GRUNDLAGENBLATT – AFFINITÄT ZUM HAUPTSCHEITELKREIS

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

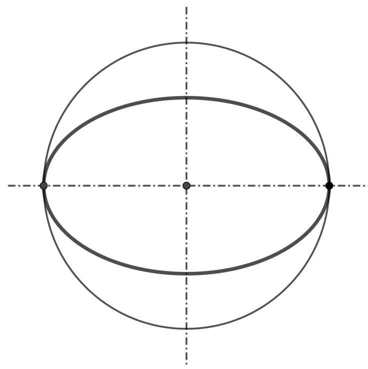
- ✓ Was ist der **Hauptscheitelkreis** einer Ellipse?
- ✓ Was versteht man unter einer normalen perspektiven Affinität?
- ✓ Welche Eigenschaften hat diese Abbildung?
- ✓ Welchen punktweisen Zusammenhang ergibt dies für eine Ellipse und ihren Hauptscheitelkreis?
- ✓ Wie konstruiert man die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse?
- ✓ Wie konstruiert man Tangenten an eine Ellipse durch einen gegebenen Punkt?
- ✓ Wie konstruiert man Tangenten an eine Ellipse, die zu einer Geraden parallel sind?

Es ist naheliegend, eine enge Beziehung zwischen einer Ellipse und dem Kreis zu vermuten, der die Ellipsenhauptachse als Durchmesser besitzt.

Hauptscheitelkreis

Wir bezeichnen den Kreis, dessen Durchmesser die Hauptachse der Ellipse ist, als den **Hauptscheitelkreis** der Ellipse.

In der Figur sehen wir eine Ellipse mit ihrem Hauptscheitelkreis dargestellt. Die beiden Ellipsenachsen sind in dieser Figur als gemeinsame Symmetrieachsen der beiden Kurven ebenfalls angedeutet, sowie ihr gemeinsamer Mittelpunkt und ihre beiden Berührpunkte in den Hauptscheiteln der Ellipse.



Betrachtet man diese Figur etwas genauer, ist es naheliegend die Ellipse in einem gewissen Sinn als „zusammengequetschte“ Version des Hauptscheitelkreises zu sehen. Man kann sich leicht den Kreis als Gummiring vorstellen, den man von oben und unten mit Daumen und Zeigefinger zusammendrückt, um daraus die Ellipse zu erzeugen. Diese anschauliche Vorstellung lässt sich durchaus präzisieren, und sogar für konstruktive Anwendungen ausnutzen. Zu diesem Zweck benötigen wir einige Konzepte, die den Rahmen der Betrachtungen der Ellipse etwas sprengen. Diese Ideen werden sich aber in weiterer Folge als sehr hilfreich herausstellen.

Datum: 17. November 2022.

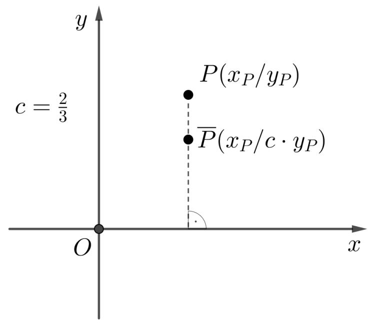
DIE NORMALE PERSPEKTIVE AFFINITÄT

Perspektive Affinität

Unter einer **normalen perspektiven Affinität** verstehen wir eine Punktabbildung in der Koordinatenebene, die jeden Punkt P mit den Koordinaten (x_P/y_P) auf den Punkt $\overline{P}$ mit den Koordinaten $(x_P/c \cdot y_P)$ (mit einem fix vorgegebenen Wert $c \neq 0$) abbildet.

Diese Definition ermöglicht einen Bezug zu einem geeigneten Koordinatensystem, und den Vorteil dieser Tatsache werden wir im Folgenden sofort ausnutzen. Allerdings kann man diese analytische Definition auf rein synthetische Eigenschaften untersuchen, und daher unabhängig von einem Koordinatensystem für konstruktive Anwendungen nutzen.

Im Moment beschränken wir unsere Betrachtungen auf Werte von c mit $0 < c < 1$, und eine solche Abbildung ist in der Figur für den Wert $c = \frac{2}{3}$ angedeutet.



