/18)

d) 58,41°

Winkel zwischen $\overrightarrow{DC}$ und Normalvektor von ABD messen, Komplementärwinkel berechnen

Aufgabe 33

a) **e** = (-4/-7/5), α = 51,67°

Spitze von **g** in Richtung von **n** auf ε projizieren, ergibt F(-2/-12/7)

b)+ **e** als Linearkombination **e** = **g** – t·**n** ansetzen, unbekannten Skalar t aus **e**·**n** = 0 berechnen

c)+ $\mathbf{e} = \mathbf{g} - \frac{\mathbf{g}\cdot\mathbf{n}}{\mathbf{n}^2}\cdot\mathbf{n}$

d)D Da die Vektoren **n** und **g** die Ebene des grünen Dreiecks festlegen, ist das Kreuzprodukt **n**×**g** ein Normalvektor der Ebene; also gilt **n**×**g** $\perp$ **e**. Da auch **n** $\perp$ **e** ist, sind die Vektoren **n**×(**n**×**g**) und **e** parallel.

Aufgabe 34

a) C(8/13/13), D(13/5/13)

b) 43,65°

Neigungswinkel der Solarzelle gleich Neigungswinkel der Seite BC

c) 31,23°

d) 80%

Winkel zwischen $\overrightarrow{PQ}$ und Normalvektor der Solarzelle messen, Komplementärwinkel berechnen, ergibt 53,13°; sin(53,13°) $\approx$ 0,80

Aufgabe 35

a) S(8/0/0), B(-4/9/3)

Orthogonalität von $\overrightarrow{MS}$ und $\overrightarrow{AC}$ beachten
$\overrightarrow{MB}$ hat Länge von $\overrightarrow{MA}$ und ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MS}$, Orientierung von $\overrightarrow{MB}$ beachten (z-Koordinate negativ gemäß Angabebild)

b) 60,79°

Winkel zwischen $\overrightarrow{HM}$ und $\overrightarrow{HS}$ messen (H ist Halbierungspunkt einer beliebigen Basiskante)

c)^{D} Da die Seite BC waagrecht ist (parallel zur xy-Ebene), liegt das Rechteck symmetrisch zu einer lotrechten Ebene (Normalebene von BC durch M). Die Neigungswinkel der Diagonalen gehen durch Spiegeln an der lotrechten Ebene ineinander über.

d)$^{+}$ 26,57°, (8/ $4\sqrt{5}$ /8)

Winkelscheitel über S in Höhe von M, also (8/0/8); zweiter Winkelschenkel durch Vektor (0/1/0) festgelegt

Aufgabe 36

a) A(-13/4/4), B(-3/8/12)

SP mit Normalebene von SM durch M schneiden
$\overrightarrow{MB}$ hat Länge von $\overrightarrow{MA}$ und ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MS}$, Orientierung von $\overrightarrow{MB}$ beachten (z-Koordinate positiv gemäß Angabebild)

b) a:h = $\sqrt{5} : 2$

c)^{D} nein

Bei einem Winkel von 60° müsste das Verhältnis aus Basiskantenlänge a und Höhe h gleich $2 : \sqrt{3}$ sein.

d)^{D} ja

Die Punkte M, A und B werden bei der Normalprojektion auf die yz-Ebene auf die Punkte (0/11), (4/4) und (8/12) abgebildet. Da die projizierten Strecken MA und MB gleich lang sind ($\sqrt{65}$), liegt ein Rechteck vor.

Aufgabe 37

a) C(0,5/15/9), G(-8,5/-3/15)

Normalebene von AE durch A mit Trägergerade von CG schneiden, ergibt C

b) D(-3,5/14/0), F(-0,5/-8/12)

Basismittelpunkt M(2,5/12/3), $\overrightarrow{MD}$ hat Länge von $\overrightarrow{MA}$ und ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AC}$, Orientierung von $\overrightarrow{MD}$ beachten (x-Koordinate negativ gemäß Angabebild)
$F = M - \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{AE}$

c) 108,43°

Winkel zwischen $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{MG}$ messen

