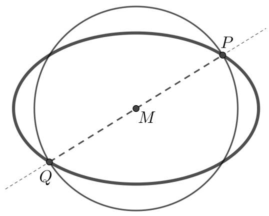
GRUNDLAGENBLATT – AFFINITÄT ZUM KREIS MIT GEMEINSAMEM DURCHMESSER

Fragen & Antworten auf diesem Grundlagenblatt

- ✓ Wie unterscheidet sich eine normale perspektive Affinität von einer allgemeinen perspektiven Affinität?
- ✓ Wie kannst du eine Ellipse perspektiv affin punktweise auf einen Kreis abbilden?
- ✓ Wie kannst du mithilfe dieser Affinität die Achsenkonstruktion durchführen?
- ✓ Wie kannst du mithilfe dieser Affinität eine Tangente konstruieren?

Nachdem wir uns in den vorangegangenen Abschnitten davon überzeugen konnten, dass die Beziehung zwischen einer Ellipse und ihrem Hauptscheitelkreis (sowie ihrem Nebenscheitelkreis) in vielerlei Hinsicht konstruktiv ausgenutzt werden kann, wenden wir uns in diesem Abschnitt einer etwas allgemeineren derartigen Beziehung zu.

Wir sehen eine Ellipse mit Mittelpunkt M und einem Durchmesser PQ, sowie einen Kreis mit demselben Mittelpunkt M und demselben Durchmesser PQ.



Am GB – Affinität zum Hauptscheitelkreis haben wir uns mit der normalen perspektiven Affinität beschäftigt, die eine Ellipse punktweise auf ihren Hauptscheitelkreis abbildet. Zur Erinnerung halten wir noch einmal die Eigenschaften einer solchen Abbildung fest.

1) Es existiert eine Gerade, die aus lauter Fixpunkten der Abbildung besteht, die *Affinitätsachse*.

2) Die Verbindungsgeraden aller Punkte P der Ebene mit ihren jeweiligen Bildpunkten $\overline{P}$ sind zueinander parallel. Man bezeichnet diese zueinander parallelen Verbindungsgeraden als *Affinitätsstrahlen*. Sind die Affinitässtrahlen normal zur Affinitätsachse, bezeichnet man die Affinität als *normal*.

3) Die Abbildung ist *bijektiv*, also umkehrbar eindeutig. Jedem Punkt P wird eindeutig ein Bildpunkt $\overline{P}$ zugeordnet, und jeder Bildpunkt $\overline{P}$ hat einen eindeutigen Urbildpunkt P.

4) Die Abbildung ist geradentreu. Punkte P, Q und R, die auf einer gemeinsamen Geraden liegen, werden auf Punkte $\overline{P}$, $\overline{Q}$ und $\overline{R}$ abgebildet, die ebenfalls auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

5) Die Abbildung ist parallelentreu. Parallele Geraden werden auf parallele Geraden abgebildet, und schneidende werden auf schneidende abgebildet.

Datum: 17. November 2022.

Allgemeine perspektive Affinität

Nicht jede perspektive Affinität ist normal. Eine Punktabbildung, die all diese Eigenschaften hat, für die aber die Affinitatsstrahlen nicht normal zur Affinitätsachse stehen, bezeichnet man als **allgemeine perspektive Affinität**. (Hinweis: Es ist sogar möglich, dass die Affinitätsstrahlen parallel zur Affinitätsachse liegen. In diesem Fall spricht man von einer **Scherung**.)

Ellipse mittels perspektive Affinität auf Kreis mit gemeinsamem Durchmesser abbilden

Da jede perspektive Affinität geradentreu ist, ist jede solche Abbildung linear. Das Bild einer Ellipse, also einer geschlossenen Kurve zweiten Grades, bei einer solchen Abbildung ist daher wiederum eine geschlossene Kurve zweiten Grades. Dies kann man rechnerisch auf analoge Weise nachvollziehen, wie es am GB – Affinität zum Hauptscheitelkreis für die normale perspektive Affinität durchgeführt wurde. Die Rechnung ist allerdings im allgemeinen Fall eher lang, und wir verzichten an dieser Stelle auf ihre explizite Durchführung.