Eigenschaften der normalen perspektiven Affinität I

Diese Punktabbildung hat einige besondere Eigenschaften.

1) *Jeder Punkt der x-Achse ist ein Fixpunkt der Abbildung.*

Jeder dieser Punkte ist gleich seinem eigenen Bildpunkt.

Begründung: Dies folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass derartige Punkte die y-Koordinate 0 haben. Jeder Punkt $P(x_P/0)$ wird auf den Punkt $\overline{P}(x_P/c \cdot 0)$ abgebildet, und wegen $c \cdot 0 = 0$ gilt sicher $P = \overline{P}$.

Man bezeichnet die x-Achse – eine Gerade, die aus lauter Fixpunkten der Affinität besteht – als **Affinitätsachse**.

2) *Die Verbindungsgeraden aller Punkte P der Ebene mit ihren jeweiligen Bildpunkten $\overline{P}$ sind parallel zur y-Achse.*

Begründung: Dies folgt aus der Tatsache, dass sie beide dieselbe x-Koordinate haben.

Man bezeichnet diese zueinander parallelen Verbindungsgeraden als **Affinitätsstrahlen**. (Die hier betrachteten Affinitäten heißen deswegen „normal“ , weil die Affinitätsstrahlen jeweils normal zur Affinitätsachse stehen.)

Eigenschaften der normalen perspektiven Affinität II

3) Die Abbildung ist *bijektiv*, also umkehrbar eindeutig (oder *ein-eindeutig*).

Begründung: Wenn jedem Punkt $P(x_P/y_P)$ eindeutig der Bildpunkt $\overline{P}(x_P/c \cdot y_P)$ zugeordnet wird, hat jeder Bildpunkt $\overline{P}(x_P/\overline{y_P})$ einen eindeutigen Urbildpunkt $P(x_P/\frac{1}{c} \cdot \overline{y_P})$.

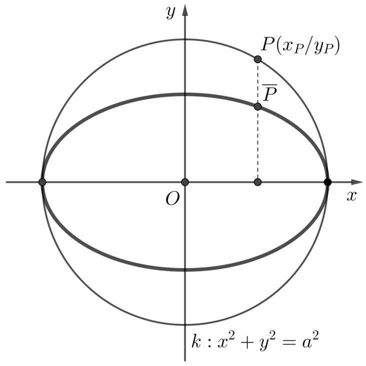
4) Die Abbildung ist *geradentreu*. Das heißt: Punkte P, Q und R, die auf einer gemeinsamen Geraden („*kollinear*“) liegen, werden auf Punkte $\overline{P}$, $\overline{Q}$ und $\overline{R}$ abgebildet, die ebenfalls auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Begründung: Dies folgt aus der Tatsache, dass die Koordinaten kollinearer Punkte $P(x_P/y_P)$, $Q(x_Q/y_Q)$ und $R(x_R/y_R)$ alle einer gemeinsamen Geradengleichung $ax - by = d$ genügen. Die Bildpunkte $\overline{P}(x_P/c \cdot y_P)$, $\overline{Q}(x_Q/c \cdot y_Q)$ und $\overline{R}(x_R/c \cdot y_R)$ genügen dann aber sicher alle der Gleichung $ax - \frac{b}{c}y = d$, und dies ist ebenfalls die Gleichung einer Geraden.

5) Die Abbildung ist *parallelentreu*. Das heißt: Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet, und schneidende Geraden werden auf schneidende Geraden abgebildet.

Begründung: Dies ist eine unmittelbare Konsequenz der Eigenschaften **3)** und **4)**, da jeder gemeinsame Punkt zweier Geraden sicher als gemeinsamer Punkt der Bilder dieser Geraden abgebildet wird.

DIE ELLIPSE ALS PERSPEKTIV AFFINES BILD EINES KREISES



In der Figur sehen wir einen Kreis mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung und einen darufliegenden Punkt P.
Nehmen wir an, der Kreis habe den Radius a, so hat der Kreis die Gleichung

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Die Tatsache, dass der Punkt $P(x_P/y_P)$ auf diesem Kreis liegt, ist gleichwertig mit der Tatsache, dass $x_P^2 + y_P^2 = a^2$ gilt.