Aufgabe 38+

a) Abstand von M zu PQ berechnen, ergibt14

b) A(25/5/24), C(13/25/-8)

Fußpunkt N(19/15/8) der Normalen von M auf PQ ist Halbierungspunkt von AC, halbe Diagonalenlänge $14\sqrt{2}$ auf beide Seiten auftragen

c) B(37/13/0), F(45/37/12)

$\overrightarrow{NB}$ hat Länge von $\overrightarrow{NA}$ und ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{NA} \times \overrightarrow{NM}$, Orientierung von $\overrightarrow{NB}$ beachten (x-Koordinate positiv gemäß Angabebild)
$F = B + 2 \cdot \overrightarrow{NM}$

d)D 1/3

Das Tetraeder kann als Differenz des Würfels und vier dreiseitigen Pyramiden aufgefasst werden. Die dreiseitigen Pyramiden haben jeweils drei Würfelkanten als Seitenkanten. Das Volumen jeder Pyramide ist daher 1/6 des Würfelvolumens.

Aufgabe 39

a) B(12/16/-5), D(-20/15/10), G(1/43/15)

$\overrightarrow{AD}$ hat Länge von $\overrightarrow{AE}$ und ist parallel zum Kreuzprodukt von $\overrightarrow{AE}$ mit dem Einheitsvektor der z-Achse, Orientierung von $\overrightarrow{AD}$ beachten (y-Koordinate positiv gemäß Angabebild)
$\overrightarrow{AB}$ hat Länge von $\overrightarrow{AE}$ und ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{AE} \times \overrightarrow{AD}$, Orientierung von $\overrightarrow{AB}$ beachten (z-Koordinate negativ gemäß Angabebild)
$G = A + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

b) S(-1,25/40/10)

CG mit Ebene z = 10 schneiden

c)D Das Viereck ist ein Parallelogramm, da gegenüberliegende Seiten in parallelen Ebenen liegen. Da die Kante AD orthogonal zur Seitenfläche CDHG ist, sind die Viereckseiten AD und DS orthogonal.

d)D 3:5

Da die beiden Körper Prismen mit der Höhe a sind (a ist die Kantenlänge des Würfels), verhalten sich die Rauminhalte wie die Flächeninhalte der Basisflächen. Wegen $\overrightarrow{GS}$ = (-2,25/-3/-5) und $\overrightarrow{EA}$ = (-9/-12/-20) ist $\overrightarrow{GS} = 1/4 \cdot \overrightarrow{EA}$; also gilt CS = 3/4·a. Daher verhalten sich die Flächeninhalte der Grundflächen der beiden Prismen wie $(3/8 \cdot a^2):(5/8 \cdot a^2) = 3:5$.

Aufgabe 40

a) N104°O

CA mit waagrechter Ebene z = 2,2 schneiden, ergibt H(3/3/2,2)

b) 82,5%

Normalvektor **n** von Ebene ABC berechnen, $\overrightarrow{FC}$ ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{HB} \times \mathbf{n}$, Steigung von $\overrightarrow{HB} \times \mathbf{n}$ berechnen

Aufgabe 41

a) 20,44° (AU) und 16,60° (AB)

Kante a hat Richtungsvektor **a** = (-1/2/0), $\overrightarrow{AU}$ ist parallel zum Kreuzprodukt von **a** mit Normalvektor **n** = (2/1/6) der Ebene, z-Koordinate von $\overrightarrow{AU}$ ist 20, ergibt U(-18/36/20)

b) 39,3%

Aufgabe 42

a)[D] Die Schnittgerade t der Tangentialebene τ mit der xy-Ebene ist die Tangente des Basiskreises in B. Die Normalebene von t durch B enthält den Basismittelpunkt M und die lotrechte Gerade durch M, also auch die Spitze S. Daher ist SB orthogonal zu t, also eine Fallgerade von τ, da t eine Hauptgerade von τ ist.