Das Bild einer Ellipse ist somit sicher wieder eine Ellipse, oder unter besonderen Umständen, ein Kreis. Wir sehen eine derartige Situation abgebildet. Die Strecken PQ und RS bilden hier ein Paar konjugierter Durchmesser einer Ellipse, und die Ellipsentangenten in diesen vier Punkten bilden somit die vier Seiten eines umschriebenen Parallelogramms, das durch dünne strichlierte Seiten angedeutet ist.

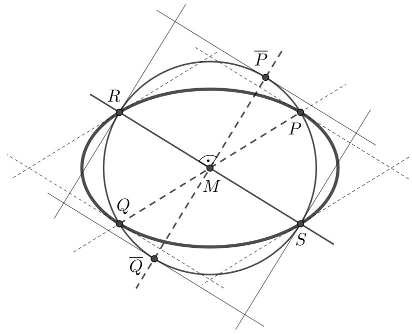
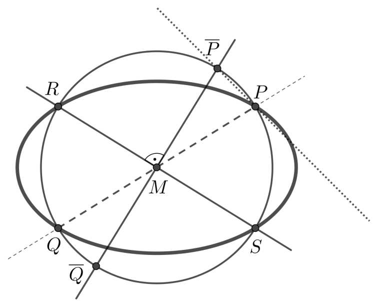


Abbildung 1

Wir nehmen an, eine (allgemeine) perspektive Affinität mit der Affinitätsachse RS bilde die Ellipse punktweise auf einen Kreis ab. Die Gerade RS sei die Affinitätsachse dieser Abbildung. Da die beiden Durchmesserendpunkte R und S Fixpunkte der Affinität sind, ist RS auch ein Durchmesser des Bildkreises. Da die Ellipsentangenten in P und Q aufgrund der Eigenschaft konjugierter Durchmesser parallel zu RS sind, sind die Tangenten des Bildkreises in deren Bildpunkten $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ aufgrund der parallelentreue der Affinität ebenfalls parallel zu RS. Die Berührradien $M\overline{P}$ und $M\overline{Q}$ müssen daher normal zu RS stehen. Es ergibt sich also, dass die Kreistangenten in $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $R = \overline{R}$ und $S = \overline{S}$ die vier Seiten eines umschriebenen Quadrats bilden. Dieses Quadrat ist in obiger Figur durch dünne Volllinien angedeutet.

Wir sehen also, dass die Annahme von RS als Affinitätsachse zur Folge hat, dass $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ die Schnittpunkte der Normalen zu RS mit dem Kreis mit Durchmesser RS sein müssen. Dies ist in der Figur abgebildet. In dieser Figur ist außerdem der Affinitätsstrahl $P\overline{P}$ durch eine gepunktete Linie angedeutet.

Hinweis: Es ergibt sich auch eine perspektive Affinität der gesuchten Art, wenn man die Rollen der Punkte $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ in der Figur vertauscht.

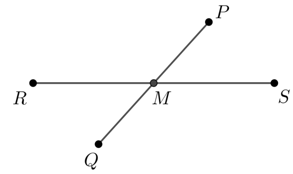


Achsenkonstruktion mithilfe der Affinität von Ellipse zum Kreis

Wir haben nun das Werkzeug in der Hand, weitere nützliche Ellipsenkonstruktionen durchzuführen. Als erste derartige Konstruktion betrachten wir eine Alternative zur Rytzschen Achsenkonstruktion.

Konstruktion 1 (Achsenkonstruktion mithilfe der Affinität)**.**

Gegeben ist ein Paar konjugierter Durchmesser PQ und RS einer Ellipse mit Mittelpunkt $M = PQ \cap RS$.
Konstruiere die Achsen und Scheitel der Ellipse.