Wir betrachten nun die Bilder aller Punkte P des Kreises bei der perspektiven Affinität mit dem Faktor $c = \frac{b}{a}$, wobei $0 < b < a$ gilt. Der Punkt P wird bei dieser Affinität auf den Punkt $\overline{P}(x_P/\frac{b}{a} \cdot y_P)$ abgebildet.

Nun gilt aber

$$x_P^2 + y_P^2 = a^2 \iff x_P^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(\frac{b^2}{a^2} \cdot y_P^2\right) = a^2 \iff x_P^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot \left(\frac{b}{a} \cdot y_P\right)^2 = a^2.$$

Die Koordinaten aller Bildpunkte $\overline{P}$ von Punkten P auf dem Kreis sind also genau die Punkte, deren Koordinaten die Gleichung $x^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 = a^2$ lösen. Wegen

$$x^2 + \frac{a^2}{b^2} \cdot y^2 = a^2 \iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sind dies genau die Punkte der Ellipse in erster Hauptlage mit Hauptachsenlänge a (also gleich dem Kreisradius) und Nebenachsenlänge b.

Ellipse ist perspektiv affin zu Hauptscheitelkreis

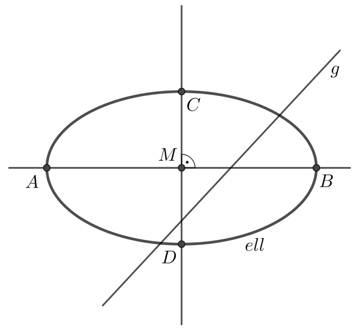
Es gibt also eine normale perspektive Affinität, die den Hauptscheitelkreis einer Ellipse punktweise auf die Ellipse abbildet. Wir sagen, die Ellipse in erster Hauptlage ist **perspektiv affin** zu ihrem Hauptscheitelkreis.

Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse

Wir haben nun alle Werkzeuge in der Hand, um die erste Konstruktion mit Hilfe der Affinität durchzuführen.

Konstruktion 1 (Euklidische Konstruktion: Schnittpunkte der Ellipse mit einer Geraden)**.**

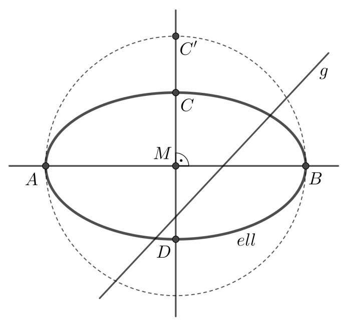
Gegeben sind eine Ellipse *ell* und eine Gerade g. Wir möchten nun die gemeinsamen Schnittpunkte von g und *ell konstruieren.* Graphisch kennen wir natürlich im Bild die gemeinsamen Punkte von g und *ell*, aber die Ellipse ist in ihrer Gesamtheit im Sinne der euklidischen Konstruktionen nicht bekannt, sondern nur, nach Vorgabe ihrer Scheitel, punktweise bestimmbar. Es geht uns also darum, eine *euklidische Konstruktion derjenigen Punkte von g zu bestimmen, die der Ellipsenbedingung genügen.*



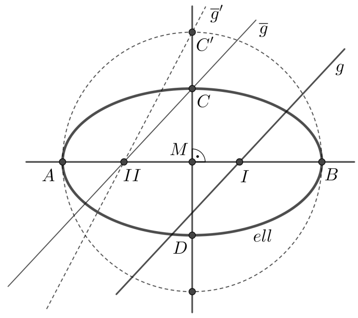
Lösung.

1) Es seien, wie in der Angabe abgebildet, M der Mittelpunkt und A, B, C und D die Scheitel von ell. Wie wir uns zuvor überlegt haben, gibt es eine normale perspektive Affinität mit der Hauptachse AB als Affinitätsachse, die die *Ellipse punktweise in ihren Hauptscheitelkreis überführt.* (Eigentlich haben wir dies in der umgekehrten Reihenfolge nachgewiesen. Dies ist aber aufgrund der Bijektivität der Affinität austauschbar.)
Wir sehen diesen Hauptscheitelkreis (mit Mittelpunkt M durch A und B) in nachstehender Figur eingezeichnet.