b) B(-5,6/4,2/0)

in xy-Ebene Normale auf Tangente t [3x + 4y = 0] durch M(-2,6/8,2) legen und mit t schneiden

c) 53,13°

d) SP mit xy-Ebene schneiden, ergibt Q(1,4/5,2/0), Radius überprüfen (r = 5)

e) –8x + 6y – 5z = 20

in xy-Ebene Radiusvektor $\overrightarrow{MQ}$ um 90° drehen, ergibt Tangentenvektor (3/4/0); Tangentialebene in P wird von $\overrightarrow{SQ}$ und Tangentenvektor festgelegt

Aufgabe 43[+]

a) z = 340/3, M(0/24/68)

b)[D] Da MA auf einer Fallgeraden der Kreisebene liegt, ist die Schnittgerade der Kreisebene mit der xy-Ebene orthogonal zu MA.

c) B(-40/-51/68), C(60/-8/119)

$\overrightarrow{MB}$ ist parallel zum Kreuzprodukt von $\overrightarrow{MA}$ mit Einheitsvektor (0/0/1), Orientierung von $\overrightarrow{MB}$ beachten (y-Koordinate negativ gemäß Angabebild)
$\overrightarrow{MC}$ ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MA}$, Orientierung von $\overrightarrow{MC}$ beachten (z-Koordinate positiv gemäß Angabebild)

d)[D] k = 3/4

Die Kreisebene MAC ist lotrecht. Da der Vektor **f** die Steigung 4/3 hat, hat der Vektor $\overrightarrow{MA}$ die Steigung -4/3 und der zu $\overrightarrow{MA}$ orthogonale Vektor $\overrightarrow{MC}$ die Steigung 3/4.

Aufgabe 44

a) H(51/68/30), A(111/23/-10)

$\overrightarrow{MH}$ ist parallel zum Kreuzprodukt von $\overrightarrow{MP}$ mit Einheitsvektor (0/0/1), Orientierung von $\overrightarrow{MH}$ beachten (y-Koordinate positiv gemäß Angabebild)
$\overrightarrow{HA}$ ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MH}$, Orientierung von $\overrightarrow{HA}$ beachten (z-Koordinate negativ gemäß Angabebild)

b)**D** 29,29%

MB:MT = $\sqrt{2}$:1

c)**+** a = 85, b = 75

Der auf der Hauptgeraden durch M liegende Durchmesser wird als einziger Durchmesser unverkürzt abgebildet (also auf die Hauptachse der Ellipse), der auf der Fallgeraden durch M liegende Durchmesser wird am stärksten verkürzt abgebildet (also auf die Nebenachse der Ellipse). Die Längen der Projektionen der Strecken MH und HA sind also die gesuchten Halbachsenlängen.

Aufgabe 45

a) P(10/20/3), Q(10,5/9,5/8,1), R(20/14/3)

AB mit Ebene z = 3 schneiden, ergibt R
Q mit Parameterdarstellung von AC ansetzen, Orthogonalität von $\overrightarrow{HP}$ und $\overrightarrow{HQ}$ durch Gleichung ausdrücken, ergibt Q

b)**D** ja

Die Projektionen der Vektoren $\overrightarrow{HP}$ = (-5/3/0) und $\overrightarrow{HQ}$ = (-4,5/-7,5/5,1) auf die xy-Ebene sind orthogonal.

c)**D** ja

Die Strecke HQ liegt auf einer Fallgeraden des Dreiecks ABC.

Aufgabe 46**+**

a) P(16,2/-4,1/7,5), Q(9/-9,5/7,5)

Richtungsvektor **h** der Hauptgeraden ist parallel zum Produktvektor aus Normalvektor **n** = (3/-4/-12) von ε und Einheitsvektor (0/0/1); Richtungsvektor **f** der Fallgeraden ist parallel zum Produktvektor $\mathbf{n} \times \mathbf{h}$; P und Q mit Linearkombinationen aus **h** und **f** berechnen, dabei Orientierungen gemäß Angabebild beachten

b) **t** = (40/3/9)

Tangentenvektor **t** ist parallel zum Produktvektor $\mathbf{n} \times \overrightarrow{AQ}$