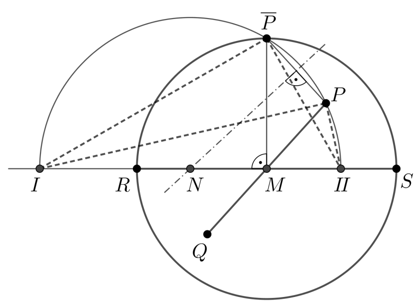


Lösung. Im Folgenden wollen wir, unter Nutzung der Affinität der Ellipse zum Kreis mit Durchmesser RS, die Achsen und Scheitel der Ellipse konstruieren. Zu diesem Zweck halten wir zuerst eine Eigenschaft der Paare konjugierter Ellipsendurchmesser fest: In Abbildung 1 haben wir festgestellt, dass das Parallelogramm, dessen Seiten die Tangenten in den Endpunkten der konjugierten Durchmesser PQ und RS der Ellipse sind, bei der Affinität auf die Seiten eines Quadrats abgebildet werden. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Tangenten eines Kreises, die zu einem Kreisdurchmesser parallel liegen, den Kreis in den Endpunkten des Kreisdurchmessers berühren, der normal zum Ausgangsdurchmesser liegt. Dieses Argument gilt aber allgemein, und nicht nur für den Fall, dass einer der beiden konjugierten Durchmesser als Affinitätsachse auftritt, wie es in Abbildung 1 der Fall ist. Wir sehen also, dass jedes Paar konjugierter Durchmesser der Ellipse auf ein Paar zueinander normaler Durchmesser des Kreises abgebildet wird.

Nun ist es klar, dass die Achsen einer Ellipse das einzige Paar konjugierter Durchmesser bilden, die auch zueinander normal stehen. (Die Scheiteltangenten einer Ellipse stehen ja normal zu den Achsen, und liegen somit parallel zur jeweils anderen Achse.) Gelingt es uns also, dasjenige Paar zueinander normal stehender konjugierter Durchmesser der Ellipse zu identifizieren, so kennen wir die Achsen der Ellipse.

Aufgrund der Parallelentreue der Affinität bedeutet dies aber, dass es genügt, das Paar normaler Richtungen im Ellipsenpunktfeld zu identifizieren, das auf ein Paar normaler Richtungen im Kreispunktfeld abgebildet wird. Um derartige Richtungen zu bestimmen, betrachten wir folgende Figur:

In dieser Figur sehen wir den Kreis mit Durchmesser RS abgebildet. Wir wissen, dass es eine perspektive Affinität mit der Affinitätsachse RS gibt, die die Ellipse mit den konjugierten Durchmessern PQ und RS auf diesen Kreis abbildet. Der Punkt P wird dabei auf einen Punkt $\overline{P}$ dieses Kreises abgebildet, für den $M\overline{P} \perp RS$ gilt.



Nun nehmen wir an, wir kennen bereits zueinander normale Geraden PI und PII, die bei der Affinität auf zueinander normale Bildgeraden durch $\overline{P}$ abgebildet werden. In der Figur sind die beiden Punkte I und II Punkte auf RS und somit Fixpunkte der Affinität. Die Bildgeraden von PI und PII sind daher die Geraden $\overline{P}I$ bzw. $\overline{P}II$. Das bedeutet aber, dass die Punkte P und $\overline{P}$ beide auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser $I\,II$ liegen müssen. Um also die beiden Punkte I und II zu bestimmen, können wir den Mittelpunkt N dieses Thaleskreises konstruieren, und dann den Kreis mit Mittelpunkt N durch P und $\overline{P}$ mit der Geraden RS schneiden.

Da N denselben Abstand zu P und $\overline{P}$ haben muss, liegt N sicher auf der Streckensymmetrale von $P\overline{P}$, und wir erhalten N als Schnittpunkt dieser Streckensymmetrale mit der Geraden RS.

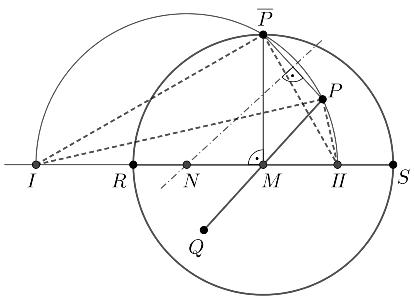
Fassen wir also die Konstruktionsschritte zusammen, die in obiger Figur stattfinden.

1) Zuerst zeichnen wir den Kreis mit Durchmesser RS. Wir konstruieren dann den Punkt $\overline{P}$ als Schnittpunkt der Normalen zu RS durch M mit diesem Kreis.