2) Der Punkt C' ist das Bild von C bei der perspektiven Affinität, also der Schnittpunkt von CD mit dem Hauptscheitelkreis. (Wir könnten auch den unteren Schnittpunkt zu diesem Zweck verwenden, führen aber hier die Konstruktion unter Verwendung des oberen Schnittpunktes durch.)

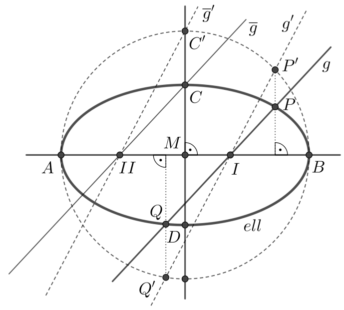


3) Wir bezeichnen den Schnittpunkt von g mit der Affinitätsachse AB mit I.



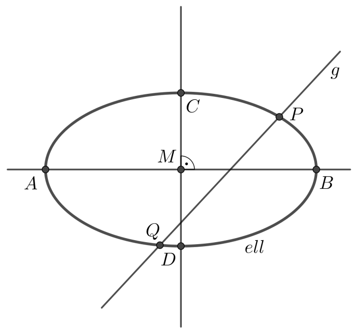
4) Durch C konstruieren wir die Gerade $\overline{g}$ parallel zu g, und diese schneidet AB in II. Da der Punkt C durch die angenommene perspektive Affinität auf C' abgebildet wird, und der Punkt II als Punkt der Affinitätsachse fix bleibt, wird die Gerade $\overline{g} = CII$ dabei auf die Gerade $\overline{g}' = C'II$ abgebildet.

5) Wir haben nun die Gerade g' parallel zu $\overline{g}'$ durch I konstruiert. Da wir wissen, dass $g \parallel \overline{g}$ gilt, liegen aufgrund der Parallelentreue der Affinität auch die Bildgeraden von g und $\overline{g}$ parallel. Da die Bildgerade von g durch den Fixpunkt I gehen muss, ist die resultierende Gerade g' die Bildgerade von g bei der perspektiven Affinität.



6) Die Schnittpunkte P' und Q' von g' mit dem Hauptscheitelkreis gelten aber im euklidischen Sinn als konstruiert, da sie exakt mit Zirkel und Lineal bestimmt worden sind. Dies sind nun genau die affinen Bilder der Schnittpunkte von g mit der Ellipse. Konstruieren wir also noch die Affinitätsstrahlen durch diese Punkte P' und Q' normal zu AB, erhalten wir als Schnittpunkte dieser Affinitätsstrahlen mit g die gewünschten Schnittpunkte P und Q.

Das Ergebnis ist rechts dargestellt.



□

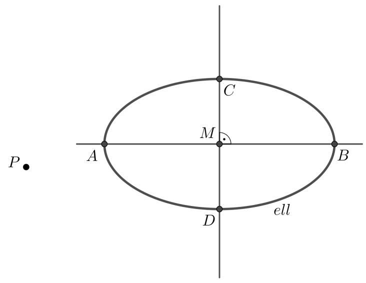
TANGENTEN EINER ELLIPSE DURCH EINEN GEGEBENEN PUNKT

Eine weitere Aufgabe, die mithilfe der Affinität zum Hauptscheitelkreis gelöst werden kann, ist die Konstruktion der Tangenten einer Ellipse (inklusive ihrer Berührpunkte), die durch einen vorgegebenen Punkt gehen.

Eine Möglichkeit diese Aufgabe mithilfe von Gegenpunkten zu lösen findest du am Konstruktionsblatt – Ellipsentangenten.

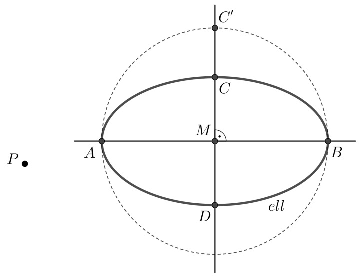
Konstruktion 2 (Tangenten an Ellipse durch gegebenen Punkt)**.**

Es sei also eine Ellipse ell mit Mittelpunkt M und den Scheiteln A, B, C und D gegeben, sowie ein beliebiger Punkt P außerhalb von ell.
Konstruiere die beiden Tangenten an die Ellipse, die den Punkt P enthalten.