Aufgabe 47

a) 7:1 (A), 5:3 (B)

b)**D** Die Trägergeraden der durch A gehenden roten Seite und der durch Q gehenden Würfelkante liegen in einer Ebene (rechte Begrenzungsebene des Würfels) und haben daher einen Schnittpunkt S. Dieser Punkt S liegt in drei Ebenen (Symmetrieebene von PQ, rechte und untere Begrenzungsebene des Würfels), ist also der Schnittpunkt der drei Ebenen. Da die Trägergerade der unteren roten Seite die Schnittgerade der Symmetrieebene von PQ und der unteren Begrenzungsebene des Würfels ist, geht sie durch S.

c)**D** Gegenüberliegende Seiten sind parallel, da sie auf Schnittgeraden der Symmetrieebene von PQ mit parallelen Ebene liegen.

d)[D] Es gibt drei von P und drei von Q ausgehende Kanten. Die Halbierungspunkte der sechs anderen Kanten haben von P und Q den gleichen Abstand ($a\sqrt{5}/2$), liegen also in der Symmetrieebene von PQ. Das von diesen Halbierungspunkten gebildete Schnittsechseck hat gleich lange Seiten ($a\sqrt{2}/2$). Da auch die Diagonalen gleich lang sind ($a\sqrt{2}$), ist das Schnittsechseck regelmäßig.

Aufgabe 48

a) U(3,5/2/0), V(1/7/5)

gemeinsame Punkte der Ebenen $2x + y = 9$ (hellgrau) und $y – z = 2$ (dunkelgrau) mit den z-Koordinaten 0 und 5 berechnen

b) k = 0,894

c) U und V in Gleichung der Symmetrieebene [$4x + y + z = 16$] einsetzen

d)[+] X(2/5/3)

Höhe des Dreiecks ABX ist Abstand von X zum Halbierungspunkt H von AB; HX minimal für HX ⊥ UV;
X mit Parameterdarstellung von UV ansetzen und Orthogonalität von $\overrightarrow{HX}$ und $\overrightarrow{UV}$ durch Gleichung ausdrücken

Aufgabe 49[+]

a) σ [X = A + r·(0/-1/3) + s·(-5/12/4)]

σ durch Vektor auf Winkelsymmetrale von AP und AQ sowie Normalvektor von APQ festlegen

b) D(0/0/203)

c) B(-150/101/175), C(50/176/200)

B mit Parameterdarstellung von AP ansetzen, Orthogonalität von $\overrightarrow{DB}$ und $\overrightarrow{AP}$ durch Gleichung ausdrücken, ergibt B
Länge von AB auf AQ auftragen, ergibt C

Aufgabe 50[+]

a) σ [$3x – 4y = 0$]

Normalvektoren $\mathbf{n}_1 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ und $\mathbf{n}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$ der Ebenen ABC und ABD berechnen (Orientierung wichtig), Vektor auf Winkelsymmetrale von $\mathbf{n}_1$ und $\mathbf{n}_2$ ist Normalvektor von σ

b) P(42/31,5/70)

CD mit σ schneiden, ergibt S(50/37,5/0); Radius MS (50) auf MB auftragen

c)[D] T(18/13,5/-20)

Da die Symmetrieebene σ lotrecht ist, liegt der tiefste Punkt T genau unter M.

d)[D] nein

Der Punkt S ist zwar der Halbierungspunkt von CD, aber CD ist nicht orthogonal zur Symmetrieebene σ.

Aufgabe 51

a) n [X = (27,5/0/29,5) + t·(2/-1/2)]

b)[D] Die Schnittgerade n der Symmetrieebenen der Strecken AB und BC besteht aus allen Punkten, die von A, B und B, C gleich weit entfernt sind. Also geht auch die Symmetrieebene der Strecke AC durch n.

c) U(7,5/10/9,5)

Normale n mit Ebene ABC schneiden

Aufgabe 52

a) n [X = (-2/4/0) + t·(3/3/4)]

Normalebene von t durch A [-33x + y + 24z = 70] mit Symmetrieebene von AB [-x + y = 6] schneiden

b) M(1/7/4)

Normale n mit Ebene AtB [3x + 3y + 4z = 40] schneiden

c) M*(2,5/8,5/6)