2) Dann konstruieren wir die Streckensymmetrale von $P\overline{P}$, und erhalten den Mittelpunkt N des Thaleskreises als Schnittpunkt dieser Streckensymmetrale mit RS.

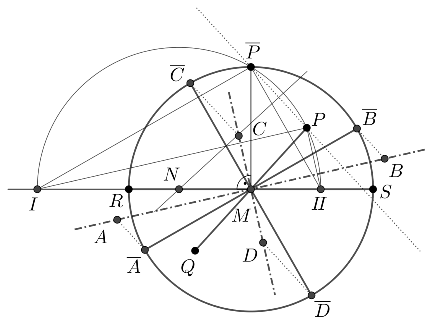
3) Die Punkte I und II erhalten wir dann als Schnittpunkte des Thaleskreises mit Mittelpunkt N durch P und $\overline{P}$ mit der Geraden RS.

4) Somit ergeben sich die zueinander normalen Geradenpaare PI und PII bzw. $\overline{P}I$ und $\overline{P}II$, und wir wissen, dass PI bei der Affinität auf $\overline{P}I$ abgebildet wird und PII auf $\overline{P}II$.



5) Wir können somit die Achsen und Scheitel der Ellipse bestimmen.

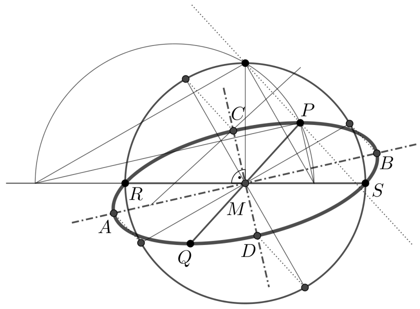
6) Verschieben wir die Geraden $\overline{P}I$ und $\overline{P}II$ parallel durch M, erhalten wir dasjenige Paar zueinander normaler Kreisdurchmesser $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$, das bei der Umkehrung der Affinität auf die Ellipsenachsen AB und CD abgebildet wird.



7) Die beiden Schnittpunkte $\overline{A}$ und $\overline{B}$ der Parallelen zu $\overline{P}I$ durch M mit dem Kreis mit Durchmesser RS sind diejenigen Punkte, die dabei auf die Hauptscheitel A und B der Ellipse abgebildet werden, und wir erhalten diese somit auf der Parallelen zu PI durch M als Schnittpunkte mit den entsprechenden Affinitätsstrahlen.

8) Analog erhalten wir auch die Nebenscheitel C und D der Ellipse auf der Parallelen zu PII durch M aus den Punkten $\overline{C}$ und $\overline{D}$ auf der Parallelen zu $\overline{P}II$ durch M.

9) Wir sehen schließlich die resultierende Ellipse mit ihren Achsen AB und CD, sowie ihren konjugierten Durchmessern PQ und RS.



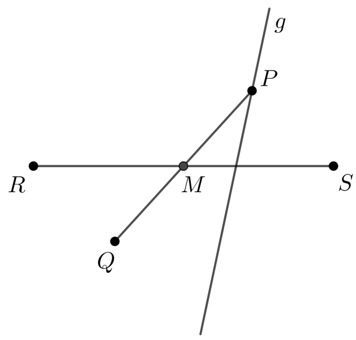
□

Tangentenkonstruktion mit Hilfe der Affinität

Wir können auch diese perspektiv affine Beziehung von Ellipse und Kreis für alle Konstuktionsaufgaben nützen, die wir am GB – Affinität zum Hauptscheitelkreis kennen gelernt haben. Da die Konstruktionsschritte, die dabei zum Einsatz kommen, mit denen, die am GB – Affinität zum Hauptscheitelkreis vorgestellt wurden, identisch sind, können wir uns darauf beschränken ein Beispiel dazu exemplarisch vorzustellen.