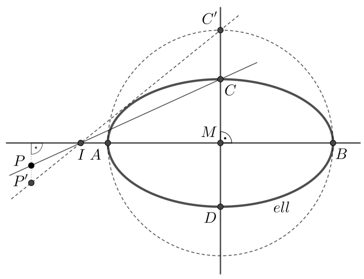


Lösung.

1) Wie in der vorigen Konstruktion sehen wir den Hauptscheiteilkreis von ell, sowie den Bildpunkt C' von C bei der Affinität, die ell auf ihren Hauptscheitelkreis abbildet.



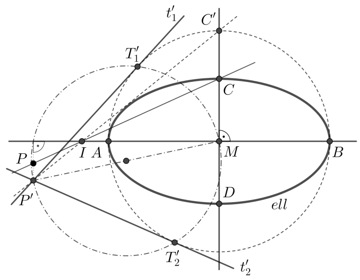
2) Wir konstruieren den Bildpunkt P' von P bei dieser Affinität: Bezeichnen wir den Schnittpunkt von PC mit der Affinitätsachse AB mit I, so erhalten wir die Bildgerade von PC als Verbindungsgerade von I mit C'. Den Punkt P' erhalten wir also als Schnittpunkt dieser Bildgeraden mit dem Affinitätsstrahl durch P, normal zu AB.



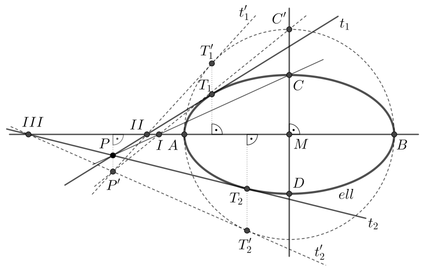
3) Wir konstruieren nun die Tangenten an den Hauptscheitelkreis durch P'. Da eine Kreistangente jeweils normal zum Berührradius stehen muss, liegen die Berührpunkte T_1' und T_2' der beiden Hauptscheitelkreistangenten durch P' auf dem Thaleskreis über die Strecke $P'M$.

Mehr zum Thaleskreis findest du auf dem Grundlagenblatt – Satz von Thales.

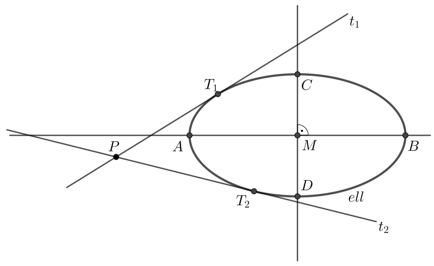
4) Wir konstruieren also den Mittelpunkt der Strecke $P'M$ und zeichnen diesen Thaleskreis als Kreis mit dem Durchmesser $P'M$. Die Punkte T_1' und T_2' erhalten wir als Schnittpunkte dieses Thaleskreises mit dem Hauptscheitelkreis, und die Tangenten an den Hauptscheitelkreis durch P' sind die Verbindungsgeraden $t_1' = P'T_1'$ und $t_2' = P'T_2'$.



5) Wir konstruieren die Urbildpunkte T_1 und T_2 von T_1' bzw. T_2'. Dies machen wir analog zur Methode, die wir schon für den Punkt P angewandt haben. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von t_1' mit AB als II, so liegt der Punkt T_1 sicher auf der Geraden PII und auf dem Affinitätsstrahl durch T_1'. Bezeichnen wir analog den Schnittpunkt von t_2' mit AB als III, so liegt der Punkt T_2 sicher auf der Geraden $PIII$ und auf dem Affinitätsstrahl durch T_2'.



Wir sehen schließlich die beiden gesuchten Tangenten t_1 und t_2 mit ihren Berührpunkten T_1 bzw. T_2.