Normale n mit Symmetrieebene von AC [3x + 12y + 4z = 133,5] schneiden

d) 83,51°

Winkel supplementär zu Winkel <AM*B

Aufgabe 53[+]

a) T(15/0/7), M(19/8/15)

Tangente t = PQ mit Tangentialebene β schneiden, ergibt S(1/2/12); Länge von Tangentenstrecke SB von S aus auf t auftragen (Position von S auf PQ beachten, Orientierung von $\overrightarrow{ST}$ gemäß Angabebild), ergibt T
Normalebene von t durch T mit Normale von β durch B schneiden, ergibt M

b) 26,39°

c)[D] Der Vektor **u** liegt auf einer Hauptgeraden. Wegen $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ liegt der Vektor **v** auf einer Fallgeraden.

d)[D] (19/8/-3)

Da **v** auf einer Fallgeraden liegt und |**u**| = |**v**| ist, ergibt sich der tiefste Punkt durch B – **v**.

Aufgabe 54[+]

a) s [X = (15,4/6,8/0) + t·(6/2/-5)]

b) M(19/8/15)

Symmetrieebenen σ_1 und σ_2 von β und τ ermitteln: Normalvektoren $\mathbf{n}_\beta$ = (2/-1/2) und $\mathbf{n}_\tau$ = (1/2/2) gleich lang, also sind $\mathbf{n}_\beta + \mathbf{n}_\tau$ und $\mathbf{n}_\beta - \mathbf{n}_\tau$ Normalvektoren von σ_1 und σ_2, ergibt σ_1 [3x + y + 4z = 53] und σ_2 [x – 3y = -5]; Normale von τ durch T mit σ_1 und σ_2 schneiden, Schnittpunkt mit z > 7 ist M

c) B(11/12/7)

Normale von β durch M mit β schneiden

d) P(-5/0/17), Q(19/8/-3)

s mit xz-Ebene schneiden, ergibt P
Richtungsvektor **s** auf Länge von $\overrightarrow{PQ}$ bringen, dabei Orientierung beachten (z-Koordinate negativ gemäß Angabebild), ergibt Q

e)D 90°

Die Ebene MPQ ist eine Symmetrieebene der Kugel. Durch Spiegeln an dieser Ebene geht τ in β und daher T in B über. Da TB orthogonal zur Symmetrieebene ist, ist TB auch orthogonal zu PQ.

Aufgabe 55

a) MA:MB = 4:5

Normalebene von AB durch P mit AB schneiden

b) zu überprüfen: Q in Kreisebene, MP und MQ gleich lang

c)D ja

Da der Tangentenvektor in Q parallel zum Produktvektor $\overrightarrow{MQ} \times \overrightarrow{MA}$ ist, reicht der Nachweis, dass die z-Koordinate von $\overrightarrow{MQ} \times \overrightarrow{MA}$ gleich 0 ist.

d)D ja

Es reicht der Nachweis, dass H in der Kreisebene liegt (etwa mittels PH $\perp$ AB).

Aufgabe 56

a) M(-2/6/9), r = $\sqrt{105}$

Normalebene von AB durch P mit AB schneiden

b) t [X = P + u·(1/52/-40)]

Tangentenvektor in P ist parallel zum Produktvektor $\overrightarrow{MP} \times \overrightarrow{MB}$

c)+ ω = 128,67°, z = 0,998

MT genau unter MB, daher MT als Schnittgerade der lotrechten Ebene durch MB [3x – 4y = -30] mit der Kreisebene [4x + 3y + 4z = 46] ermitteln, ergibt Richtungsvektor (16/12/-25) von MT

Aufgabe 57

a) G(6/39/6), M(42/27/24), r = 42

G und M mit Parameterdarstellungen von g und a ansetzen, Orthogonalitäten $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{GM} \perp \overrightarrow{RS}$ durch Gleichungen ausdrücken, unbekannte Parameter von G und M berechnen

b)D P*(19/78/6)

Durch Spiegeln an der Geraden MG gehen die Achse a und die Gerade g in sich über. Da der Abstand von P zu a in den gleich großen Abstand von P* zu a übergeht, erhält man P* durch Spiegeln von P an G.