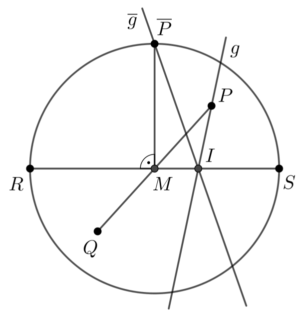
Konstruktion 2 (Tangente mittels allgemeiner perspektiver Affinität)**.**

Gegeben sind zwei konjugierte Durchmesser PQ und RS mit Schnittpunkt M Weiters sei auch noch eine Gerade g gegeben. Wir wollen nun mit Hilfe der allgemeinen perspektiven Affinität, die die Ellipse auf den Kreis mit Durchmesser RS abbildet, die Tangenten der Ellipse konstruieren, die parallel zu g liegen.



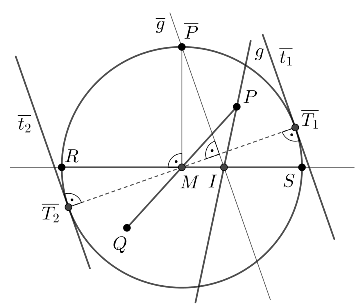
Lösung. Die Gerade g wurde der Einfachheit halber bereits durch P gewählt. Wäre eine Gerade gegeben, die nicht durch P geht, so könnte man zuerst die Parallele durch P konstruieren und mit dieser Parallelen fortsetzen.

1) Der Schnittpunkt von g mit der Affinitätsachse RS sei als I bezeichnet. Wie in der vorangehenden Konstruktion ist $\overline{P}$ als Schnittpunkt der Normalen zu RS mit dem Kreis mit Durchmesser RS wieder der Bildpunkt von P bei der Affinität. Da I ein Fixpunkt der Affinität ist, ist die Gerade $\overline{g} = \overline{P}I$ die Bildgerade von g.



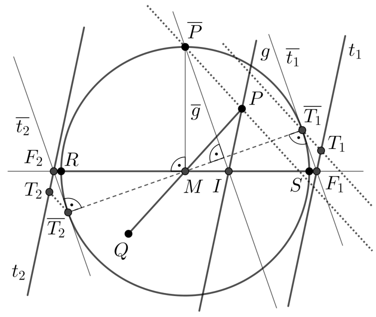
2) Wir konstruieren die Tangenten an den Kreis, die parallel zu $\overline{g}$ sind. Zu diesem Zweck wird die Normale zu $\overline{g}$ durch M mit dem Kreis geschnitten.

3) Die resultierenden Schnittpunkte $\overline{T_1}$ und $\overline{T_2}$ sind die Berührpunkte der zu $\overline{g}$ parallelen Tangenten $\overline{t_1}$ bzw. $\overline{t_2}$ mit dem Kreis, und diese Tangenten erhalten wir somit durch diese Punkte und normal zu $\overline{T_1 T_2}$.

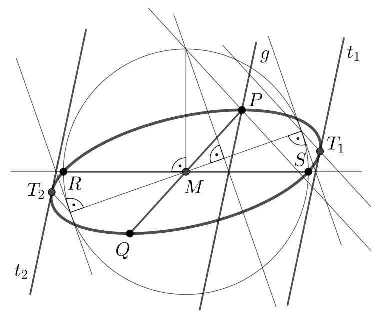


4) Bezeichnen wir die Schnittpunkte von $\overline{t_1}$ und $\overline{t_2}$ mit der Affinitätsachse RS als F_1 bzw. F_2, so erhalten wir die gesuchten Tangenten t_1 und t_2 als die parallelen Geraden zu g durch F_1 bzw. F_2.

5) Wir kennen die Richtung $P\overline{P}$ der Affinitätsstrahlen, und die Berührpunkte erhalten wir daher als Schnittpunkte der Tangenten t_1 und t_2 mit den Affinitätsstrahlen durch $\overline{T_1}$ bzw. $\overline{T_2}$.



6) Wir sehen schließlich die Ellipse mit den beiden konstruierten Tangenten t_1 und t_2 und ihren Berührpunkten T_1 bzw. T_2.



□

Mit dieser Methode gelingt es natürlich auch, die Schnittpunkte einer Geraden mit einer Ellipse bzw. die Tangenten einer Ellipse durch einen vorgegebenen Punkt zu konstruieren.