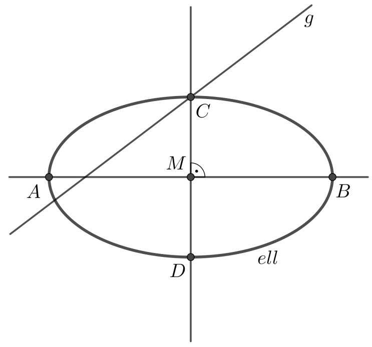
□

Tangenten einer Ellipse parallel zu einer gegebenen Geraden

Als letzte Aufgabe, die wir in diesem Abschnitt mit Hilfe der Affinität zum Hauptscheitelkreis lösen, betrachten wir die Konstruktion der Tangenten einer Ellipse (wieder inklusive ihrer Berührpunkte), die parallel zu einer vorgegebenen Geraden liegen. Auch zu dieser Aufgabe haben wir eine Möglichkeit zur Lösung mit Hilfe von Gegenpunkten schon auf dem Konstruktionsblatt – Ellipsentangenten kennen gelernt.

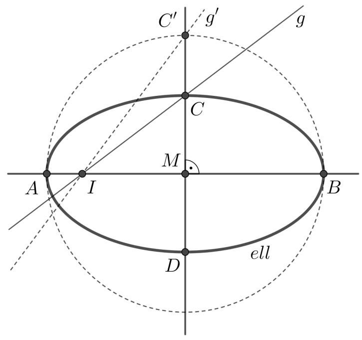
Konstruktion 3.

Es sei also eine Ellipse *ell* mit Mittelpunkt M und den Scheiteln A, B, C und D gegeben, sowie eine beliebige Gerade g. Konstruiere die Tangenten von *ell*, die parallel zu g sind.
Hinweis: Der Einfachheit halber ist g durch C gewählt. Ist g in einer anderen Lage gegeben, kann man die dazu parallel Gerade durch g konstruieren, und dann wie hier fortsetzen.

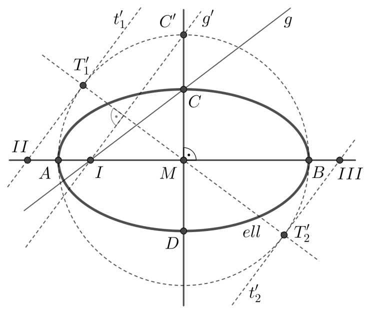


Lösung.

1) Wieder zeichnen wir den Hauptscheiteilkreis von *ell*, sowie den Bildpunkt C' von C bei der Affinität, die *ell* auf ihren Hauptscheitelkreis abbidet. Bezeichnen wir den Schnittpunkt von g mit AB als I, so ist die Gerade $g' = IC'$ die Bildgerade von g bei der Affinität, die die Ellipse in den Hauptscheitelkreis abbildet.

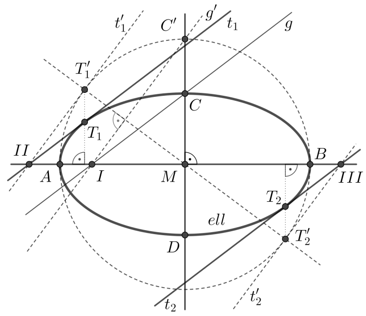


2) Wir konstruieren die Tangenten an den Hauptscheitelkreis, die parallel zu g' liegen.

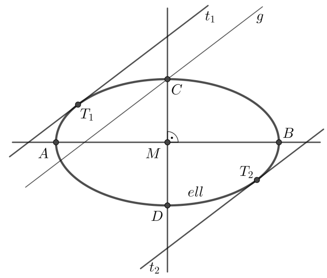


3) Da die Berührradien der gesuchten Tangenten normal zu den Tangenten, und somit auch normal zur dazu parallelen Geraden g', liegen müssen, konstruieren wir die Gerade durch M normal zu g'. Diese schneidet den Hauptscheitelkreis in den Berührpunkten T_1' von t_1' und T_2' von t_2'. Diese beiden Tangenten erhalten wir dann wiederum als Normale zu diesem Durchmesser durch die Punkte T_1' bzw. T_2'. Wir bezeichnen wieder den Schnittpunkt von t_1' mit AB als II und den Schnittpunkt von t_2' mit AB als III.

4) Wir erhalten somit t_1 als Gerade parallel zu g durch den Fixpunkt II und t_2 als Parallele zu g durch III. Die Berührpunkte erhalten wir, wie zuletzt, als Schnittpunkte dieser Geraden mit den jeweiligen Affinitätsstrahlen normal zu AB durch T_1' bzw. T_2'.



Schließlich sehen wir das Ergebnis dieser Konstruktion.



□