Aufgabe 58

a)D ja

Der Mittelpunkt der Deckfläche hat von A und B den gleichen Abstand ($a\sqrt{2}/2$); daher liegt er in der Symmetrieebene von AB.

b) 3:1 bzw. 1:3

a ist Schnittgerade der Symmetrieebene von AB mit oberer Begrenzungsebene des Würfels

c) MP:MQ = 3:7

M ist Schnittpunkt von a mit Normalebene von a durch A (oder B)

Aufgabe 59

a) Längengleichheit entsprechender Seiten verifizieren

b) a [X = t·(1/2/2)]

a ist Schnittgerade der Symmetrieebenen von A_1A_2 und B_1B_2; beide Symmetrieebenen enthalten O

c) 143,13°

Schnittpunkt von a mit Normalebene von a durch B_1 berechnen, ergibt M_B(20/40/40); alternativ M_A(10/20/20)

d) P_2(-33,6/44,8/0)

B_2A_2 um Länge von A_1P_1 verlängern

e)[D] Bei der Drehung wird die Normale des Dreiecks OA_1B_1 durch O (y-Achse) in die Normale des Dreiecks OA_2B_2 durch O (z-Achse) übergeführt.

Aufgabe 60[+]

a) a [X = (33/-33/0) + t·(1/-3/-1)]

a ist Schnittgerade der Symmetrieebenen von P_1P_2 und Q_1Q_2

b)[D] Der Mittelpunkt M des Würfels hat sowohl von P_1 und P_2 den gleichen Abstand (halbe Raumdiagonale) als auch von Q_1 und Q_2 ($a\sqrt{2}/2$). Er liegt daher sowohl in der Symmetrieebene von P_1P_2 als auch von Q_1Q_2.

c) A(11/33/22), B(22/0/11)

d) M_P(12/30/21), M_Q(19,5/7,5/13,5)

Schnittpunkte von a mit Normalebenen von a durch P_1 und Q_1 berechnen, ergibt M_P und M_Q

e) 146,44°

Aufgabe 61[+]

a) a [X = (-2/20/0) + t·(1/-1/1)]

a ist Schnittgerade der Symmetrieebenen von M_1M_2 und A_1A_2

b) M(8/10/10)

Schnittpunkt von a mit Normalebene von a durch M_1 berechnen, ergibt M

c) **t** = (1/3/2)

Richtungsvektor **t** ist parallel zum Kreuzprodukt $\overrightarrow{MM_2} \times \mathbf{a}$

d) α = 120°

e) H(10/2/0)

H auf Winkelsymmetrale von $\sphericalangle M_1MM_2$

Aufgabe 62

a) 65,16°

b) (2/3/2)

s mit Ebene XYZ [x + 2y + 3z = 12] schneiden, ergibt S(3/3/1); A an Ebene XYZ spiegeln, ergibt A*(-1/-3/-3)

c) (2/3/2)

A an Flächennormale n [X = S + t·(1/2/3)] spiegeln, ergibt $A^{\#}$(7/9/5)

Aufgabe 63

a) ja

Der Auftreffpunkt des von B nach A gehenden Lichtstrahls hat von M den Abstand 2,45.

b) nein

Der Auftreffpunkt des von B nach B gehenden Lichtstrahls (also der Fußpunkt der von B ausgehenden Normalen der Spiegelebene) hat von M den Abstand 3,06.

c)^{D} ja

Spiegelt man P an der Diagonalebene, so ist der gespiegelte Punkt P* der Halbierungspunkt einer lotrechten Würfelkante (im Bild verdeckt). Die Gerade P*M trifft die gegenüberliegende lotrechte Würfelkante ebenfalls im Halbierungspunkt.

Aufgabe 64

a) R(5,8/3,4/3,5), S(7,8/-0,6/3,5)

b) 111,8%

Tangens des Winkels zwischen Ebene PQRS und xy-Ebene oder Steigung von $\overrightarrow{QR}$ berechnen

c) R_1(0/5,333/8,902)

A an Ebene PQRS spiegeln, ergibt A*(16/0/-6); Gerade A*R mit yz-Ebene schneiden

d)^{D} Y(0/8/0)

Die Verlängerung von PQ geht durch Y, da man die untere Seite des grauen Bereichs als Projektion von PQ aus A* auf die yz-Ebene auffassen kann. Auf PQ entspricht der Änderung $\Delta y = 2$ die Änderung $\Delta x = -1$.

e)^{D} Der Punkt B liegt auf der z-parallelen Geraden durch Y. Da B außerhalb des Sichtbereichs von A liegt, kann B von A aus nicht gesehen werden. Also kann auch A von B aus nicht gesehen werden.

Aufgabe 65^{+}

a) zu überprüfen: $\overrightarrow{PQ}$ orthogonal zu $\mathbf{n}_\alpha$ und $\mathbf{n}_\beta$

b) M(-2,4/1,6/4)

$\overrightarrow{HM}$ (H ist Halbierungspunkt von PQ) ist parallel zum Produktvektor $\overrightarrow{PQ} \times \mathbf{n}_\alpha$, Orientierung von $\overrightarrow{HM}$ beachten (y-Koordinate negativ gemäß Angabebild)

c) (0,352/-0,933/-0,082)

A an α und B an β spiegeln, ergibt A*(1/-1,6/3,4) und B*(-3,3/9,8/4,4); E und F sind Schnittpunkte von A*B* mit α und β (Berechnung nicht erforderlich); Einheitsvektor von $\overrightarrow{FE}$ mit Hilfe von B* und A* berechnen

d)[D] B_1(0/8,6/12)

Die Ebene des von B_1 nach A_1 gehenden Lichtstrahls muss die Normalvektoren auf die Spiegelebenen enthalten, also muss sie orthogonal zu PQ sein. Daher muss auch A_1B_1 orthogonal zu PQ sein.

Aufgabe 66[+]

a) ε [16x + 12y – 15z = -2850]

Spiegelebene ε ist Normalebene der Winkelsymmetrale von <AMB durch M

b) ja

P an ε spiegeln, ergibt P*(-250/-50/300); AP* mit ε schneiden, ergibt S(0/-25/170);
wegen $\overline{MS} = \sqrt{1025}$ < 50 liegt S im Inneren des Spiegels

c) R(-6/58/230)

Richtungen der Hauptgeraden und Fallgeraden von ε ermitteln, ergibt **h** = (3/-4/0) und **f** = (12/9/20);
$\overrightarrow{MR}$ als Linearkombination von **h** und **f** darstellen (unter Beachtung der Orientierung gemäß Angabebild), ergibt $\overrightarrow{MR}$ = 2·**f** – 10·**h** = (-6/58/40)

Beim Schluss• werden keine Lösungswege skizziert ☺

Aufgabe 67[+]

a) Parabel [$z = -a \cdot x^2 + 187{,}5$ mit a = 5/384], P_{Par}(72/0/120), P_{Kreis}(200/120/120), P(72/120/120)

b) $\mathbf{t}_{Par}$ = (-8/0/15), τ [15x + 8z = 2040]; $\mathbf{t}_{Kreis}$ = (0/3/4), β [4y – 3z = 120]; t [X = P + u·(-32/45/60)]

Aufgabe 68[+]

a) σ_P [3x + y – 3z = -12], σ_Q [x – 25y + 18z = -612], a [X = (-12/24/0) + t·(3/3/4)]

b) M(6/42/24), K_1(42/30/6), K_2(18/6/42)

c) t [X = K_2 + u·(-33/1/24)]

d)[D] Die Winkel sind gleich, da die Tangente t in K_2 mit der Projektion von P_2Q_2 auf die Kehlkreisebene übereinstimmt.

Aufgabe 69[+]

a) Drei aufeinanderfolgende Spiegelungen eines Punktes P(x/y/z) an den Koordinatenebenen ergeben den Punkt P***(-x/-y/-z) und entsprechen daher der Spiegelung am Ursprung U.

b) zu überprüfen: Orthogonalität und Längengleichheit von $\overrightarrow{UA}$, $\overrightarrow{UB}$, $\overrightarrow{UC}$

c) (17,2/6,4/18)